وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه
گاوازنگ - زنجان

حل عددی معادلات بلک–شولز حاصل از اختیار آمریکایی با روش تفاضلات متناهی

پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد

سیّدمحمّدمهدی کاظمی

اساتید راهنما:

دکتر مهدی دهقان

و

دکتر علی فروش‌باستانی

شهریور ۱۳۸۹

بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم خالصانه به

مادرم

قدردانی و تشکر

بر خود لازم می‌دانم که از اساتید راهنمای خودم دکتر علی فروش‌باستانی و دکتر مهدی دهقان به‌خاطر تمامی زحماتشان، در انجام این پایان‌نامه قدردانی نمایم. از **مادر عزیزم** که اسوه‌ی ایثار و فداکاری و نمونه‌ی تمامِ خوبی‌ها، تا همیشه زندگی‌ام می‌باشد، تشکر کرده و خاکسارانه دستانِ پُر مهرش را می‌بوسم. در مسیر پُر پیچ و خمِ تهیه و تدوین این اثر، آن‌که هیچ‌گاه تنهایم نگذاشت، همسر مهربانم بود که از ایشان نهایت سپاسگذاری را دارم. از برادر و خواهر عزیزم و همچنین دیگر اعضای خانواده‌ام که با دلگرمی‌های خویش، همواره مشوّق من بودند، تشکر می‌کنم.

چکیده

اختیار آمریکایی، یکی از مهم‌ترین کالاها در دنیای مالی است که مسئله قیمت‌گذاری منصفانه بر آن، اصلی‌ترین رویکرد این پایان‌نامه می‌باشد. معادله بلک‌ـ شولز با مرز آزاد، مسئله متمم خطی، روش دوجمله‌ای و روش مونت کارلو، چهار رهیافت اساسی در مواجهه با حل این مسئله هستند. مرز آزاد، در عین سادگی ظاهری یکی از پیچیده‌ترین مسائل موجود است که در واقع توازن تعداد معادلات و مجهولات مسئله را درهم ریخته و به نوعی باعث اعمالِ شرایطی اضافی بر مرزِ معادله می‌شود.

در این پایان‌نامه، به حل عددی معادله بلک‌ـ شولز با مرز آزاد در شرایطی می‌پردازیم که این مسئله، فاقد جواب تحلیلی دقیق است. برای نیل به این هدف، ابتدا مقدمات نسبتاً مبسوطی از مفاهیم ریاضیات مالی را ارائه و سپس طریقه بدست آوردن معادله بلک‌ـ شولز با کمک لم ایتو را بیان می‌کنیم.

معادله بلک‌ـ شولز با مرز آزاد، با تغییر متغیری مناسب به مسئله گرما با مرز آزاد و ناحیه نامحدود تبدیل می‌شود. بیان روش شرایط مرزی مصنوعی، کلید ورود به حل عددی مسائلی با ناحیه نامحدود است که در طی سه روش به ارائه بهبودهایی قابل توجه بر آن و در نتیجه بهبود در مسئله قیمت‌گذاری اختیار آمریکایی می‌پردازیم. در نهایت، روش توابع پایه‌ای شعاعی از خانواده روش‌های بدون شبکه را برای حل مسئله قیمت‌گذاری اختیار آمریکایی بکار می‌بریم.

