수학(가형)

1. 정답 : ④
   해설 :

$${}_8P_2 = 8\times 7 = 56$$

2. 정답 : ④
   해설 :

3. 정답 : ③
   해설 :

$$f'(\chi) = 3e^{3\chi-2}$$
$$f'(1) = 3e$$

4. 정답 : ②
   해설 :

$$\begin{aligned} P(A^C\cup B) &= P(A^C)+P(B)-P(A^C\cap B) \\ &= P(A^C)+P(B)-P(B-A) \\ &= P(A^C)+P(B)-P(B)+P(A\cap B) \\ &= \frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12} \end{aligned}$$

5. 정답 : ③
   해설 :

초점과 원점사이의 거리는 $3\sqrt{6}$ 이고 $a^2+36 = (3\sqrt{6})^2$ 이 성립된다.
$a^2 = 18$이다.

6. 정답 : ①
   해설 :

$$준식 = \lim_{h\to 0}\frac{f(\pi+h)-f(\pi)-f(\pi+h)+f(\pi)}{h}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{h\to 0}\frac{f(\pi+h)-f(\pi)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(\pi-h)-f(\pi)}{-h} \\ &= 2f'(\pi) \end{aligned}$$

$$f'(x) = 2(\sec 2x)^2+3\cos x$$
$$\begin{aligned} f'(\pi) &= 2(\sec 2\pi)^2+3\cos\pi \\ &= 2-3=-1 \end{aligned}$$

7. 정답 : ④

해설 :

$$\frac{3^3}{3^{2x}} \geq 3^{x-9}$$
$$3^{3-2x} \geq 3^{x-9}$$
$$3-2x \geq x-9$$
$$x \leq 4$$

8. 정답 : ③

해설 :

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} |\sin 2x|+1dx = 4\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin 2x+1)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{2}\cos 2x+x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=-\frac{1}{2}\cos\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}$$
$$=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$$

그러므로 정답은 $4(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2})=\pi+2$

9. 정답 : ①

해설 : $e^x-e^y=y$위의 점$(a,\ b)$; $e^a-e^b=b$ …①

미분하면

$e^x-y'e^y=y'$에서 점$(a,\ b)$에서의

접선의 기울기

$$y'_{\substack{x=a\\y=b}}=\frac{e^a}{e^b+1}=1 \ \cdots ②$$

①과 ②을 연립하면

$a=\ln(e+1),\quad b=1$

$\therefore\ a+b=1+\ln(e+1)$

10. 정답 : ⑤

해설 :

전체의 경우의 수는 ${}_9C_3$

3명모두 A조 ${}_5C_3$

3명모두 B조 ${}_4C_3$

A와 B에서 적어도 1명씩 선택이므로

여사건을 이용하면

$$1-\frac{{}_5C_3+{}_4C_3}{{}_9C_3}=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$

11. 정답 : ②

해설 :

$\int_{1}^{\sqrt{2}} x^3\sqrt{x^2-1}\,dx$에서

$\sqrt{x^2-1}=t$로 치환하여 양변을 제곱하면

$x^2-1=t^2$ 양변을 미분하면

$2xdx=2tdt$

$\int_{0}^{1}(t^2+1)t^2dt=\left[\frac{1}{5}t^5+\frac{1}{3}t^3\right]=\frac{8}{15}$

12. 정답 : ⑤

해설 :

$y=\frac{1}{8}e^{2x}+\frac{1}{2}e^{-2x}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{4}e^{2x}-e^{-2x}$

$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\frac{1}{16}e^{4x}+e^{-4x}-\frac{1}{2}$

곡선의 길이는

$\int_{0}^{\ln 2}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$

$\int_{0}^{\ln 2}\sqrt{\frac{1}{16}e^{4x}+e^{-4x}+\frac{1}{2}}\,dx$

$\int_{0}^{\ln 2}\left(\frac{1}{4}e^{2x}+e^{-2x}\right)dx$

$\left[\frac{1}{8}e^{2x}-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_{0}^{\ln 2}=\frac{3}{4}$

13. 정답 : ②

해설 :

