1.7. DINÁMICA DEL SÓLIDO RÍGIDO

La Dinámica del sólido rígido estudia la relación entre los movimientos de los puntos materiales del sólido rígido y las fuerzas aplicadas y constituye una generalización de la Dinámica del punto material.

1.7.1. Movimiento del centro de masas (o centro de gravedad)

Supongamos un sistema integrado por *n* partículas de masas $m_1, m_2, m_3, ..., m_i, ...m_n$ cuyas posiciones respecto a un sistema fijo de coordenadas cartesianas vienen dadas por los vectores de posición $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, ..., \vec{r}_i, ..., \vec{r}_n$ respectivamente. Consideremos además que $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$, siendo *M* la masa total del sistema. El vector de posición del ***centro de masas*** (CM) del sistema es:

$$\vec{R} = (\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \vec{r}_i \Rightarrow M.\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \vec{r}_i$$

1) Si derivamos esta expresión con respecto al tiempo, obtenemos:

$$M.\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \vec{r}_i \Rightarrow M \cdot \frac{d\vec{R}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dt} \Rightarrow M.\vec{V}_{CM} = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \vec{v}_i$$

donde $\vec{V}_{CM}$ es la velocidad del centro de masas y $\vec{v}_i$ la de la partícula m_i. El segundo miembro de la ecuación anterior es la suma de los momentos lineales de todas las partículas del sistema, por tanto ***la cantidad de movimiento de un sistema de partículas (o sólido rígido) es la misma que la de su centro de masas suponiendo concentrada en él toda la masa:***

$$M.\vec{V}_{CM} = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \vec{v}_i \Rightarrow \vec{P}_{CM} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i$$

Para un sólido rígido o sistema continuo, el sumatorio de la expresión se transformaría en la siguiente integral:

$$\vec{P}_{CM} = M.\vec{V}_{CM} = \int \vec{v} \cdot dm$$

2) Si volvemos a derivar la anterior expresión con respecto al tiempo, vamos a obtener una expresión que nos describe como se mueve el centro de masas de un sólido rígido:

$$M \cdot \frac{d\vec{V}_{CM}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \frac{d\vec{v}_i}{dt} \Rightarrow M \cdot \vec{a}_{CM} = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \vec{a}_i$$

donde $\vec{a}_{CM}$ es la aceleración del centro de masas y $\vec{a}_i$ la aceleración de la partícula m_i **.** Teniendo en cuenta que $\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \vec{a}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$ **,** se obtiene finalmente:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = M \cdot \vec{a}_{CM}$$

El centro de masas de un sistema de partículas (o sólido rígido) se mueve como si toda la masa del sistema concentrada en él y sobre él actuasen todas las fuerzas exteriores que actúan sobre el sistema. Si sobre un sistema no actúan fuerzas exteriores o la resultante de las que actúan es nula, el centro de masas del sistema o está en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme.

1.7.2. Momento angular o cinético

a) Respecto a un punto fijo O

El momento angular total de un sistema de partículas es la suma vectorial de los momentos angulares de todas las partículas que integran el sistema:

$$\vec{L}_0 = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_{0i} = \sum_{i=1}^{n} (\vec{r}_i \times \vec{p}_i) = \sum_{i=1}^{n} (\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i)$$

En el caso de un sólido rígido:

$$\vec{L}_0 = \int (\vec{r} \times \vec{v}) dm$$

Al derivar con respecto al tiempo la expresión $\vec{L}_0 = \sum_{i=1}^{n} (\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i)$ del momento angular se obtiene:

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \sum_{i=1}^{n} (\frac{d\vec{r}_i}{dt} \times m_i \vec{v}_i) + \sum_{i=1}^{n} (\vec{r}_i \times m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}) = \sum_{i=1}^{n} (\vec{v}_i \times m_i \vec{v}_i) + \sum_{i=1}^{n} (\vec{r}_i \times m_i \vec{a}_i) = \sum_{i=1}^{n} (\vec{r}_i \times m_i \vec{a}_i) = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i = \vec{M}_0$$

Esta expresión constituye la representación matemática del ***teorema del momento angular o momento cinético*** según el cual, *la derivada respecto al tiempo del momento angular del sistema respecto a un punto fijo O es igual al momento resultante respecto a dicho punto O de las fuerzas externas aplicadas al sistema.*

b) Momento angular respecto al centro de gravedad

Si el origen del sistema de referencia lo fijamos en el centro de masas del sólido rígido, el momento angular $\vec{L}_{CM}$ se escribe como:

$$\vec{L}_{CM} = \sum_{i=1}^{n} (\vec{r}_{CM\,i} \times m_i \vec{v}_i)$$

siendo $\vec{r}_{CMi}$ el vector de posición de un punto material del sistema con respecto al centro de masas.