فهرست

۳ معرفی اختیارات آمریکایی و انواع روش‌های قیمت‌گذاری آن

مقدمه

اولین تئوری‌ها در ریاضیات مالی، با کارهای بشیلیه [۱] در سال ۱۹۰۰ آغاز شد. یکی از بزرگ‌ترین مسائل در این شاخه از علم، مدل‌سازی نوسانات قیمت سهام بود. کشفیات انیشتین [۲]، مبنی بر حرکت برآونی [۳] ذرات معلق در آب و سپس ارائه مدل ریاضی آن توسط وینر [۴]، دریچه ورود مدل‌های تصادفی به علوم دیگر شد. ساموئلسون [۵]، در سال ۱۹۶۵ با چاپ مقاله‌ای به بیان استدلال‌های اقتصادی خود مبنی بر تصادفی بودن نوسانات قیمت کالاها پرداخت [۶۱]. این مقاله، دو دستاورد مهم برای دنیای اقتصاد داشت، یکی ارائه مبانی آن چیزی بود که امروزه به آن فرض بازار کار گفته می‌شود و دیگری بیان ویژگی مارتینگلی [۶]، برای تغییرات پیش‌بینی نشده در قیمت سهام بود. وی با کمک همین ویژگی، ثابت کرد که تغییرات آتی در قیمت کالاها در طی زمان، ناهمبسته باقی مانده و در واقع مدل قیمت سهام، تعمیمی از الگوی قدم زدن تصادفی [۷] است. در همان سال مک‌کین [۸] و ایتو [۹] در کتابشان نشان دادند که الگوی مناسب برای تغییرات قیمت کالاها در بازار بورس، آن چیزی است که امروزه به آن حرکت برآونی هندسی یا فرآیند وینر [۱۰] می‌گویند. سپس ساموئلسون، نشان داد که الگوی پیشین ارائه شده توسط بشیلیه، مثبت بودن قیمت کالاها را تضمین نکرده و به ناسازگاری آشکار با اصول اقتصادی منجر می‌شود، در حالی که حرکت برآونی هندسی با چنین دردسری مواجه نیست. اولین بار در این مقاله، اصطلاحاتی چون «اختیار معامله اروپایی و آمریکایی [۱۱]» متولد گردید. اختیار آمریکایی، دارای پیچیدگی و در عین حال آزادی انتخاب بیشتری نسبت به نوع اروپایی است و با این که ساموئلسون اروپایی بود، نام آمریکایی را به مدل پرکاربردتر داد. شاید دلیل نام‌گذاری ساموئلسون این بود که مردم آمریکا به طور کلی در پی کسب آزادی، اختیار

[۱] L. Bachelier
[۲] A. Einstein
[۳] Brownian Motion
[۴] J. Wiener
[۵] P. Samuelson
[۶] Martingle
[۷] Random Walk
[۸] H. P. Mckean
[۹] K. Itô
[۱۰] Wiener Process
[۱۱] American and European Option

و رفاه بیشتر در تمامی امور اجتماعی خود هستند.

اختیار، کالایی مالی است که قیمت آن به طور مستقیم با قیمت کالا یا سهام مربوط به آن ارتباط دارد. مدل تصادفی برای قیمت سهام، منجر به مدلی تصادفی برای قیمت اختیار می‌شود. تعیین قیمتی منصفانه برای اختیارها که از جنس تصادفی می‌باشد، سال‌ها مهم‌ترین دغدغه دانشمندان حیطه مالی بوده است. این دغدغه، با تولد حسابان تصادفی [۱۲] توسط ایتو و اثبات قاعده زنجیره‌ای برای توابع تصادفی در لم ایتو، به راه‌حلی مطلوب نزدیک شد. در سال ۱۹۷۳، بلک [۱۳] و شولز [۱۴] [۹] و به طور جداگانه مرتون [15] [۵۵] توانستند یافته‌های مالی ساموئلسون، در ارائه مدل حرکت براونی هندسی را با نتایج حاصل از لم ایتو برای تغییرات قیمت اختیار ناشی از سهام، به شکلی هنرمندانه ترکیب کرده و عامل تصادفی را در تعیین قیمت اختیار، حذف نمایند. در واقع آن‌ها توانستند، تعیین منصفانه قیمت اختیار را به معادله دیفرانسیلی با مشتقات جزئی از متغیرهای قیمت سهام و زمان بدون حضور عامل تصادفی یا همان ریسک، بسپارند. در سال ۱۹۹۷، شولز و مرتون به خاطر خدمت بزرگشان به علم اقتصاد، مفتخر به دریافت جایزه نوبل اقتصاد شدند[۳۰] اما بلک که متأسفانه در سال ۱۹۹۵ درگذشته بود، به این مهم دست نیافت. به افتخار این افراد پیشگام، امروزه این معادله به معادله بلک– شولز [۱۶] مشهور است که این معادله، در دسته معادلات دیفرانسیل سهموی درجه دو قرار دارد.

