

PRECESIÓN Y NUTACION

1. ROTACION FORZADA DE LA TIERRA.

La precesión y nutación del eje de la Tierra se debe a las perturbaciones que el Sol, la Luna y los planetas ejercen sobre el sólido Tierra, que podemos asimilar a un Elipsoide. Estos fenómenos de variación del eje de la Tierra corresponden a la Rotación Forzada de la Tierra.

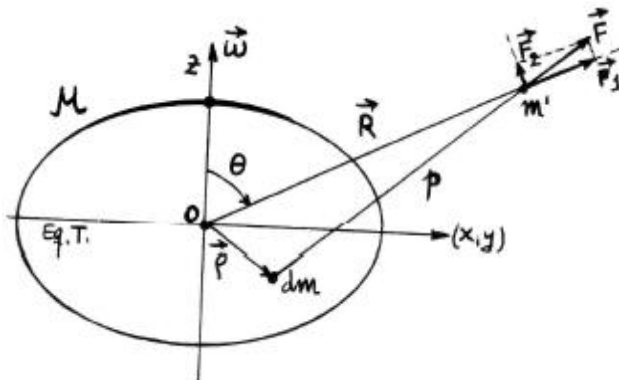
El conjunto de fuerzas que actúan sobre un sólido dan lugar a una Fuerza Resultante responsable en este caso del movimiento orbital y un Par de Fuerzas, que da lugar a la precesión y nutación.

Con la misma notación que la Rotación libre, el Teorema del Momento Cinético nos dice que: $\dot{\vec{H}} = \vec{M}$, en el sistema XYZ

En este problema supondremos que:

$\vec{H} \parallel \vec{\omega} \parallel 3^{er} \text{ eje de inercia del Geoide} \parallel \text{eje menor del elipsoide de revolución} \parallel \vec{z}$

Todo esto se deduce de considerar la Tierra asimilable al Elipsoide de Revolución. Tomaremos como origen de sistemas de coordenadas el centro de masas de la Tierra.



Sea m' una masa perturbadora, situada a la distancia R del centro de masas de la Tierra. La atracción de m' sobre cada elemento de masa dm de μ (Tierra) será una fuerza $d\vec{F}$ cuya resultante \vec{F} vendrá dada por: $\vec{F} = \int_{\mu} d\vec{F}$, que estará contenida en el $\Pi(ZOm')$ por razones de simetría de la masa μ respecto a

dicho plano, y tendrá dos componentes: $\vec{F}_1 \parallel \vec{R}$ y $\vec{F}_2 \perp \vec{R}$ (ya que las fuerzas $d\vec{F}$ no se reparten simétricamente respecto a \vec{Om}' , en el $\Pi(ZOm')$).

Si U es el potencial de atracción de m' sobre el Elipsoide terrestre:

$$\vec{F}_1 = \frac{\partial U}{\partial R} \qquad \vec{F}_2 = \frac{\partial U}{R \cdot \partial \theta}$$

Como: $|\vec{M}| = |\vec{R} \wedge \vec{F}| = |\vec{R} \wedge \vec{F}_1 + \vec{R} \wedge \vec{F}_2| = \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial U}{\partial \theta} \cdot R = \frac{\partial U}{\partial \theta}$

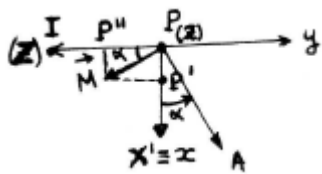
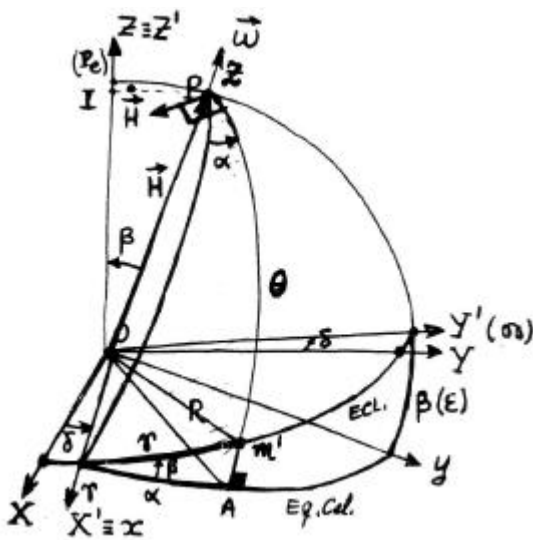
El vector \vec{M} es $\perp (\vec{R}, \vec{F}_2)$, luego será $\perp \Pi(ZOm')$, dirigido hacia afuera.

