Theoretische Physik 1b: Mechanik
Übungsblatt 7

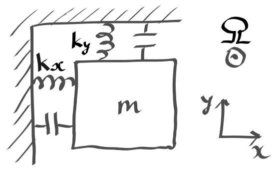
Prof. Dr. Frank Wilhelm-Mauch
Dr. Michael Marthaler
Andrii Sokolov, M.Sc.

SS 2018 **Abgabe 28.05.2018**

Info: *Bitte schreiben Sie Name und Ihre Übungsgruppe auf das Übungsblatt und tackern Sie dieses. Sie dürfen in Gruppen von bis zu drei Personen abgeben.*

Aufgabe 1: Gyroscope (*10 Punkte*)

Wir betrachten ein vereinfachtes Model eines Gyroscopes wie es in der Abbildung gezeigt wird. Solche Gyroscope werden in Autos, Hoverboards und Quadrocoptern verwendet. Die größen k_x und k_y die in der Abbildung gezeigt werden, sind die Federkonstanten der jeweiligen Feder. Die Bewegung der Masse m in y-Richtung with mit der Kraft $-2\alpha\dot{y}$ gedämpft. Kondensorartige Elemente repräsentieren die Kontroll- und Messgeräte. Der Schwerpunkt der Masse wird in x-Richtung moduliert und bewegt sich wie $x = x_0 \sin \omega t$. Die y-Komponente der Schwerpunktskoordinate kann elektrisch Ausgelesen werden.



(a) Machen Sie einen Vorschlag, wie die Winkelgeschwindigkeit Ω mit der das Gyrocope rotiert, gemessen werden kann. Bestimmen Sie $y(t)$. Vernachlässigen Sie das Einschwingverhalten in ihrer Lösung. D.h. Sie sollen Zeiten betrachten für die gilt $t \gg \gamma^{-1}$, mit $\gamma = \alpha/m$. (*4 Punkte*)

(b) Welche Frequenz ω maximiert die y-Amplitude? (*2 Punkte*)

(c) Kommerziele Gyroscope können Winkelgeschwindigkeit in der Größenordnung $0.5\,°/\text{sec}$ messen. Wir betrachten ein Auto, dass sich mit $60\,\text{km/h}$ bewegt. Berechnen Sie den maximalen Radius einer Kurve, die von einem Gyroscope noch detektiert werden kann. (*1 Punkt*)

(d) Nehmen Sie das vorhergegangene Beispiel und berechnen Sie die Änderung in y die detektiert werde muss um eine Beschleunigung festzustellen. Benutzen Sie die Parameter $x_0 = 1\,\mu\text{m}$ und $\gamma = \alpha/m = 2\pi\, 0.1\,\text{Hz}$. (*3 Punkte*)

Aufgabe 2: Foucault-Pendel (*10 Punkte*)

Die Rotation der Erde lässt sich sehr überzeugend mit dem Foucault-Pendel beweisen. Das Foucault-Pendel hat eine schwere Masse (z.B. $m = 30\,\text{kg}$) und einen langen Pendelfaden (z.B. $l = 50\,\text{m}$). Seine Schwingungen können wegen der relativ großen Energie länger als 24 h anhalten. Wir wollen nun berechnen, wie die Erdrotation die Schwingungsebene des Pendels langsam dreht. Sie verwenden x und y als generalisierte Koordinaten des Problems (siehe Abb. 1).

(a) Transformieren Sie mithilfe der Relation $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}$ in das rotierende Bezugssystem. (*2 Punkte*)

(b) Wie groß ist die potentielle Energie des Pendels? Geben Sie diese auch in der Näherung kleiner Ausschläge an. (*2 Punkte*)

(c) Geben Sie die Lagrangefunktion an, wobei Sie Terme der Ordnung ω^2 vernachlässigen. (*3 Punkte*)

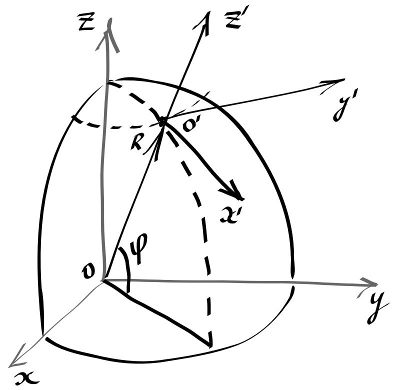


Abbildung 1: Das bewegte System (x', y', z') ist fest mit der Erde verbunden; x' zeigt nach Süden, y' nach Osten und z' nach oben.

(d) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf und lösen Sie diese ebenfalls unter der Annahme, dass Terme der Ordnung ω^2 vernachlässigt werden.

Hinweis: Es kann nützlich sein, in ein System zu wechseln, das mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega_z = \omega \sin(\varphi)$ zum erdfesten System x, y rotiert. (*3 Punkte*)

Aufgabe 3: Eine Perle, die sich auf einem kreisförmigen Draht bewegt (*10 Punkte*)

Wir betrachten eine Perle die sich mit der Gewschwindigkeit v auf einem glatten kreisförmigen Draht mit dem Radius r bewegt.

(a) Schreiben Sie die Lagrange-Funktion der Perle in kartesischen Koordinaten. Berücksichtigen Sie die Zwangsbedingungen die sich durch den Draht ergeben, indem Sie die Lagrange-Multiplikatormethode verwenden. (*2 Punkte*)

(b) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen. (*2 Punkte*)

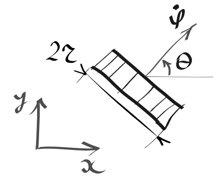
(c) Lösen Sie die Bewegungsgleichungen. Beachten Sie dabei, dass die Perle die Gewschwindigkeit v hat. (*4 Punkte*)

(d) Berechnen Sie die Kraft, die durch die Bewegung der Perle auf den Draht ausgeübt wird. Verwenden Sie dazu den Ausdruck für den Lagrange-Multiplikator. (*2 Punkte*)

Aufgabe 4: Nicht holonome Beschränkungen (*10 Punkte*)

(a) Betrachten Sie einen Schlittschuh mit einer halbrunden Klinge. Der Schlittschuh kann sich um den Punkt drehen, an dem er das Eis berührt. Der Schlittschuh bewegt sich jedoch nur entlang der Richtung seiner Klinge. Finden Sie Zwangsbedinungen die diese Situation beschreiben. (*4 Punkte*)

(b) Betrachten Sie ein Zahnrad, das auf einer rauen Oberfläche rollt, wie in der Abbildung dargestellt. Zahnradradius ist r. Das Zahnrad kann nur in Richtung seiner Achse gleiten. Finden Sie Zwangsbedinungen die diese Situation beschreiben.



(*4 Punkte*)

(c) Wieviele Freiheitsgrade hat das Zahnrad? (*2 Punkte*)