Α Λυκείου Γεωμετρία
Επαναληπτικό Διαγώνισμα 1- Εκφώνηση-Απάντηση

Θέμα Α

Α1. Να αποδείξετε ότι: το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των δυο πλευρών τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της

Μονάδες 10

Α2. Να δώσετε τον ορισμό του ρόμβου.

Μονάδες 5

Α3. *Να χαρακτηρίσετε με Σωστό ή Λάθος τις παρακάτω προτάσεις:*

α. Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι μικρότερη από το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών του τριγώνου.

β. Οι διαγώνιοι του ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι κάθετες.

γ. Οι διαγώνιοι του ρόμβου είναι ίσες.

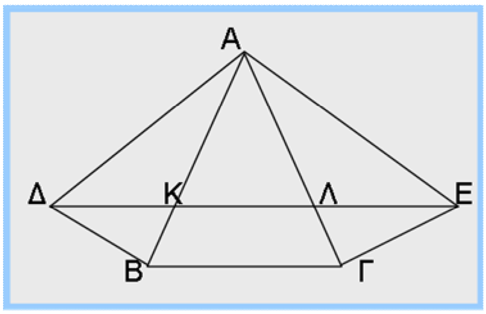
δ. Το περίκεντρο ισαπέχει από τις κορυφές του τριγώνου.

ε. Τα εφαπτόμενα τμήματα κύκλου που άγονται από σημείο εκτός αυτού είναι ίσα μεταξύ τους.

Μονάδες 10

Θέμα Β

Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές (ΑΒ=ΑΓ) Φέρνουμε $ΒΔ \perp ΒΑ$ και $ΓΕ \perp ΓΑ$ με ΒΔ=ΓΕ. Η ΔΕ τέμνει την ΑΒ στο Κ και την ΑΓ στο Λ.



Β1. Να αποδείξετε ότι ΑΔ=ΑΕ

Μονάδες 8

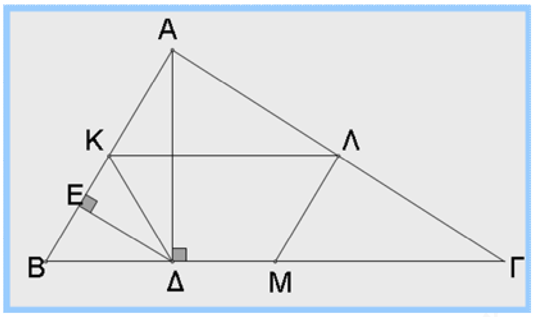
Β2. Τα τρίγωνα ΑΔΚ και ΑΕΛ είναι ίσα

Μονάδες 8

Β3. Να αποδείξετε ότι ΚΛ//ΒΓ

Μονάδες 9

Θέμα Γ



Στο διπλανό σχήμα δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ <ΑΓ) και τα μέσα Κ ,Λ, Μ των πλευρών ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ αντίστοιχα.

Γ1. Να αποδείξετε ότι το ΒΚΛΜ είναι παραλληλόγραμμο.

Μονάδες 6

Γ2. Αν ΑΔ ύψος του τριγώνου ΑΒΓ να αποδείξετε ότι το ΔΚΛΜ είναι ισοσκελές τραπέζιο .

Μονάδες 6

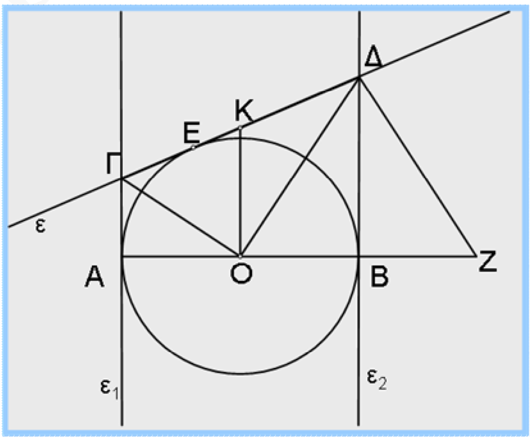
Γ3. Αν ΑΒ= ΒΓ να αποδείξετε ότι το ΒΚΛΜ είναι ρόμβος.

Μονάδες 6

Γ4. Αν $\Delta E \perp AB$ και $\Delta E = \dfrac{AB}{4}$ να υπολογίσετε τη γωνία $B\hat{A}\Delta$

Μονάδες 7

Θέμα Δ



Στο διπλανό σχήμα δίνεται ο κύκλος (Ο,ρ), μια διάμετρός του ΑΒ και οι εφαπτόμενες ε_1, ε_2 του κύκλου στα σημεία Α και Β. Μια τρίτη εφαπτομένη ε στο σημείο Ε τέμνει τις ε_1, ε_2 στα σημεία Γ και Δ . Ονομάζουμε Κ το μέσο του ΓΔ. Προεκτείνουμε το ΟΒ κατά ίσο τμήμα ΒΖ.