El potencial U viene dado por: $U = G \int_{\mu} \frac{m' dm}{p} = Gm' \int_{\mu} \frac{dm}{p}$, que es el potencial de atracción de μ en el punto (m') sobre la masa m' . Tomando para U el potencial dado por la fórmula de Mac Cullagh (3.9, 3.10):

$$U = \frac{\mu G m'}{R} + Gm' \frac{C - A}{2R^3} (1 - 3 \cos^2 \theta)$$

Por tanto: $|\vec{M}| = \frac{\partial U}{\partial \theta} = 3Gm' \frac{C - A}{R^3} \text{sen} \theta \cos \theta$ (6.1)

Veamos ahora cómo varía \vec{H} , debido a \vec{M} , en el sistema XYZ .



Sean:

⊙ X, Y, Z : sistema inercial tal que $m' \in \Pi_{XY}$.
Como $m' \cong \text{Sol, Luna}$ $\Pi_{XY} \approx \Pi_{ECL}$

⊙ x, y, z : sistema “asociado” a la Tierra: $\vec{z} \parallel \vec{\omega}$
 $\Pi_{xy} \cong \Pi_{Eq.cel}$ $\vec{x} \parallel \vec{o\gamma}$

⊙ $X' Y' Z'$: sistema “mixto”: $Z' \equiv Z$ $X' \equiv x(\gamma)$

$\dot{\vec{H}} = \vec{M}$ es $\perp \Pi(POm') \Rightarrow$
 $\Rightarrow \perp (\vec{OP} \equiv \vec{OZ}) \Rightarrow \perp \vec{H}$

Luego: $\dot{\vec{H}} \parallel \Pi_{xy}(\Pi_{Eq.C})$ y puede descomponerse en dos vectores, según $\vec{o\alpha}$ y $\vec{o\gamma}$:

$\dot{\vec{H}} = \vec{M} = \begin{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial \theta} \cdot \text{sen} \alpha \\ -\frac{\partial U}{\partial \theta} \cdot \text{cos} \alpha \end{bmatrix}$ Como $\dot{\vec{H}} \perp \vec{H} (\parallel \vec{z})$ se

cumple que $|\vec{H}| = cte$ y basta

estudiar la velocidad angular de \vec{H} en torno a \vec{OZ} .

$\dot{\vec{H}}_x$, en Δt , desplaza P a P' resultando una velocidad angular: $\frac{PP'}{IP}$, de P en torno a (z)

$\dot{\vec{H}}_y$, en Δt , desplaza P a P'' resultando una v. angular: $\frac{PP''}{OP}$, de P en torno a (x) .

La variación angular correspondiente, según los ejes (z) y (x) , será:

$$(z): \left| \frac{\partial \delta}{\partial t} \right| = \frac{PP'}{IP} = \frac{\frac{\partial U}{\partial \theta} \text{sen} \alpha}{OP \text{sen} \beta} = \frac{\frac{\partial U}{\partial \theta} \text{sen} \alpha}{H \text{sen} \beta} \quad ,, \quad \frac{\partial \delta}{\partial t} < 0$$

$$(x): \left| \frac{\partial \beta}{\partial t} \right| = -\frac{\frac{\partial U}{\partial \theta} \text{cos} \alpha}{OP} = -\frac{\frac{\partial U}{\partial \theta} \text{sen} \alpha}{H} \quad ,, \quad \frac{\partial \beta}{\partial t} < 0$$

Como en este caso: $\vec{H} = I\vec{\omega} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} = C\vec{\omega}$, se cumple:

$$|\vec{H}| = H = C\omega = \frac{2\pi}{T}C \quad (6.2)$$

T: periodo sidéreo de rotación de la Tierra (un día sidéreo, expresado en t. medio).

$$(6.1) (6.2) \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \delta}{\partial t} = -\frac{3Gm'}{2\pi} \left(\frac{C-A}{CR^3} \right) \frac{\text{sen} \theta \cdot \text{cos} \theta \cdot \text{sen} \alpha}{\text{sen} \beta} T \\ \frac{\partial \beta}{\partial t} = -\frac{3Gm'}{2\pi} \left(\frac{C-A}{CR^3} \right) \text{sen} \theta \cdot \text{cos} \theta \cdot \text{sen} \alpha \cdot T \end{cases}$$

$$\text{Definimos } K = \frac{3Gm'}{2 \cdot 2\pi R^3} \cdot \frac{C-A}{C} T = \frac{3Gm'}{2\omega R^3} \in \begin{cases} m': \text{masa}_{\text{perturbadora}} \\ \omega = 2\pi/T \\ \epsilon = \frac{C-A}{C} \approx 1/305 \\ R: \text{dist.}_{\text{astro}_{\text{perturb.}}} \end{cases}$$

En el $\Delta(xm'A)$ se cumple: $\text{cos} \theta = \text{sen} \beta \cdot \text{sen} \gamma$ (seno) (A)

y en el $\Delta(xm'P)$: $\text{sen} \alpha \text{sen} \theta = \text{sen} \gamma \cdot \text{cos} \beta$ (seno) (B)

y: $\text{cos} \gamma = \text{sen} \theta \cdot \text{cos} \alpha$ (coseno) (C)