برای انواع ساده‌ای از معادله بلک– شولز مانند نوع اروپایی، جواب تحلیلی ارائه شده است اما معادله بلک– شولز برای انواع پیچیده‌تر مانند، مدل آمریکایی فاقد فرم صریح جواب به صورت تحلیلی است [۳۳، ۴۵، ۴۶، ۴۷]. لذا، روی آوردن به تقریب‌های تحلیلی و حل عددی مسئله آمریکایی، بدیهی‌ترین ایده‌ای است که به ذهن می‌رسد. از روش‌های نیمه تحلیلی برای قیمت‌گذاری اختیار آمریکایی می‌توان به روش درونیابی [۱۷]، روش تقریب مرکب اختیار [۱۸]، روش تقریب‌های انتگرالی [۱۹]، استفاده از تبدیلات ملین [۲۰] اشاره کرد که خواننده علاقه‌مند را به مراجع [۳۲، ۴۳، ۵۸، ۷۳] ارجاع می‌دهیم. از روش‌های عددی می‌توان

[۱۲] Stochastic Calculus

[۱۳] F. Black

[۱۴] M. Scholes

[۱۵] R. Merton

[۱۶] Black-Scholes Equation

[۱۷] Interpolation Method

[۱۸] Compound Option Approximation Method

[۱۹] Quadratic Aproximtion Method

[۲۰] Mellin Transformations

به خانواده روش‌های لَتیث[۲۱] مانند روش دوجمله‌ای[۲۲] [۵، ۱۸، ۴۱]، روش مونت کارلو[۲۳] [۱۲، ۴۰]، روش عناصر متناهی[۲۴] [۳، ۷۳] و روش تفاضلات متناهی[۲۵] [۱۳، ۱۴، ۲۵، ۷۰] اشاره نمود.

معادله بلک– شولز برای مدل آمریکایی تبدیل به مسئله‌ای با مرز آزاد می‌شود. مسئله مرز آزاد، معمولاً دارای مرزی است که مکان یا مسیر آن در ابتدا مشخص نبوده و هم‌زمان با حل معادله دیفرانسیل بدست می آید. این مسائل در عین ظاهری ساده، دارای پیچیدگی بالایی در فهم و پیاده‌سازی هستند. معادله بلک– شولز با مرز آزاد را می‌توان با تغییر متغیری مناسب به معادله گرمایی با مرز آزاد و ناحیه نامحدود یا نامتناهی[۲۶] تبدیل کرد. این تبدیل مناسب است زیرا انواع روش‌های تحلیلی و عددی برای معادله گرما پیاده‌سازی شده و پایداری، همگرایی و سازگاری آن‌ها اثبات شده است. در رویارویی با مسائلی که ناحیه آن‌ها نامتناهی یا نیمه نامتناهی هستند، معرفی شرایط مرزی مصنوعی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. در واقع شرایط مرزی مصنوعی شامل انواع تکنیک‌هایی است که ناحیه نامحدود را به ناحیه‌ای محدود تبدیل می‌نماید. قضایای دوهامل، توابع گرین، تبدیلات فوریه و تبدیلات لاپلاس، از جمله این تکنیک‌ها هستند [۲۷، ۲۸، ۳۹، ٦۵، ۷۲].

طرح کلی این پایان‌نامه، به این شرح است که: در فصل اول، به بیان مقدمات مالی و سپس مقدمات ریاضی پرداخته و در فصل دوم با شروع از مدل بلک– شولز در نهایت، معادله بلک– شولز را بدست می آوریم. فصل سوم را به معرفی دقیق اختیار آمریکایی و انواع روش‌های متداول در قیمت‌گذاری آن، به خصوص رهیافت‌های مرز آزاد و دوجمله‌ای اختصاص داده‌ایم.در ضمن، این فصل شامل انواع تغییر متغیرهای رایج بر معادله بلک–شولز می‌باشد. فصل چهارم که در واقع ورود به بحث اصلی ما است، به معرفی یکی از روش‌های ارائه شرایط مرزی مصنوعی برای اختیار آمریکایی بر اساس قضایای دوهامل اختصاص دارد. این فصل، عملاً بر پایه مقاله مشهور و کاربردی هان و وو [۳۹] است. فصل پنجم، به ارائه سه دسته متفاوت از بهبودها بر روش شرایط مرزی مصنوعی اختصاص دارد. این سه نوع بهبود، بر استفاده از دو ابزار مهم و کلاسیک بنا شده است. اولی، استفاده از خانواده چندجمله‌ای‌های متعامد در تقریب توابع مجهول و دیگری بهره گرفتن از بسط تیلور در حذف عامل تکینگی در شرایط مرزی مصنوعی است. این فصل در واقع، کار اصلی ما بوده و نتایج حاصله بر تأثیر