Si $\vec{r}_i$ y $\vec{r}_{CM}$ son respectivamente los vectores de posición de un punto material y del centro de masas del sistema respecto a un sistema de referencia fijo, en todo instante, se cumple la siguiente relación:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_{CMi} + \vec{r}_{CM}$$

Sustituyendo este resultado en la expresión del momento angular de un sólido rígido respecto a un punto fijo O tenemos:

$$\vec{L}_0 = \sum_{i=1}^{n}(\vec{r}_i \times m_i\vec{v}_i) = \sum_{i=1}^{n}(\vec{r}_{CMi} + \vec{r}_{CM}) \times m_i\vec{v}_i = \sum_{i=1}^{n}\vec{r}_{CMi} \times m_i\vec{v}_i + \sum_{i=1}^{n}\vec{r}_{CM} \times m_i\vec{v}_i = \vec{L}_{0CM} + \vec{r}_{CM} \times \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i$$

$$\vec{L}_0 = \vec{L}_{CM} + \vec{r}_{CM} \times M\vec{v}_{CM}$$

Por consiguiente, e*l momento angular de un sistema de puntos materiales respecto a un punto fijo cualquiera O es igual a la suma de su momento angular respecto al centro de masas del sistema más el momento respecto a O del centro de masas supuesta la masa total del sistema concentrada en él.*

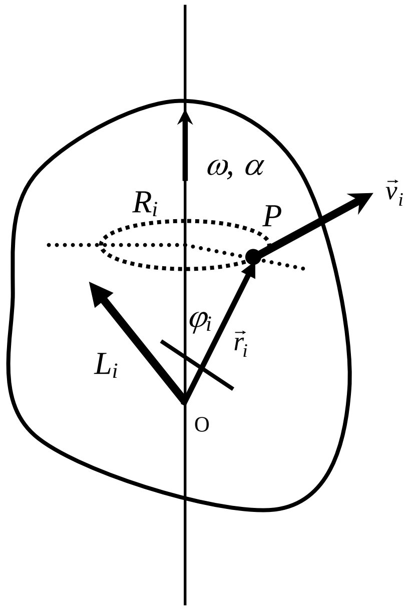
Si en la expresión obtenida derivamos con respecto al tiempo obtenemos:

$$\frac{d\vec{L}_{0CM}}{dt} = \vec{M}_{CM}$$

Esta expresión establece que *la derivada temporal del momento angular respecto al centro de masas de un sistema de puntos materiales es igual al momento resultante respecto al centro de masas de las fuerzas externas aplicadas al sistema.* En consecuencia, el teorema del momento angular es aplicable también al centro de gravedad del sistema, ***a pesar de ser un punto móvil.***

1.7.3. Ecuación de la dinámica de rotación

Consideremos un sólido rígido que rota alrededor de un eje Z con velocidad angular $\vec{\omega}$ y un sistema de referencia con origen sobre dicho eje. Cada uno de sus puntos materiales del sólido rígido describe una órbita circular con centro en el eje Z , $\vec{r}_i$ es el vector de posición del punto material y R_i el radio de la trayectoria descrita:



El momento angular de ese sólido rígido respecto del punto fijo O es la suma de los momentos angulares respecto a O de los puntos materiales que integran el sistema:

$$\vec{L}_0 = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_{0i} = \sum_{i=1}^{n} (\vec{r}_i \times \vec{p}_i) = \sum_{i=1}^{n} (\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i)$$

El momento angular de un punto material se calcula mediante la expresión $\vec{L}_{0i} = \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$ que define un vector perpendicular al plano determinado por los vectores $\vec{v}_i$ y $\vec{r}_i$. La componente del vector $\vec{L}_{0i}$ paralela al eje Z se puede escribir de la siguiente manera:

$$L_{0iz} = r_i m_i v_i \cos(\frac{\pi}{2} - \varphi_i) = m_i (r_i sen\varphi_i) v_i = m_i (r_i sen\varphi_i)(\omega R_i) = m_i R_i^2 \omega$$

Y de aquí podemos escribir la componente del momento angular total del sólido rígido paralela al eje Z :

$$L_{0Z} = \sum_{i=1}^{n} m_i R_i^2 \omega = \omega \sum_{i=1}^{n} m_i R_i^2 = I_z \omega$$

siendo I_Z el ***momento de inercia*** del sólido rígido respecto al eje de rotación *Z*.