Operando:

$$\frac{2 \text{sen} \theta \cdot \text{cos} \theta \cdot \text{sen} \alpha}{\text{sen} \beta} = \frac{2 \text{cos} \theta \cdot \text{sen} \gamma \cdot \text{cos} \beta}{\text{sen} \beta} = 2 \text{sen}^2 \gamma \cdot \text{cos} \beta = (1 - \text{cos} 2\gamma) \text{cos} \beta$$

y

$$2 \text{sen} \theta \cdot \text{cos} \theta \cdot \text{cos} \alpha = 2 \text{cos} \gamma \cdot \text{cos} \theta = 2 \text{cos} \gamma \cdot \text{sen} \beta \cdot \text{sen} \gamma = \text{sen} 2\gamma \cdot \text{sen} \beta$$

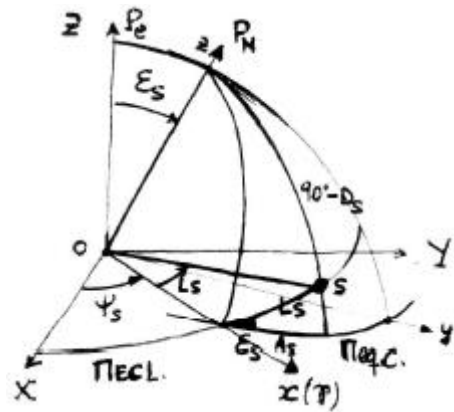
De donde: $\frac{\partial \delta}{\partial t} = -K \text{cos} \beta (1 - \text{cos} 2\gamma)$ (6.3) $\delta \equiv \psi$: ángulo de precesión

y:
$$\frac{\partial \beta}{\partial t} = -K \sin \beta \cdot \sin 2\gamma \quad (6.4) \quad \beta \equiv \varepsilon : \text{ángulo de nutación}$$

2. PRECESION Y NUTACION SOLAR Y LUNAR.

☀ Precesión y nutación solares.

Consideremos un Sol ficticio que recorre la Eclíptica con velocidad angular constante η_s y a una distancia constante de la Tierra (1 u.a.), R_s .



$$\eta_s = \frac{2\pi}{365,25} \text{ dm}^{-1} \quad R_s = 149,6 \cdot 10^6 \text{ km}$$

La longitud L_s del S_f crece $\propto t$, siendo $L_s = \eta_s \cdot t$ ($t=0$ para S/γ)

Ahora:

$$\begin{aligned} \delta &\rightarrow \psi_s & \beta &\rightarrow \varepsilon_s \\ \gamma &\rightarrow L_s & K &\rightarrow K_s \end{aligned}$$

$$(6.3) \Rightarrow \frac{\partial \psi_s}{\partial t} = -K_s \cos \varepsilon_s (1 - \cos 2L_s) \quad (6.5) \quad (6.4) \Rightarrow \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial t} = -K_s \sin \varepsilon_s \sin 2L_s \quad (6.6)$$

Como ε_s varía muy lentamente, consideramos ε_0 aproximadamente constante en los 2^{os} miembros de las ecuaciones diferenciales (6.5) y (6.6). Entonces se integra con $L_s = \eta_s \cdot t$:

$$(6.5) \Rightarrow \frac{\partial \psi_s}{\partial t} = -K_s \cos \varepsilon_0 (1 - \cos 2\eta_s t) \quad (6.6) \Rightarrow \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial t} = -K_s \sin \varepsilon_0 \sin 2\eta_s t$$

$$\text{con } K_s = \frac{3GM_s}{4\pi R_s^3} \cdot \frac{C-A}{C} T = \frac{3GM_s \varepsilon}{2\omega_T R_s^3}$$

$$\text{Al integrar: } \psi_s = \underbrace{-\frac{K_s t \cos \varepsilon_0}{T}}_{\substack{T \text{ secular: precesión} \\ \text{en long/S}}} + \underbrace{\frac{K_s}{2\eta_s} \cos \varepsilon_0 \sin 2\eta_s t}_{\substack{T \text{ periódico (1/2 año): nutación} \\ \text{en long/S } (\sim 1')}} + \psi_0 \quad (6.7)$$

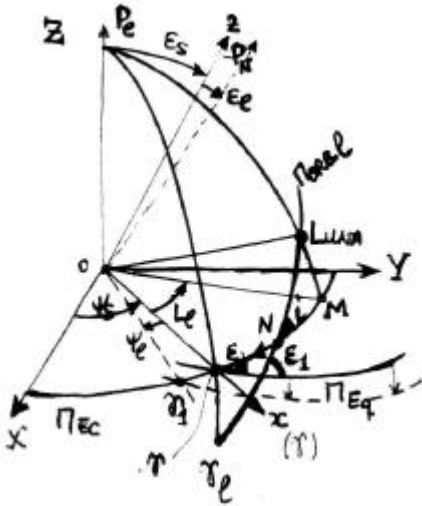
Retrogradación γ/E_c (coefte. < 0)
↳ γ_m

Oscilación γ/γ_m \oplus

$$\varepsilon_s = \underbrace{\frac{K_s}{2\eta_s} \sin \varepsilon_0 \cos 2\eta_s t}_{\substack{\text{Término periódico (P=1/2 año):} \\ \text{nutación en oblicuidad } (\sim 0.5)}} + \varepsilon_0 \quad (6.8)$$

☀ Precesión y nutación lunares.