[۲۱] Lattice Methods
[۲۲] Binomail Method
[۲۳] Monte Carlo Method
[۲۴] Finite Element Method
[۲۵] Finite Difference Method
[۲٦] Infinite or Unbounded Domain

این بهبودها، مُهر تأیید می‌زند. قسمتی از بخش اول این فصل، به صورت سخنرانی در چهارمین کنفرانس بین‌المللی آنالیز عددی ایران در زاهدان توسط اینجانب ارائه گردیده است. همچنین بخش اول و سوم این فصل، در کنفرانس بین‌المللی آنالیز عددی یونان در چانیا[۲۷] به صورت سخنرانی توسط استادم آقای دکتر باستانی ارائه شده است. این کنفرانس توسط مجله ISI، ریاضیات عددی کاربردی[۲۸] حمایت می‌شد که مقاله ما در دست داوری برای چاپ قرار دارد [۷]. بخش دوم این فصل، بر پایه تقریبات شبه طیفی لژاندر در مرحله پیش‌چاپ زیر نظر اساتید راهنمایم قرار دارد. فصل آخر این پایان‌نامه، به ارائه یکی از کاراترین روش‌های بدون شبکه[۲۹]، یعنی روش توابع پایه‌ای شعاعی اختصاص دارد. این فصل، حاصل کار مشترک بنده و دوست عزیزم آقای وحید فرهنگی، زیر نظر آقای دکتر باستانی بوده و با توجه به نتایج مطلوب حاصله، در مرحله آماده‌سازی برای ارائه مقاله قرار دارد.

امید است که این تحقیق، راه‌گشای خواننده علاقه‌مند به مبحث «معرفی شرایط مرزی مصنوعی» بوده و در این مسیر، مفید فایده واقع شود.

سیّدمحمّدمهدی کاظمی

شهریور ۱۳۸۹

زنجان

---

[۲۷] NumAn 2010 Conference, Chania

[۲۸] Juornal of Applied Numerical Mthematics

[۲۹] Meshless Methods

فصل اول

مقدمات

در این فصل، به بیان مطالبی می‌پردازیم که پیش‌نیاز خواننده در طول مطالعه این پایان‌نامه است. از عنوان پایان‌نامه بر می‌آید که پژوهش ما در حیطه ریاضیات مالی است، پس در دو بخش به ترتیب، مقدمات مالی و سپس مقدمات ریاضی را ارائه می‌نماییم.

۱.۱ مقدمات مالی

در ادبیات مالی، ابزاری که قیمت آن وابسته و یا مشتق شده از قیمت دارایی[۱]های دیگر است را **کالای مشتق**[۲] می‌نامند. ساده‌ترین و مهم‌ترین مثال از کالای مشتق، اختیارها هستند.

[۱] Asset

[۲] Derivative Security

۱.۱.۱ اختیار

قراردادی که به دارنده آن حق (اما نه الزام) خریدن یا فروختن دارایی ریسکی، با قیمت ثابت از پیش تعیین‌شده E در دوره زمانی مشخص T را می‌دهد، اختیار می‌نامند. به دارایی ریسکی مذکور، دارایی تحت قرارداد [۳] گویند. دارایی تحت قرارداد معمولاً سهم [۴] یا بخشی از سهام یک کمپانی، پول رایج [۵]، شاخص‌های سهام [۶] و یا کالاهای ارزشمند [۷] مانند طلا و نفت است. قیمت معین در قرارداد را قیمت اجرا [۸] و یا قیمت توافقی [۹] و همچنین زمان مذکور در قرارداد را زمان انقضا [۱۰] و یا زمان سررسید [۱۱] گویند.