En general el momento angular total de un sólido rígido vemos que ***no*** es paralelo al eje de rotación. Sin embargo para cada sólido rígido si es posible encontrar ejes de rotación para los que el momento angular total si que es paralelo a dichos ejes. Puede demostrarse que para cada cuerpo, sin importar su forma, hay (por lo menos) tres direcciones mutuamente perpendiculares para las cuales el momento angular es paralelo al eje de rotación. Estos ejes se denominan ***ejes principales de inercia***, y los momentos correspondientes de inercia respecto a dichos ejes se llaman ***momentos principales de inercia***, designados por I_1, I_2 y I_3 . Respecto a los ejes principales de inercia el tensor de inercia era diagonal, siendo las componentes de la diagonal de la matriz que representa al tensor los momentos de inercia I_1, I_2 y I_3. Cuando el cuerpo tiene ejes de simetría, los ejes principales de inercia coinciden con algún eje de simetría. Por ejemplo, en una esfera, cualquier eje que pasa a través de su centro es un eje principal. Para un cilindro y, en general, para cualquier cuerpo con simetría cilíndrica, el eje de simetría, así como cualquier eje perpendicular a él, son ejes principales. Para un bloque rectangular los tres ejes principales son perpendiculares a las superficies y pasan a través del centro del bloque.

En resumen, cuando un sólido rígido rota alrededor de un eje principal de inercia, es el momento angular total $\vec{L}_0$ el que es paralelo a la velocidad angular $\vec{\omega}$ y por tanto al eje de rotación, por lo que en este caso la expresión deducida anteriormente se puede escribir como la siguiente relación vectorial:

$$\vec{L}_0 = I\vec{\omega}$$

siendo I el momento principal de inercia respecto a dicho eje principal. Con viene insistir en que esta relación vectorial sólo es válida cuando la rotación se produce alrededor de un eje principal de inercia.

En el caso más general en el que la rotación del sólido rígido se produce alrededor de un eje arbitrario, el momento angular total $\vec{L}_0$ se puede descomponer como suma de las proyecciones del dicho vector sobre cada uno de los tres ejes principales. La proyección sobre el eje i principal de inercia se puede escribir como $I_i\vec{\omega}_i$ siendo I_i el momento de inercia respecto al eje i principal de inercia y $\vec{\omega}_i$ la proyección de la velocidad angular total sobre dicho eje principal. La expresión final sería:

$$\vec{L}_0 = I_1\omega_1\vec{u}_1 + I_2\omega_2\vec{u}_2 + I_3\omega_3\vec{u}_3$$

siendo $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ y $\vec{u}_3$ los vectores unitarios a lo largo de los ejes principales (en general $\vec{i}$, $\vec{j}$ y $\vec{k}$) y ω_1, ω_2 y ω_3 las proyecciones o componentes de $\vec{\omega}$ respecto a los ejes principales. Esta ecuación se puede escribir en forma matricial de la siguiente manera:

$$\vec{L}_0 = \begin{bmatrix} L_{01} \\ L_{02} \\ L_{03} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}$$

donde la matriz $\begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix}$ representa el tensor de inercia respecto a los ejes principales del sólido rígido. Por tanto de manera general podemos escribir para el momento angular de un sólido rígido que rota alrededor de un eje arbitrario de la siguiente manera:

$$\vec{L}_0 = \|I\|\vec{\omega}$$

En el caso de una rotación pura del sólido rígido alrededor de un eje, el teorema del momento angular toma la siguiente expresión particular:

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{M}_0 = \|I\|\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \|I\|\vec{\alpha} \Rightarrow \vec{M}_0 = \|I\|\vec{\alpha}$$

La ecuación $\vec{M}_0 = \|I\|\vec{\alpha}$ constituye la ***ecuación fundamental de la dinámica del sólido rígido***. De manera análoga que para un punto fijo *O*, para el centro de masas también se siguen verificando las siguientes expresiones en el caso de que el movimiento realizado por el sólido rígido sea una rotación pura alrededor de un eje que pasa por el centro de masas del mismo:

$$\vec{L}_{0CM} = \|I_{CM}\|\vec{\omega} \quad \text{y} \quad \frac{d\vec{L}_{0CM}}{dt} = \vec{M}_{CM} = \|I_{CM}\|\vec{\alpha}$$

siendo $\|I_{CM}\|$ el tensor de inercia respecto a un sistema de referencia de ejes principales cuyo origen está situado en el centro de masas.

En el caso de más general el movimiento del cuerpo se determina aplicando las ecuaciones de la dinámica del centro de masas y del momento angular:

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i = M \cdot \vec{a}_{CM} \qquad \vec{M}_{CM} = \|I_{CM}\|\vec{\alpha}$$

Estas seis ecuaciones escalares determinan las tres coordenadas del centro de gravedad del sólido rígido y los tres ángulos que fijan la orientación de los ejes coordenados que pasan por el centro de masas. Es decir, los seis parámetros que definen la posición del sólido rígido durante el movimiento.