La Luna tiene una órbita media inclinada aproximadamente $5^{\circ}9'$ respecto a la Eclíptica \rightarrow línea de nodos $= \Pi_L \cap \Pi_{ECL}$. La intersección de estos dos planos da lugar a los nodos ascendente y descendente.



En primera aproximación, la órbita lunar es una elipse de excentricidad $e \approx 1/20$ y podemos suponer una órbita circular de radio R_l (distancia media Tierra-Luna) recorrida (en 27.3 d.m.) con velocidad media constante η_l :

$$R_l = 0.38 \cdot 10^6 \text{ km}$$

$$\eta_l = \frac{2\pi}{27.3} \text{ dm}^{-1}$$

Definimos:

$$\zeta = \widehat{\gamma_l L} : \text{long. de } L \text{ medida en su órbita} / \gamma_l$$

$$\zeta = \frac{2\pi}{27.3} t$$

$$\Omega = \widehat{\gamma N} : \text{longitud del nodo ascendente } N / \gamma \text{ en la Eclíptica.}$$

$$\Omega = \Omega_0 - \frac{2\pi}{6794} t \left(\begin{array}{l} 6794 = 18 \frac{2}{3} \text{ años : periodo de retrogradación} \\ \text{de la línea de nodos respecto a la Eclíptica} \end{array} \right)$$

Si en primera aproximación despreciamos el valor de $\dot{\zeta}$ (pequeño y de efecto periódico) se obtiene una solución análoga al caso del Sol, tomando ε como constante:

$$\dot{\psi}_l = -K_l \cos \varepsilon (1 - \cos 2L_l) \quad \dot{\varepsilon}_l = -K_l \text{sen} \varepsilon \cdot \text{sen} 2L_l$$

$$\text{donde: } L_l \approx \zeta = \frac{2\pi}{27.3} t.$$

Así se obtienen unos resultados análogos a la P y N solar: la P lunar es aproximadamente correcta, pero la N lunar resulta incorrecta.

En una segunda aproximación, resolveremos el problema considerando únicamente el movimiento de precesión del eje P_N en torno a L (ψ'), despreciando la nutación de P_N/L (ψ', ε_1), de periodo muy corto (~ 15 días) y amplitud aproximadamente nula.

El par perturbador lunar produce una precesión secular del P_N en torno a L , que se traduce en un desplazamiento de $P_N \rightarrow P'_N$. En el eje L , a su vez, se desplaza lentamente en torno a P_e , "arrastrando" en este doble movimiento a P_N (Figura 1).

El movimiento de P_N/L ($\overrightarrow{P_N P'_N}$) puede descomponerse en dos componentes (Figura 2):

$$\left. \begin{aligned}
\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} &= K_l \cdot \cos \varepsilon_1 \cdot \underbrace{\text{sen} \varepsilon_1 \cdot \text{sen} \alpha}_{\text{sen} \varepsilon} = K_l \cos \varepsilon_1 \cdot \underbrace{\text{sen} i \cdot \text{sen} \beta}_{\text{sen} \varepsilon} = \\
&= K_l \cdot \text{sen} i \cdot \text{sen} \beta \cdot [\cos \varepsilon \cdot \cos i + \text{sen} \varepsilon \cdot \text{sen} i \cdot \cos \beta] = \\
&= K_l \cdot \cos \varepsilon \cdot \underbrace{\frac{\text{sen} 2i}{2} \cdot \text{sen} \beta + K_l \cdot \text{sen} \varepsilon \cdot \frac{\text{sen}^2 i}{2} \text{sen} 2\beta}_{(2)}
\end{aligned} \right\} (6.11)$$