$x=2t-\cos t,\quad y=4-\sin t$

$x'=2+\sin t,\quad y'=-\cos t$

$x''=\cos t,\quad y''=\sin t$

$t=\alpha$에서의

$\vec{v}=(2+\sin\alpha,\ -\cos\alpha)$

$\vec{a}=(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$

$\vec{v}\cdot\vec{a}=2\cos\alpha+\sin\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\cos\alpha=1$

$\cos\alpha=\frac{1}{2}$

$\therefore\ \alpha=\frac{\pi}{3}$

14. 정답 : ②

해설 :

$y=\log_2 x$, $y=-\log_2(8-x)$의 두 교점을 $A(k, \log_2 k)$, $B(k, -\log_2(8-k))$라 두면

$\overline{AB}=2$ 이므로

$\left|\log_2 k-(-\log_2(80-k))\right|=2$

$\left|\log_2 k(8-k)\right|=2$

$\log_2 k(8-k)=2$ 또는 -2

ⅰ) $\log_2 k(8-k)=2$ 인 경우

$k(8-k)=4$

$k^2-8k+4=0$

따라서 두근의 곱은 4이다

ⅱ) $\log_2 k(8-k)=-2$ 인 경우

$k(8-k)=\frac{1}{4}$

$k^2-8k+\frac{1}{4}=0$

따라서 두근의 곱은 $\frac{1}{4}$ 이다

모든 근의 곱은 $4\times\frac{1}{4}=1$ 이다.

15. 정답 : ⑤

해설 :

$f(x)=a\cos(\pi x^2)$

$\lim_{x\to 0}\left\{\frac{x^2+1}{x}\int_1^{x+1}f(t)\,dt\right\}=3$

$\lim_{x\to 0}\frac{(x^2-1)\{F(x+1)-F(1)\}}{x}=3$

분모와 분자를 미분한 다음 $x=0$을 대입 하면(로피탈의 정리 이용)

$f(1)=3 \quad \because\ F'(x)=f(x)$

$f(1)=a\cos\pi=3$

$\therefore a=-3$

$f(x)=-3\cos\pi x^2$ 에서

$f(-3)=-3\cos 9\pi$

$=-3\cos\pi$

$=3$

16. 정답 : ①

해설 :

선분 $\overline{OP}$와 선분 $\overline{QH}$는 직각삼각형 닮음의 성질에 의해 직각이므로

삼각형 넓이 $S(\theta)$

$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{QH}\times\overline{OM}$를 이용하여 구할수 있다.

$\overline{QH}$와 $\overline{OP}$가 만나는 점을 M이라 두면

$\overline{QH}$는 $\overline{QM}+\overline{MH}$이고 $\overline{QM}=\sqrt{1-\cos^4\theta}$, $\overline{MH}=\sin\theta\times\cos\theta$

$\overline{OM}=\cos^2\theta$이므로

$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\cos^2\theta\times(\sin\theta\cdot\cos\theta+\sqrt{1-\cos^4\theta})$

따라서 $\lim_{\theta\to0^+}\frac{S(\theta)}{\theta}=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$이다.

17. 정답 : ①

해설 :

$\angle OCF=\alpha$, $\angle BFC=\alpha$ ($\because \triangle BCF$ 이등변삼각형)

$\angle OBF=2\alpha$ 가 된다.

$\overline{CB}=a$, $\overline{BO}=b$, $\overline{OF}=c$ 라 두면

$\tan\alpha=\frac{1}{4}=\frac{c}{a+b}$ 이고

$\tan2\alpha=\frac{c}{b}=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{16}}$ 이 식을 정리하면

$\frac{c}{b}=\frac{8}{15}$

$\therefore c=\frac{8}{15}b$

$\frac{1}{4}=\frac{c}{a+b}$ 에 대입하면

$\frac{1}{4}=\frac{\frac{8}{15}b}{a+b}$ 이 식을 정리하면 $a=\frac{17}{15}b$

$\therefore \frac{a}{b}=\frac{17}{15}$ 이다.

$$\tan(\theta+\alpha) = \frac{a}{a+b} = \frac{a}{a+\frac{15}{17}a} = \frac{1}{\frac{32}{17}} = \frac{17}{32}$$

$\tan\theta = x$ 라 두면

$\dfrac{\frac{1}{4}+x}{1-\frac{1}{4}x} = \dfrac{1+4x}{4-x} = \dfrac{17}{32}$ 이 식을 정리 하면