Να αποδείξετε ότι:

Δ1. Το τρίγωνο ΓΟΔ είναι ορθογώνιο.

Μονάδες 6

Δ2. $KO = \dfrac{A\Gamma + B\Delta}{2}$ και $KO \perp AB$

Μονάδες 8

Δ3. Ο κύκλος με κέντρο Κ και διάμετρο ΓΔ εφάπτεται στην ΑΒ στο σημείο Ο

Μονάδες 5

Δ4. $E\hat{\Delta}Z = 3B\hat{\Delta}Z$

Μονάδες 6

Απαντήσεις

Θέμα Α

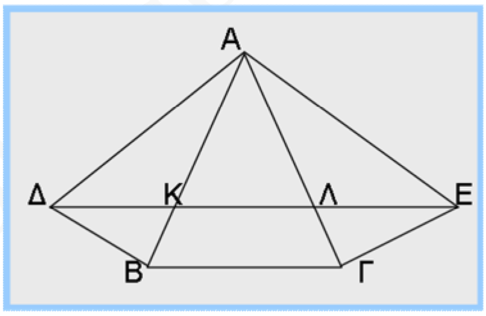
Α1. Σχολικό Βιβλίο . Σελίδα 104

Α2. Σχολικό Βιβλίο . Σελίδα 101

Α3. Λ-Λ-Λ-Σ-Σ

Θέμα Β

Β1.



Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ

Έχουν: 1. $\hat{ΑΒΔ} = \hat{ΑΓΕ} = 90^0$ (Υπ.)

2. ΑΒ=ΑΓ (Υπ.)

3. ΒΔ=ΓΕ (Υπ.)

Τότε $\overset{\Delta}{ΑΒΔ} = \overset{\Delta}{ΑΓΕ}$ άρα **ΑΔ=ΑΕ**

και $\hat{ΔΑΒ} = \hat{ΓΑΕ}$ (1)

Β2. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΔΚ και ΑΕΛ

Έχουν: 1. ΑΔ=ΑΕ (Από **Β1**)

2. $\hat{ΑΔΚ} = \hat{ΑΕΛ}$ (ΑΔΕ Ισοσκελές)

3. $\hat{ΔΑΒ} = \hat{ΓΑΕ}$ (Από (1))

Τότε $\overset{\Delta}{ΑΔΚ} = \overset{\Delta}{ΑΕΛ}$ άρα ΑΚ=ΑΛ

Β3. Στο τρίγωνο ΑΚΛ είναι: $2\hat{ΑΚΛ} + \hat{Α} = 180^0$

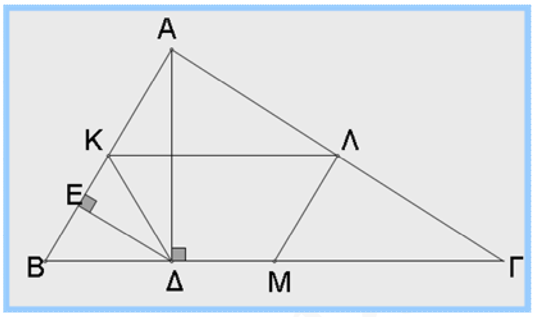
Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι: $2\hat{ΑΒΓ} + \hat{Α} = 180^0$

Τότε $2\hat{ΑΚΛ} + \hat{Α} = 2\hat{ΑΒΓ} + \hat{Α} \Leftrightarrow \hat{ΑΚΛ} = \hat{ΑΒΓ}$

Άρα ΚΛ//ΒΓ γιατί έχουν τις εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες.

Θέμα Γ

Γ1.



Στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$$\begin{cases} \text{Κ} \quad \text{μέσο} \quad \text{ΑΒ} \\ \text{Λ} \quad \text{μέσο} \quad \text{ΑΓ} \end{cases} \quad \text{τότε } \text{ΚΛ} \overset{//}{=} \frac{\text{ΒΓ}}{2} \Leftrightarrow \text{ΚΛ} \overset{//}{=} \text{ΒΜ}$$

Άρα ΚΛΜΒ παραλληλόγραμμο

Γ2. Είναι ΚΛ//ΒΓ δηλαδή ΚΛ//ΔΜ

- Στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε: $\begin{cases} \text{Μ} \quad \text{μέσο} \quad \text{ΒΓ} \\ \text{Λ} \quad \text{μέσο} \quad \text{ΑΓ} \end{cases}$ άρα $\text{ΜΛ} = \dfrac{\text{ΑΒ}}{2}$ (1)