En el $\Delta(P_N P'_N I)$ (Figura 2) se cumple:

$$\left. \begin{aligned}
\frac{\partial \psi}{\partial t} &= -\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \frac{\cot \alpha}{\text{sen} \varepsilon} = -K_l \cdot \cos \varepsilon \cdot [\text{sen} i \cdot \cos i \cdot \text{sen} \beta + \text{tg} \varepsilon \cdot \text{sen}^2 i \cdot \text{sen} \beta \cdot \cos \beta] \cdot \\
&\quad \cdot \frac{1}{\text{sen} \varepsilon \cdot \text{sen} \beta} \cdot [\text{sen} \varepsilon \cdot \cot i - \cos \varepsilon \cdot \cos \beta] = \dots = \\
&= -K_l \cdot \cos \varepsilon \cdot \left[\underbrace{\left(1 - \frac{3}{2} \text{sen}^2 i \right)}_{(1)} + \frac{1}{2} \underbrace{(\text{tg} \varepsilon - \cot \varepsilon) \cdot \text{sen} 2i \cdot \cos \beta - \frac{\text{sen} 2i}{2} \cdot \cos 2\beta}_{(2)} \right]
\end{aligned} \right\} (6.12)$$

El término (1) es secular y vale:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -K_l \cdot \cos \varepsilon \underbrace{\left(1 - \frac{3}{2} \text{sen}^2 i \right)}_{(\approx 0.988)} \approx -K_l \cdot \cos \varepsilon$$

(término secular si \vec{L} fuera \parallel a \vec{P}_e)

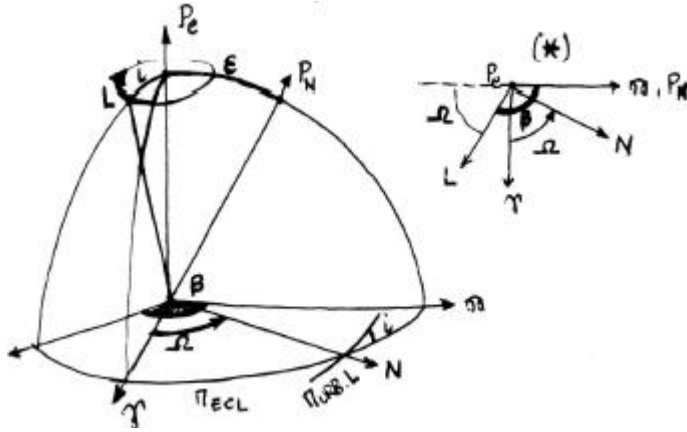
La precesión luni-solar es pues:

$$\sim (K_s + K_l) \cos \varepsilon \cdot (t - t_0)$$

Los términos (2) son periódicos y dan lugar a la nutación lunar, sustituyendo β por $\underbrace{\Omega(t)}_{(*)}$ (longitud del nodo ascendente N_t):

La ecuación (6.11) corresponde a la nutación lunar en oblicuidad.

Los términos (2) de (6.12) corresponden a la nutación lunar en longitud.



Su integración se realiza considerando i y ε constantes en los segundos miembros, y como $\beta = 180^\circ - \Omega = 180^\circ + |\Omega|$ (ya que $\Omega < 0$), se tiene:

$$\text{sen}\beta = -\text{sen}|\Omega| \quad \text{cos}\beta = -\text{cos}|\Omega| \quad \dot{\beta} = |\dot{\Omega}|$$

Como $\Omega = -\frac{2\pi}{6794}t$ (haciendo $\Omega_0 = 0$), se cumple:

$$\dot{\Omega} = -\frac{2\pi}{6794} \quad \dot{\beta} = \frac{2\pi}{6794},$$

de donde, integrando (6.11) y ((6.12-2)):

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= -K_l \cdot \text{cos}\varepsilon \cdot \frac{\text{sen}2i \cdot \text{cos}\beta}{2 \cdot \dot{\beta}} - K_l \cdot \text{sen}\varepsilon \cdot \frac{\text{sen}^2 i \cdot \text{cos}2\beta}{2 \cdot 2\dot{\beta}} = \\ &= \underbrace{K_l \cdot \text{cos}\varepsilon \cdot \frac{\text{sen}2i \cdot \text{cos}(2\pi/6794)}{2}}_{\Delta\varepsilon} \cdot \frac{1}{2\pi/6794} + K_l \cdot \text{sen}\varepsilon \cdot \underbrace{\frac{\text{sen}^2 i \cdot \text{cos}(2\pi/6794)}{2}}_{\sim 0} \cdot \frac{1}{4\pi/6794} \end{aligned} \right\} \quad (6.13)$$

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \underbrace{K_l \cdot \text{cos}\varepsilon (tg\varepsilon - \cot\varepsilon)}_{\Delta\psi} \cdot \frac{\text{sen}2i \cdot \text{sen}(2\pi/6794)}{2 \cdot (2\pi/6794)} + \\ &+ K_l \cdot \text{cos}\varepsilon \cdot \underbrace{\frac{\text{sen}^2 i \cdot \text{sen}(4\pi/6794)}{2}}_{\sim 0} \cdot \frac{1}{(4\pi/6794)} \end{aligned} \right\} \quad (6.14)$$

Como $\frac{\text{sen}^2 i}{2} \sim 0.004$, despreciando los segundos términos del segundo miembro de (6.13) y (6.14), podemos resumir el movimiento del P_N en torno a P_e como sigue:

El polo norte P_N describe un cono de precesión de ángulo ε con velocidad angular constante $\dot{\psi} = -(K_s + K_l)\text{cos}\varepsilon$, en torno al eje fijo P_e .