در واقع یک اختیار، قراردادی مابین دو بخش است که برای تجارت دارایی خاص در زمانی معین در آینده استفاده می‌شود. به یک طرف این قرارداد، نویسنده [۱۲] و طرف دیگر را نگهدارنده [۱۳] گویند. نویسنده که اغلب یک بانک است، شرایط قرارداد اختیار را تنظیم کرده و آن را می‌فروشد. اما از سوی دیگر نگهدارنده کسی است که با پرداختن قیمت بازار که به آن پیش‌پرداخت [۱۴] گویند اختیار را خریداری می‌نماید. نگهدارنده باید تصمیم بگیرد که از حق خریداری شده خود چگونه استفاده کند. این تصمیم‌گیری ارتباط نزدیک با قیمت بازار و نوع اختیار دارد. مسئله اصلی در این پایان‌نامه، تعیین قیمتی منصفانه برای اختیار است. نوعی از اختیار که در این پژوهش بدان می‌پردازیم اختیارهای استاندارد [۱۵] هستند. تعدادی دیگر از انواع اختیار مانند اختیار آسیایی [۱۶] و یا

---

۳ Underlying Asset
۴ Stock
۵ Currency
۶ Stock Indices
۷ Commodity
۸ Exercise Price
۹ Strike Price
۱۰ Expiration Date
۱۱ Maturity Date
۱۲ Writer
۱۳ Holder
۱۴ Premium
۱۵ Standard Options, also knwon as Vanilla Options
۱۶ Asian Option

ابدی[17] را که در خانواده اختیارهای غیرمتعارف[18] قرار می‌گیرند، می‌توانید در مراجع [۶۲، ۶۸] مطالعه نمایید.

پیش از این، زمان انقضا را معرفی کردیم، اکنون تاثیر زمان بر اختیار را بیان می‌کنیم. از زمان خریداری اختیار تا زمان سر رسید آن را طول عمر[19] اختیار گویند. پس از پایان طول عمر، حقوق نگهدارنده منقضی شده و اختیار برای زمان‌های $t > T$ بی‌ارزش می‌شود.

اختیارهای استاندارد بر دو نوع می‌باشند که در زیر به معرفی آن‌ها می‌پردازیم.

تعریف ۱.۱.۱ (اختیار خرید[20]). قراردادی که به نگهدارنده خود حق خرید دارایی تحت قرارداد را به قیمت توافقی E، تا زمان T می‌دهد، اختیار خرید می‌نامند.

تعریف ۲.۱.۱ (اختیار فروش[21]). قراردادی که به نگهدارنده خود حق فروش دارایی تحت قرارداد را به قیمت توافقی E، تا زمان T می‌دهد، اختیار فروش می‌نامند.

در مجموع، نگهدارنده در زمان t یکی از انتخاب‌های زیر را دارد:

- فروختن اختیار به قیمت رایج بازار و یا معاوضه آن با اختیارهای دیگر،
- نگهداشتن اختیار و اجرا نکردن آن،
- اجرا کردن اختیار در زمان $t \leq T$،
- اجازه منقضی و در نتیجه بی‌ارزش شدن اختیار برای $t \geq T$.

در مواردی که انتخاب نگهدارنده اجرای اختیار باشد، وظیفه نویسنده تحویل دادن و یا خریدن دارایی به قیمت E است. ملاحظه می‌شود که موقعیت‌های نگهدارنده اختیار و نویسنده آن، با هم متفاوتند. نویسنده با انتشار و فروش تعداد قابل توجهی از اختیارها و جمع آوری مبالغ حاصل از فروش اختیار، سعی در جبران خسارت

[17] Perpetual Option
[18] Exotic Options
[19] Life Time
[20] Call Option
[21] Put Option

احتمالی حاصل از اجرای اختیارها دارد که به وضوح وضعیت ریسکی حاکم بر مسئله را شفاف می‌سازد. اهمیت قیمت‌گذاری منصفانه اختیار در همین استراتژی نویسنده و همچنین پرهیز از ضرر حتمی برای نگهدارنده می‌باشد. در این راستا، در همین مقدمه با مفهوم جالب و حساس اصل عدم آربیتراژ[۲۲] آشنا می‌شویم.