- $\begin{cases} \overset{\triangle}{\text{ΑΔΒ}} \quad \text{Ορθογώνιο} \\ \text{ΔΚ} \quad \text{Διάμεσος} \end{cases}$ άρα $\text{ΔΚ} = \dfrac{\text{ΑΒ}}{2}$ (2)

Από (1) και (2) ΜΛ=ΔΚ τότε ΚΛΜΔ ισοσκελές τραπέζιο

Γ3. Αν ΑΒ=ΒΓ τότε από (1) $\text{ΜΛ} = \dfrac{\text{ΒΓ}}{2} \Leftrightarrow \text{ΜΛ} = \text{ΒΜ}$

Το παραλληλόγραμμο ΒΚΛΜ έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες άρα Ρόμβος

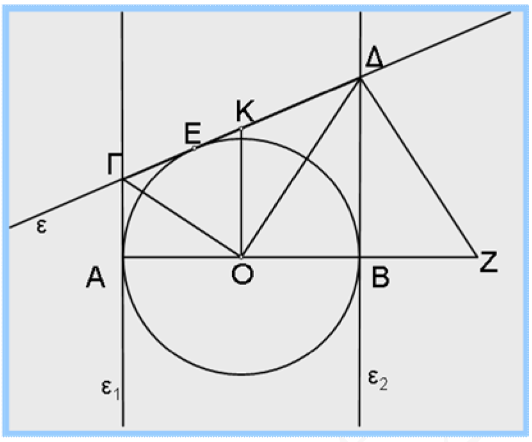
Γ4. Από (2) είναι ΑΒ=2ΔΚ

Τότε $\text{ΔΕ} = \dfrac{\text{ΑΒ}}{4} \Leftrightarrow \text{ΔΕ} = \dfrac{2\text{ΔΚ}}{4} \Leftrightarrow \text{ΔΕ} = \dfrac{\text{ΔΚ}}{2}$ άρα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΕΚ

είναι $\widehat{\text{ΒΚΔ}} = 30^0$. Όμως $\overset{\triangle}{\text{ΑΚΔ}}$ ισοσκελές :

$$\widehat{\text{ΒΚΔ}} = 2\widehat{\text{ΒΑΔ}} \Leftrightarrow \widehat{\text{ΒΑΔ}} = \frac{1}{2} \cdot 30^0 = 15^0$$

Θέμα Δ



Δ1.

$\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ άρα $\widehat{A\Gamma E}+\widehat{B\Delta E}=180^0$ δηλαδή

$2\widehat{O\Gamma K}+2\widehat{O\Delta K}=180^0 \Leftrightarrow \widehat{O\Gamma K}+\widehat{O\Delta K}=90^0$

Τότε στο τρίγωνο ΟΔΓ είναι $\widehat{\Gamma O\Delta}=90^0$

Άρα ορθογώνιο

2ος τρόπος:

ΟΓ= διχοτόμος $\widehat{AOE}$

ΟΔ= διχοτόμος $\widehat{BOE}$

Οι διχοτόμοι δύο εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών είναι κάθετες άρα

$\widehat{\Gamma O\Delta}=90^0$ δηλαδή τι τρίγωνο ΓΟΔ ορθογώνιο

Δ2.

$\begin{cases} A\Gamma \perp AB \\ B\Delta \perp AB \end{cases}$ άρα ΑΓ//ΒΔ τότε ΑΓΔΒ τραπέζιο

ΟΚ διάμεσος άρα $OK=\dfrac{A\Gamma+B\Delta}{2}$ και ΟΚ//ΔΒ δηλαδή $OK \perp AB$

Δ3.

$\begin{cases} \overset{\Delta}{\Gamma O\Delta} \quad \text{Ορθογώνιο} \\ OK \quad \text{Διάμεσος} \end{cases}$ άρα $OK=\dfrac{\Gamma\Delta}{2} \Leftrightarrow OK=K\Delta=K\Gamma$

Άρα ο κύκλος (Κ,ΚΟ) διέρχεται από το Ο και από **Δ2** ΑΒ εφαπτομένη.

Δ4.

Στο τρίγωνο ΟΔΖ , $\Delta B \perp OZ$, ΔΒ ύψος . Επειδή ΟΒ=ΒΖ η ΔΒ είναι διάμεσος

Άρα το τρίγωνο ΟΔΖ είναι ισοσκελές και ΔΒ διχοτόμος τότε $\widehat{B\Delta Z}=\widehat{B\Delta O}$ (1)

Όμως $\widehat{K\Delta O}=\widehat{B\Delta O}$ (2)

Τότε $\widehat{E\Delta Z}=\widehat{E\Delta O}+\widehat{O\Delta B}+\widehat{B\Delta Z}\underset{(2)}{\overset{(1)}{=}}3\widehat{B\Delta Z}$