A este movimiento se superpone la resultante de dos movimientos rectangulares, de amplitud $\Delta \varepsilon$ (según $\perp \widehat{P_N P_e}$), y $\Delta \psi \cdot \text{sen} \varepsilon$ (según $\perp \widehat{P_N P_e}$), que es una elipse descrita con movimiento uniforme respecto a su centro, y cuyos ejes están en la relación:

$$\frac{\Delta \psi \cdot \text{sen} \varepsilon}{\Delta \varepsilon} = (\text{tg} \varepsilon - \text{cot} \varepsilon) \cdot \text{sen} \varepsilon = \dots = \frac{\cos 2\varepsilon}{\cos \varepsilon}$$

Esta elipse de nutación lunar es descrita en un periodo de $18 \frac{2}{3}$ años (periodo idéntico al de retrogradación de la línea de nodos).

☀ Datos numéricos.

Las constantes que intervienen en las fórmulas de precesión y nutación toman los valores siguientes:

$$K_s = \frac{3GM_s}{4\pi R_s^3} \cdot \frac{C-A}{C} \cdot T(1^{ds})$$

$$\frac{C-A}{C} = \frac{1}{305.5} \left(\begin{array}{l} \text{calculado a partir de la} \\ \text{precesión y nutación L-S} \end{array} \right)$$

Por la tercera ley de Kepler: $GM_s = \frac{4\pi^2 R_s^3}{T_s^2}$ y

$$T_s \text{ (año sidéreo)} = 366.25 \text{ d.s., de donde } K_s = \frac{3\pi}{(366.25)^2} \cdot \frac{C-A}{C}$$

La precesión solar en un año es:

$$\Delta \psi_s'' = \frac{3\pi}{(366.25)^2} \cdot \frac{1}{305.5} \cdot \overbrace{0.917}^{\cos \varepsilon = \cos 23^\circ 27'} \cdot 366.25 \cdot 206265 (''/rad)$$

$$\Delta \psi_s'' = 15.'89$$

La precesión total anual es:

$$K_s + 0.988 K_l = K_s \left(1 + 0.988 \frac{K_l}{K_s} \right) = K_T$$

La relación entre las constantes de precesión es:

$$\frac{K_l}{K_s} = \frac{M_L}{M_s} \left(\frac{R_s}{R_L} \right)^3 = \frac{1/81.53}{333432} \left(\frac{149.6 \cdot 10^6}{0.38 \cdot 10^6} \right)^3 = 2.20$$

de donde: $K_T = K_s (1 + 0.988 \cdot 2.20) = 3.17 K_s$

Por tanto, la precesión total anual (LS) vale:

$$\Delta\psi_s'' = 15.''89 \cdot 3.17 = 50.''37 / \text{año juliano (365.25 d.m.)}$$

Los términos de nutación lunar toman los valores:

$$\Delta\varepsilon = K_1 \cdot \cos\varepsilon \cdot \text{sen}2L \cdot \frac{6794}{4\pi} = 9.''34$$

Las observaciones astronómicas dan el valor 9.''21.

$$\Delta\psi \cdot \text{sen}\varepsilon = K_1 \cdot \text{sen}\varepsilon \cdot \cos\varepsilon (\text{tg}\varepsilon - \text{cot}\varepsilon) \cdot \text{sen}2i \cdot \frac{6794}{4\pi} = 6.''95$$

Los datos astronómicos dan 6.''81.

La nutación en longitud es:

$$\Delta\psi = \frac{6.''95}{\text{sen}\varepsilon} = \frac{6.''95}{0.398} = 17.''4$$

Las observaciones dan el valor: 17.''23.

Estos datos corresponden a una teoría de primer orden (segunda aproximación) en términos solares y lunares, despreciando también los términos planetarios.

En una solución rigurosa, debemos incluir los términos de nutación solar y otros términos de nutación lunar, de corto periodo y amplitud, que se obtienen al considerar que $i \neq 0$, de modo que $L_i = f(\zeta, \Omega)$ y al integrar se obtiene ψ_i (ángulo $\widehat{\gamma\gamma_1}$), con un término secular (la precesión lunar en longitud) y una serie de términos periódicos (en $\text{sen}\Omega$, $\text{sen}2\Omega$, $\text{sen}2\zeta$), la nutación lunar en longitud. Asimismo, aparecen términos periódicos (en $\cos\Omega$, $\cos 2\Omega$, $\cos 2\zeta$), la nutación lunar en oblicuidad:

$$\psi_{sl} = \psi_s + \psi_i = \psi_0 - 50.''37t + \dots - 17.''23\text{sen}\Omega - 1.''27\text{sen}2L_s + \left. \begin{array}{l} + 0.''21\text{sen}2\Omega - 0.''21\text{sen}2\zeta + \dots \text{(hasta 110 términos)} \end{array} \right\} \quad (6.15)$$

$$\varepsilon_{sl} = \varepsilon_0 + 9.''21\cos\Omega + 0.''55\cos 2L_s - 0.''09\cos 2\Omega + \left. \begin{array}{l} + 0.''09\cos 2\zeta + \dots \text{(hasta 60 términos)} \end{array} \right\} \quad (6.16) \quad (\text{Oppolzer})$$

El factor 50.''37 es la constante de precesión luni-solar, y el factor 9.''21 es la constante de nutación.