همه انواع اختیارهای استاندارد، از نظر شرایط اجرا نسبت به زمان سررسید یکسان نیستند. بر این اساس اختیارهای استاندارد به دو دسته اروپایی و آمریکایی تقسیم می‌شوند که این نام‌گذاری ارتباطی به منطقه جغرافیایی نداشته و این دو نوع در هر دوی این قاره‌ها معامله می‌شوند. برای مثال اختیارهایی که مورد معامله آن‌ها سهام است، اکثراً از نوع آمریکایی هستند. در زیر به ارائه تعریف این دو نوع مهم از اختیارها می‌پردازیم:

تعریف ۳.۱.۱ (اختیار اروپایی[۲۳]). قراردادی که به نگهدارنده خود حق خرید (فروش) دارایی تحت قرارداد را به قیمت توافقی E، **دقیقاً** در زمان سررسید T می‌دهد، اختیار خرید (فروش) اروپایی می‌نامند.

نکته‌ای که شاید بتوان درباره این دو نوع از نام‌گذاری توضیح داد، این است که به طور کلی مردم آمریکا به دنبال آزادی، اختیار و رفاه بیشتری در امور اجتماعی خود هستند و تعریف زیر روشن می‌سازد که اختیار آمریکایی، قراردادی همراه با آزادی عمل بیشتری در اجرا، نسبت به مشابه اروپایی خود است.

تعریف ۴.۱.۱ (اختیار آمریکایی[۲۴]). قراردادی که به نگهدارنده خود حق خرید (فروش) دارایی تحت قرارداد را به قیمت توافقی E، در زمان دلخواه t که $0 \leq t \leq T$ می‌دهد، اختیار خرید (فروش) آمریکایی می‌نامند.

در این قسمت به معرفی نمادهای ریاضی معمول در بحث بالا که در طول این پایان‌نامه آشنایی با آن‌ها ضروری است، می‌پردازیم. قیمت اختیار را معمولاً با نماد V نشان می‌دهیم.[۲۵] برای تشخیص نوع اختیار از لحاظ خرید، فروش، اروپایی و یا آمریکایی بودن اختیار، از اندیس‌هایی مناسب استفاده می‌شود. برای مثال، اختیار فروش آمریکایی را با نماد V_P^{Amer} و یا اختیار خرید اروپایی را با نماد V_C^{Euro} نشان می‌دهیم. چون دارایی

---

[۲۲] No-Arbitrage Principle

[۲۳] European Option

[۲۴] American Option

[۲۵] معرف کلمه انگلیسی $Value$ است.

تحت قرارداد معمولاً سهام‌ها هستند، قیمت هر واحد از آن را با نماد S نشان می‌دهیم.[۲۶] از طرف دیگر، قیمت دارایی یا سهام تحت قرارداد در بازار وابسته به زمان t است که این وابستگی را با نمادهای S_t یا $S(t)$ نمایش می‌دهیم. در نهایت قیمت اختیار، ارتباط نزدیکی با قیمت دارایی S و زمان باقی‌مانده تا سررسید یعنی $T-t$ دارد، پس نماد $V(S,t)$، مناسب قیمت اختیار است.

در ادامه می‌بینیم که تعیین و محاسبه قیمت منصفانه اختیار برای زمان $t < T$ کار آسانی نیست، اما برعکس قیمت‌گذاری منصفانه اختیار در زمان سررسید $t = T$ آسان است. این موضوع را از دید شخصِ نگهدارنده بررسی می‌نماییم.

۲.۱.۱ تابع بازده

نگهدارنده اختیار خرید اروپایی در زمان $t = T$ را در نظر بگیرید. این شخص برای تهیه دارایی تحت قرارداد که اکنون قیمت آن در بازار $S = S_T$ است، دو راه در پیش دارد:

- دارایی را به قیمت S از بازار خریداری نماید،
- آن را با اجرای اختیار به قیمت توافقی E تهیه نماید.