$145x = 36$

$\therefore x = \dfrac{36}{145}$

18. 정답 : ④

해설 :

$\triangle ABC = \dfrac{1}{2}\times 8 \times |m\cos\dfrac{n\pi}{3}| < 12$ 일 확률

$|m\cos\dfrac{n\pi}{3}| < 3$

$\therefore -3 < m\cos\dfrac{n\pi}{3} < 3$

①$m=1$일 때, $-3 < \cos\dfrac{n\pi}{3} < 3$이므로

$n = 1 \sim 6 \quad \therefore 6$가지

②$m=2$일 때, $-\dfrac{3}{2} < \cos\dfrac{n\pi}{3} < \dfrac{3}{2}$이므로

$n = 1 \sim 6 \quad \therefore 6$가지

③$m=3$일 때, $-1 < \cos\dfrac{n\pi}{3} < 1$이므로

$n = 1, 2, 4, 5 \quad \therefore 4$가지

④$m=4$일 때, $-\dfrac{3}{4} < \cos\dfrac{n\pi}{3} < \dfrac{3}{4}$ 이므로

$n = 1, 2, 4, 5 \quad \therefore 4$가지

⑤$m=5$일 때, $-\dfrac{3}{5} < \cos\dfrac{n\pi}{3} < \dfrac{3}{5}$ 이므로

$n = 1, 2, 4, 5 \quad \therefore 4$가지

⑥$m=6$일 때, $-\dfrac{1}{2} < \cos\dfrac{n\pi}{3} < \dfrac{1}{2}$ 이므로

$\therefore 0$가지

따라서 확률은 $\dfrac{6+6+4+4+4+0}{36} = \dfrac{24}{36} = \dfrac{2}{3}$

정답은 ④

19. 정답 : ③

해설 :

$\lim_{p \to k+} f(p) > f(k)$을 만족시키는 p의 값 $= k$인데

$x^2 = 2y$와 $(y+\frac{1}{2})^2 = 4px$와의 위치관계가 접할 때

위의 부등식이 성립되는 p의 값이므로

접할 때의 p의 값을 구해준 게 k가 된다.

접점의 x좌표를 $'t'$라고 두면 y좌표와 미분계수가 같음을 이용!

$x^2 = 2y \rightarrow \frac{dy}{dx} = x$

$(y+\frac{1}{2})^2 = 4px \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{4p}{2(y+1)}$에서

접점에서의 미분계수는 $t = \frac{4p}{t^2+1}$로서 같다.

접점의 y좌표는 같으므로 $\frac{t^2}{2} = -\frac{1}{2} \pm 2\sqrt{pt}$

$t^2+1 = 4\sqrt{pt}$이다.

$\therefore t = \frac{4p}{4\sqrt{pt}}$이므로 $p = t^3$이다.

부등식을 만족시키는 t의 값 $= -\frac{\sqrt{3}}{3}$이다.

$\therefore p = -\frac{\sqrt{3}}{9}$

답은 ③

20. 정답 : ③

해설 :

① $c = 2k_1$ $d = 2k_2$ 인경우

$2a + 2d + 2k_1 + 2k_2 = 2n$에서

$a + d + k_1 + k_2 = n$

$\therefore 4Hn = n + 3C_n = n + 3C_3$

$(\text{가}) = n + C_3 = f(n)$

② $c = 2k_3 + 1, d = 2k_4 + 1$ 인경우

$2a + 2b + 2k_3 + 1 + 2k_4 + 1 = 2n$에서

$a + b + k_3 + k_4 = n - 1$

$\therefore 4H_{n-1} = n + 2C_{n-1} = n + 2C_3$

$(\text{나}) = n + 2C_3 = g(n)$

$\sum_{n=1}^{8} \alpha n = \sum_{n=1}^{8} (n + 3C_3 + n + 2C_3) = 824$

$(\text{다}) = 824$

$\therefore f(6) + g(5) + r = 84 + 35 + 824 = 943$

21. 정답 : ④
해설 :
주어진 조건에 따라 함수 $f(x)$의 그래프 개형을 그리고 각 구간에 따라 $g(t)$함수의 그래프를 그려보면 $g(t)$함수는 $g(t)=1,2,3,4$가 되는 각각의 t값에서 불연속점을 가진다, 각각의 불연속 점을 $h(x)$함수와 합성하여 생기는 $(h\circ g)(t)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되려면 각각의 불연속 점은 사차함수 $h(x)$의 근이 되어야 하므로 최고차항이 1인 사차함수 $h(x)$는 $h(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$이다.
그리고 $g(\frac{\sqrt{2}}{2})=1,\ g(0)=2,\ g(-1)=3$ 이므로 $a=1,b=2,c=3$이다
따라서 $h(6)-h(5)+3=120-24+3=99$
이므로 정답은 99이다.