☀ Precesión y nutación planetarias.

Los planetas atraen a la masa de la Tierra desde posiciones fuera del $\Pi_{ECLÍPTICA}$, de modo que la órbita terrestre (Π_{ECL}) se desplaza respecto a un plano invariante (Eclíptica fija).

Los efectos principales son:

1. Un avance del punto Aries de 0.''11/año: Precesión planetaria en longitud.

2. Una variación de ε , de muy largo periodo ($-0.''47/año$): Precesión planetaria en oblicuidad.
3. Una serie de términos periódicos, muy pequeños: Nutación planetaria en longitud y oblicuidad.

☀ Precesión y nutación generales.

Considerando todos los efectos anteriores, se llega a los resultados siguientes.

Constante de precesión general: $50.''256/año$, que corresponde a un periodo de giro de P_N / P_e de 25790 años.

$$\text{Así: } \left. \begin{array}{l} \psi = \psi_0 - 50.''26t + \dots \\ \varepsilon = 23^\circ 27' 8.''26 - 0.''47t - 0.'' \dots t^2 \end{array} \right\} (t = fecha - 1900) \quad (6.17)$$

La aparente “precesión” de ε es en realidad una nutación de periodo muy largo (unos 40000 años), de modo que ε permanece siempre acotada.

Al integrar las ecuaciones diferenciales, considerando ε constante en los 2^{os} miembros se comete un error, cuya corrección da lugar a:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Constante general de precesión: } 50.''256 + 0.''00022t \\ \text{Constante de nutación: } 9.''210 + 0.''000009t \end{array} \right\} (t = fecha - 1900) \quad (6.18)$$

3. EFECTO SOBRE LAS COORDENADAS.

Debido a la precesión y nutación planetarias, la eclíptica se desplaza girando y variando el ángulo que forma con un plano fijo respecto de la Tierra (Eq. T). Considerando únicamente los movimientos seculares (precesión planetaria) se obtiene la Eclíptica media, plano definido por el centro del Sol, el centro de masas del sistema Tierra-Luna y el vector velocidad de este centro de masas. Considerando además la nutación planetaria y la desigualdad mensual, la Eclíptica Verdadera, plano determinado por el centro del Sol, el centro de la Tierra y el vector velocidad de ésta, oscila rápidamente a ambos lados de la Eclíptica Media, con una amplitud de $1.''2$.

Debido a la precesión y nutación luni-solares, el ecuador terrestre experimenta variaciones respecto a un plano invariante en el espacio. En cada instante puede considerarse un Ecuador verdadero, que pasa por el centro de masas de la Tierra y es ortogonal al eje instantáneo de rotación en dicho momento, que coincide con el eje medio de la Tierra.

Este plano se obtiene corrigiendo de precesión y nutación un Ecuador constante de referencia. Si sólo corregimos de precesión, obtenemos un Ecuador Medio. La intersección del Ecuador medio y la Eclíptica media es la línea de los equinoccios media y el nodo ascendente de la eclíptica es el punto Aries medio o equinoccio medio. En cambio, si consideramos el Ecuador verdadero y la Eclíptica verdadera, obtenemos el punto Aries o equinoccio verdadero.

Se suelen considerar como elementos de referencia medios los correspondientes al principio del año astronómico que, como veremos más adelante, empieza cuando la longitud media del Sol, corregida de aberración, es igual a 280° . Esto se indica colocando un cero a la derecha del año; así, 1950.0 indica el comienzo del año astronómico de 1950.

El ángulo que forma el Ecuador medio con la eclíptica media en una fecha es la oblicuidad media en dicha fecha. Su valor, contando t en años a partir de 1900,0 vale (6.17):

$$\varepsilon = 23^\circ 27' 8.''26 - 0.''46845t - 0.00000059t^2 + 0.''00000000181t^3 \quad (6.19)$$

La oblicuidad verdadera en una fecha es el ángulo que forma la Eclíptica verdadera y el ecuador verdadero en dicha fecha.

Las coordenadas celestes medias de un astro son las referidas a la eclíptica, equinoccio y ecuador medios. Análogamente, se definen las coordenadas verdaderas respecto a los elementos verdaderos. En la práctica, especialmente en navegación, interesan las coordenadas medias. En las observaciones de precisión obtenemos las verdaderas y es preciso corregir de nutación para conocer las coordenadas medias.

