Theoretische Physik IV: Statistische Physik und Thermodynamik
Übungsblatt 3

Prof. Dr. Frank Wilhelm-Mauch
Michael Kaicher, M.Sc.
Andrii Sokolov, M.Sc.

WS 2018/2019 **Abgabe 07.11.18**

Info: *Bitte schreiben Sie Name und Ihre Übungsgruppe auf das Übungsblatt und tackern Sie dieses. Sie dürfen in Gruppen von bis zu drei Personen abgeben.*

Aufgabe 1: Cumulants (*8 Punkte*)

Consider a random variable x that is sampled from some distribution. Here we will be interested in the cumulants C_n of the distribution.

a) Derive the recurrent relation between the moments $\overline{x^n}$ and the cumulants from C_1 to C_4:

$$\begin{aligned}\overline{x} &= C_1,\\ \overline{x^2} &= \overline{x}C_1 + C_2,\\ \overline{x^3} &= \overline{x^2}C_1 + 2\overline{x}C_2 + C_3,\\ \overline{x^4} &= \overline{x^3}C_1 + 3\overline{x^2}C_2 + 3\overline{x}C_3 + C_4.\end{aligned}$$

It is convenient to use the identity

$$\Phi\frac{d\ln\Phi}{dk} = \frac{d}{dk}\Phi$$

as a starting point. Here $\Phi(k)$ is the characteristic function of the distribution. (*4 Punkte*)

a′) To gain a bonus point, provide the general recurrent relation. (*1* Punkte*)

b) Express the fourth cumulant C_4 in terms of the moments. (*1 Punkt*)

Consider two independent random variables x and y. Now $x + y$, a random variable which is a sum of x and y, is of interest.

c) Show that the characteristic function of $x + y$ is $\Phi^{(x+y)} = \Phi^{(x)}\Phi^{(y)}$. Here $\Phi^{(x)}$ and $\Phi^{(y)}$ are the characteristic functions of x and y. (*2 Punkte*)

d) Show that n-th cumulant $C_n^{(x+y)}$ of $x + y$ is a sum of the respective x and y cumulants,

$$C_n^{(x+y)} = C_n^{(x)} + C_n^{(y)}.$$

(*1 Punkt*)

Aufgabe 2: Relativ gut, absolut schlecht (*6 Punkte*)

Die Stirling Näherung lautet

$$\ln(n!) \approx n\ln(n) - n. \tag{1}$$

Plotten Sie die linke und rechte Seite der obigen Gleichung in eine gemeinsame Grafik. Fertigen Sie eine weitere Grafik an, in welcher die Differenz der linken und rechten Seite, sowie das relativ-Verhältnis der linken zur rechten Seite der Gleichung zu sehen sind. Was fällt auf?

Aufgabe 3: Stirling Näherung (*10 Punkte*)

Gegeben sei

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{x^n}{n!}. \tag{2}$$

Wir kennen die linke Seite der Gl. (2) und möchten nun die reellen Koeffizienten b_n bestimmen.

a) Nutzen Sie die Reihendarstellung von e^x um die ersten drei Koeffizienten b_0, b_1, b_2 aus der trivialen Identität

$$\frac{x}{e^x - 1}\frac{e^x - 1}{x} = 1 \tag{3}$$

herzuleiten. (*3 Punkte*)

Die Euler-Maclaurin Summenformel,

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(x+n) = \int_x^{\infty} f(x')dx' + \frac{f(x)}{2} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_n}{n!} f^{(n-1)}(x), \tag{4}$$

wobei $f^{(i)}(x)$ die i-te Ableitung von $f(x)$ bezeichnet, erlaubt es Summen durch Integrale zu nähern (und umgekehrt).

b) Zeigen Sie mit Hilfe von Gl. (4), dass

$$\sum_{k=n}^{N} f(k) = \int_n^N f(x)dx + \frac{1}{2}(f(n) + f(N)) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_n}{n!} \left[f^{(n-1)}(x)\right]_n^N. \tag{5}$$

Hinweis: $\sum_{k=n}^{N} f(k) = \sum_{k=n}^{\infty} f(k) - \sum_{k=N+1}^{\infty} f(k)$ (*3 Punkte*)

c) Zeigen Sie für den Fall $n \gg 1$, dass

$$\ln(n!) = n\ln(n) - n + \mathcal{O}(\ln(n)). \tag{6}$$

(*4 Punkte*)

Aufgabe 4: Binomialverteilung im thd. Limes (*4 Punkte*)

Gegeben sei die Binomialverteilung

$$P(n) = \binom{N}{n} p^n q^{N-n}, \tag{7}$$

welche die Erfolgschance beschreibt, aus N Versuchen n-mal das Ereiginis mit Einzel-Wahrscheinlichkeit p ($q = 1 - p$) zu erhalten. Zeigen Sie, dass im thermodynamischen Limes ($N \to \infty$, $p \to 0$, mit $pN = \text{konstant} \equiv \lambda$), die Binomialverteilung zu einer Exponentialfunktion wird.

Aufgabe 5: Poisson distribution and the limit of huge counts (*12 Punkte*)

Consider the Poisson distribution, $P(n) = \lambda^n \exp(-\lambda)/n!$.

a) Show it is normalized. (*1 Punkt*)

b) Find the characteristic function of the distribution. (*2 Punkte*)

c) Calculate its cumulants and $\overline{n}$. (*2 Punkte*)

Show that the Poisson distribution can be approximated with a Gaussian one for $\lambda \gg 1$ and small deviations from the most probable n.

d) Approximate the most probable n, assuming n is a huge number. It is convenient to consider the logarithm of $P(n)$. (*2 Punkte*)

e) Taylor-expand $\ln P(n)$ around the most probable n, up to and including the third order. (*2 Punkte*)

f) Write out the Gaussian distribution that approximates the Poisson one. Obtain a criterion $(n - \lambda)^3 \ll \lambda^2$ for the approximation to be valid. (*3 Punkte*)