22. 정답 : 14
해설 :
$\vec{a}=(2,4),\vec{b}=(1,3)$일 때 $\vec{a}+2\vec{b}=(2,4)+(2,6)=(4,10)$
이므로 모든 성분의 합은 14이다.

23. 정답 : 49
해설 :
$\cos\theta=\frac{1}{7}$일 때, $\frac{1}{\cos\theta}=\sec\theta=7$ 이므로
$\sec^2\theta=49$이다.

24. 정답 : 3
해설 :
자연수 11을 홀수인 자연수로 분할할 때, 자연수 3이 두 개 이상 포함 되려면
11=3+3+5의 형태가 되어야 하므로
5를 홀수인 자연수로 분할 하는 경우와 같아 진다.
자연수 5를 홀수로 분할 하는 경우는
5=1+1+1+1+1=1+1+3 인 3가지 경우가 존재하므로
방법의 수는 3이다.

25. 정답 : 17
해설 :
$$\lim_{x\to 3}\frac{x-1}{g(x)-g(3)}=\frac{1}{g^1(3)}$$
$f^{-1}(x)=g(x)$ 이므로 $g(3)=0\quad f(0)=3$ 이다.
$$g'(3)=\frac{1}{f'(g(3))}=\frac{1}{f'(0)}$$
$$f(x)=3e^{5x}+x+\sin x$$
$$f'(x)=15e^{5x}+1+\sin x$$
$$f'(x)=17$$
$$g'(3)=\frac{1}{17}$$
$\therefore\ \frac{1}{g'(3)}=17$ 정답 17

26. 정답 : 96

해설 :

점$(2,a)$가 $f_{(x)}=\dfrac{2}{x^2+b}(b>0)$으 변추점이므로

$f(2)=a$이고 $f''(2)=0$이다.

$\dfrac{2}{4+b}=a-$ ①번식

$f'_{(x)}=\dfrac{-4x}{(x^2+b)^2}$ $\quad f''_{(x)}=\dfrac{-4(x^2+b)^2+16x^2(x^2+b)}{(x^2+b)^4}$

$$f''_{(x)}=\frac{-4(x^2+b)+16x^2}{(x^2+b)^3}$$

분자: $-4(4+b)+64=0$

$b+4=16 \quad b=12 \quad a=\dfrac{1}{8}$

$\therefore \dfrac{b}{a}=96$

27. 정답 :

해설 :

a,b,c를 중복 허락하여 4개를 나열할 때 a가 2번 이상 나오는 경우는

a a b b
a a c c $\rightarrow$ $\dfrac{4!}{2!2!}\times 2=12$

a a b c $\quad \dfrac{4!}{2!}=12$

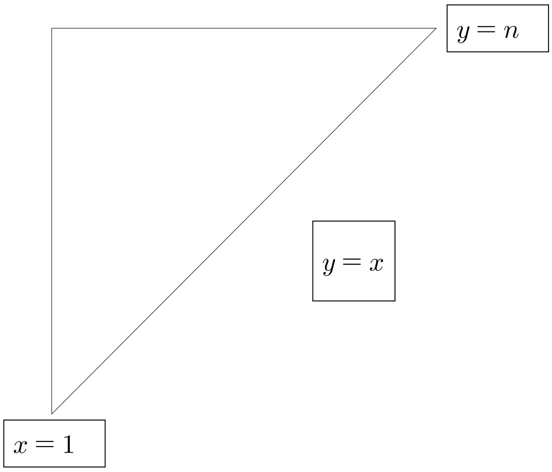
a a a b
a a a c $\rightarrow$ $\dfrac{4!}{3!}=4\times 2=8$ $\qquad \therefore 33$

a a a a $\quad$ 1

28. 정답 : 48

해설 :