Para saber las coordenadas medias y verdaderas de un astro en una fecha, tomando, por ejemplo, el Catálogo de 1900.0, se corrige de precesión hasta principios del año en cuestión; una vez hecho esto se efectúa la reducción al día o a la fecha, corrigiendo de precesión y nutación o de precesión sólo, según que nos interesen las coordenadas verdaderas o medias. Los Anuarios astronómicos nos dan los términos de la nutación a lo largo del año.

☀ Variación de los polos.

Como consecuencia de los movimientos de precesión y nutación, el polo celeste se desplaza respecto a las estrellas.

Despreciando la pequeña variación secular de la oblicuidad de la eclíptica, el eje del mundo describirá, debido a la precesión, un cono de revolución alrededor del eje de la eclíptica, de semiabertura igual a la oblicuidad ε de la eclíptica. Dicho movimiento se efectúa en sentido retrógrado y con un periodo de unos 26000 años.

Debido a la nutación, el punto Aries verdadero oscila a uno y otro lado del Aries medio y, además, la oblicuidad de la eclíptica varía periódicamente. En consecuencia, el polo verdadero describe una pequeña elipse alrededor del polo medio; si nos limitamos a su parte principal, los semiejes de dicha elipse son las constantes de nutación $9.''21$ y $6.''86$.

Resumiendo: el eje medio del ecuador describe un cono de revolución alrededor del eje de la eclíptica, y el eje verdadero un cono elíptico alrededor del eje medio del ecuador.

Estudiemos con detalle estos desplazamientos. En la figura se tiene:

Por tanto, las coordenadas (ξ, η) del polo verdadero P' en el sistema considerado serán:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= -\Delta\psi \operatorname{sen}\varepsilon \\ \eta &= -\Delta\varepsilon \end{aligned} \right\} \quad (6.20)$$

Sabemos que los términos principales de la nutación de origen lunar son (6.15) (6.16):

$$\begin{aligned} \Delta\psi &= -17.''23 \operatorname{sen}\Omega + \dots \\ \Delta\varepsilon &= 9.''21 \cos\Omega + \dots \end{aligned}$$

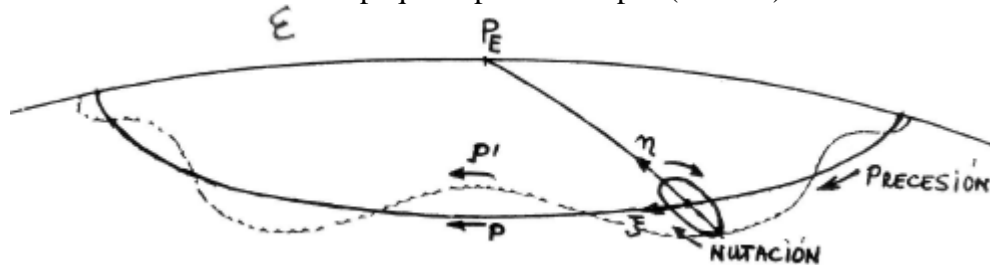
Sustituyendo en (6.20), refiriendo ε a 1900,0, se tiene:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= 17.''23 \operatorname{sen}\varepsilon \operatorname{sen}\Omega = 6.''86 \operatorname{sen}\Omega \\ \eta &= -9.''21 \cos\Omega \end{aligned} \right\} \quad (6.21)$$

que son las ecuaciones paramétricas de una elipse de semiejes $6.''86$ y $9.''21$. El eje mayor tiene la dirección del máximo de longitud P . Como ya indicamos, este movimiento de P' en torno a P se efectúa con un periodo de $18\frac{2}{3}$ años.

Si tenemos en cuenta que el punto Aries medio se mueve a lo largo de la eclíptica media de modo que en un año retrograda $50.''26$, en dicho intervalo de tiempo el polo medio P se desplazará a lo largo del círculo menor correspondiente un ángulo: $50.''26 \operatorname{sen}\varepsilon \approx 20.''0$

Así, mientras que en un año el polo medio se ha desplazado $20.''0$ sobre el eje ξ , el polo verdadero P' habrá descrito sólo una pequeña parte de elipse ($\approx 1/18$) en torno a P .



Como consecuencia del movimiento del polo medio, la estrella "polar" no es siempre la misma. Todas las estrellas con latitud celeste de $90^\circ - \varepsilon$ (unos 67°) serán "polares" en el transcurso de unos 26000 años. Actualmente, la estrella polar es la α de la Osa Menor, cuya distancia al polo es del orden de 1° . Esta distancia disminuye en la actualidad, alcanzándose el mínimo en el año 2015. Dentro de 12000 años la estrella polar será Vega (α Lirae), estrella de primera magnitud.