En el caso de un movimiento plano las ecuaciones se reducen a:

$$\sum_{i=1}^{n} F_x = M\frac{d^2 x_{CM}}{dt} \quad \sum_{i=1}^{n} F_y = M\frac{d^2 y_{CM}}{dt} \quad M_{CM} = I_{CM}\,\alpha$$

Ecuaciones que nos permiten determinar las dos coordenadas del centro de gravedad y el ángulo que fija la orientación del sólido.

Otra forma de abordar el movimiento plano es recordando que como ya se vio en la Cinemática del sólido rígido, el movimiento del sólido siempre se puede reducir a una rotación pura alrededor de un eje instantáneo de rotación que intersecta con el plano del movimiento en el centro instantáneo de rotación. En ese caso, fijada la posición del centro instantáneo de rotación la única ecuación a resolver sería $M = I\alpha$.

1.7.4. Energía cinética de un sólido rígido

La energía cinética de un sistema de puntos materiales viene dada por el siguiente sumatorio:

$$E_C = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i^{\,2}$$

y en el caso de que se trate de un sólido rígido la energía cinética se calcula mediante la siguiente integral:

$$E_C = \frac{1}{2}\int v^2 dm$$

Cuando el sólido rígido realiza una rotación pura alrededor de un eje con una velocidad angular $\vec{\omega}$ debido a la acción de una fuerza exterior la expresión se transforma en:

$$E_{C(rotación)} = \frac{1}{2}\int (\vec{\omega}\times\vec{r})\bullet(\vec{\omega}\times\vec{r})dm = \frac{1}{2}\int \left|\vec{\omega}\times\vec{r}\right|^2 dm = \frac{1}{2}\int \omega^2 r^2 sen^2\varphi \cdot dm = \frac{1}{2}\omega^2 \int R^2 dm = \frac{1}{2} I\omega^2$$

Nota. Si el eje de rotación no fuese un eje principal de inercia, la expresión de la energía cinética de rotación sería la siguiente:

$$E_{C(rotación)} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\omega_1 & \omega_2 & \omega_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3\end{bmatrix}$$

siendo ω_1, ω_2 y ω_3 las proyecciones del vector $\vec{\omega}$ sobre los ejes de referencia principales.

Energía cinética de un sólido rígido en movimiento plano:

Es preciso tener en cuenta que en Dinámica estamos trabajando con las mismas magnitudes vectoriales (velocidades, aceleraciones….) que en Cinemática, la diferencia entre ambas disciplinas es que se usan distintas ecuaciones para obtenerlas. En el caso de la Dinámica se plantean ecuaciones en las que aparecen las causas que originan dichos movimientos, esto es las fuerzas, mientras que están no se consideraban en el estudio de la Cinemática. En este sentido, si nos situamos de nuevo en Cinemática, en el caso del movimiento más general de un sólido rígido podemos escoger el centro de masas como punto al que referir el resto de velocidades del sólido rígido. Es decir cada punto se movería con una velocidad de traslación igual a la del centro de masas a la ver que realizarían un movimiento de rotación alrededor de un eje instantáneo de rotación que pase por el centro de masas.

En tal caso la energía cinética total del sólido en el movimiento plano podría escribirse de la siguiente manera:

$$E_C = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM}\,\omega^2 = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM}\,\omega^2$$

es decir, la energía cinética es igual a la suma de la energía cinética del sólido rígido en un movimiento de traslación con la velocidad $\vec{v}_{CM}$ de su centro de gravedad y de la energía cinética del sólido en un movimiento de rotación con velocidad angular $\vec{\omega}$ alrededor de un eje instantáneo que pase por el centro de gravedad. Este enunciado constituye el teorema de Koenig.

De nuevo recordando lo estudiando en Cinemática, si el movimiento del sólido rígido es un movimiento plano podemos escoger como punto para escribir las velocidades del resto del sólido el centro instantáneo de rotación. En ese caso en cada instante el movimiento se reduce a una rotación pura alrededor de dicho eje y la energía cinética sería exclusivamente energía cinética de rotación alrededor del eje instantáneo de rotación y se escribiría:

$$E_C = \frac{1}{2} I_{eje}\omega^2$$

Para un sistema de puntos materiales o sólido rígido siguen siendo válidos los teoremas de la energía cinética y energía mecánica vistos para un punto material. Es decir, la energía mecánica de un sistema de puntos materiales o sólido rígido permanece constante durante el movimiento siempre que las fuerzas que actúan sobre el sistema sean conservativas.