این تصمیم‌گیری در زمان $t = T$ آسان است زیرا بهترین خرید برای خریدار روی یک کالای مشترک، ارزان‌ترین خرید است (یعنی: $\min\{S_T, E\} =$ تصمیم).

هر گاه نگهدارنده تصمیم دوم را اتخاذ کند و دارایی را به قیمت E که کمتر از S می‌باشد خریداری کند، فوراً آن را در بازار به قیمت S فروخته و $S - E$ سهم از دارایی را دوباره تهیه می‌نماید. در این وضعیت، قیمت اختیار باید برابر $V = S - E$ باشد. اما اگر نگهدارنده گزینه اول را انتخاب کند، به وضوح اختیار بی‌ارزش شده و قیمت آن برابر $V = ۰$ می‌شود. در مجموع برای قیمت اختیار خرید در زمان سررسید داریم:

$$V(S_T,T) = \begin{cases} 0 \qquad , & S_T \leq E \quad \text{(اختیار بی‌ارزش است)} \\ S_T - E\,, & S_T > E \quad \text{(اختیار اجرا شده است)} \end{cases}$$

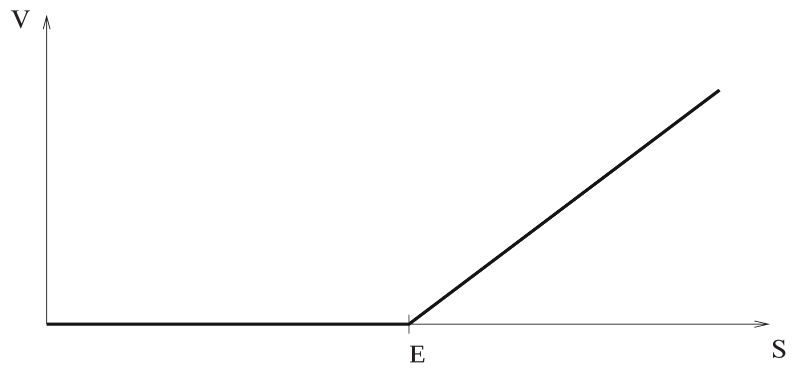
[۲۶] معرف کلمه انگلیسی $Stock$ است.

و لذا

$$V(S_T, T) = \max\{S_T - E, 0\}, \qquad (۱)$$

برای هر $S_t \geq 0$ که $0 \leq t \leq T$[۲۷]، رابطه $\max\{S_t, t\}$ یک تابع است که به آن تابع بازده[۲۸] گویند. تابع بازده اختیار خرید اروپایی در شکل ۱−۱ نمایش داده شده است.

به شکل مشابه برای اختیار فروش اروپایی حالت اجرا زمانی رخ می‌دهد که $S < E$ باشد و بنابراین تابع بازده



شکل ۱−۱. تابع بازده اختیار خرید

آن به صورت زیر است:

$$V(S_T, T) = \begin{cases} E - S_T\ , & S_T < E \ \text{(اختیار اجرا شده است)} \\ 0\ , & S_T \geq E \ \text{(اختیار بی‌ارزش است)} \end{cases}$$

لذا داریم:

$$V(S_T, T) = \max\{E - S_T, 0\}. \qquad (۲)$$

تابع بازده اختیار فروش اروپایی را با شکل ۱−۲ مقایسه کنید. شکل‌های ۱−۱ و ۱−۲، از منظر نگهدارنده است. اما سئوال اینجاست، نمودار سود برای نگهدارنده چگونه است؟ قبل از پاسخ به این سئوال، تعریف زیر را ارائه می‌کنیم.

---

[۲۷] اگر S_t را یک فرآیند تصادفی فرض کنیم، در مورد اختیارهای استاندارد وابستگی S_t در تابع بازده به فقط یک زمان حاضر است اما در مورد اختیارهای غیر بومی وابستگی آن به کل مسیر S_t می‌باشد.

[۲۸] Payyoff Function