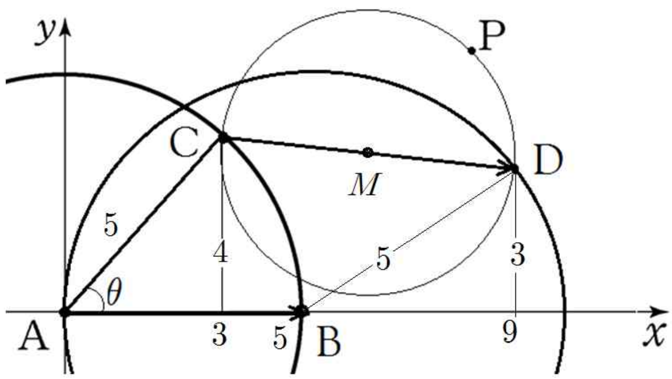
A영역에 있는 점들에 대한 조건부 확률 문제이다.
일단, 먼저 주어진 조건을 영역으로 표현하면



이와 같이 직각 삼각형 안의 자연수인 순서쌍의 점들이 A집합의 원소이고
$3k \le n \le 3k+2$ (단, k는 자연수) 라두면
A집합의 원소(a,b)중 b=3의 배수인 개수는 $3+6+\cdots+3k$ 가 되고
그때 a=b인 점의 개수는 k 가 된다. 따라서 b=3의 배수 일대 a=b일 확률은
$\dfrac{k}{3+6+\cdots+3k}=\dfrac{1}{9} \Leftrightarrow k=5$ 가 된다. 따라서 이를 만족하는 n의 범위는 $15 \le n \le 17$
$\therefore 15+16+17=48$

29. 정답 : 31

해설 :



$A(0,0)$
$B(5,0)$
$C(3,4)$
$D(9,3)$
$M(6,\dfrac{7}{2})$

$C_1 : x^2+y^2=25$, $C_2 : (x-5)^2+y^2=25$ 라고 두자.

$\cos(\angle CAB)=\dfrac{3}{5}$이면 원 C_1의 반지름이 5이므로 점 C의 좌표는 $C(3,4)$이다.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}=30$이면 $|\overrightarrow{AB}|=5$이므로 $\overrightarrow{CD}$의 x축으로의 정사영의 크기는 6이다.

따라서 점 D의 좌표는 $D(9,3)$이다.

점 C와 점 D의 중점은 $M(6,\frac{7}{2})$은 선분 CD를 지름으로 하는 원의 중심의 좌표가 된다.

$|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{37}$ 이므로 이 원의 반지름은 $\frac{\sqrt{37}}{2}$ 이다.

이 때 그 원 위의 점 P의 좌표는 점 M을 기준으로 $P\left(6+\frac{\sqrt{37}}{2}\cos\theta, \frac{7}{2}+\frac{\sqrt{37}}{2}\sin\theta\right)$.

따라서

$$\overrightarrow{PA}=\left(-6-\frac{\sqrt{37}}{2}\cos\theta,-\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{37}}{2}\sin\theta\right), \overrightarrow{PB}=\left(-1-\frac{\sqrt{37}}{2}\cos\theta,-\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{37}}{2}\sin\theta\right)$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB} &= \frac{37}{4}+\frac{73}{4}+\frac{7}{2}\sqrt{37}(\cos\theta+\sin\theta)\\ &= \frac{110}{4}+\frac{7}{2}\sqrt{74}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})\\ &\le \frac{110}{4}+\frac{7}{2}\sqrt{74}\end{aligned}$$

$$\therefore a+b=\frac{110}{4}+\frac{7}{2}=\frac{124}{4}=31$$

30. 정답 : 16

해설 :

$y=f(x)$ 의 $(t,f(t))$ 에서 접선의 방정식은 $y=f'(x)(x-t)+f(t)$ 이므로
$g(t)=f(t)-tf'(t)$ 이다.

주어진 조건 $g(t+1)-g(t)=\frac{2t}{1+t^2}$ 이고 양변을 적분하면

$G(t+1)-G(t)=\ln(1+t^2)+C$ 이고 이를 이용해서 문제를 접근 할 수 있는데,
위의 $g(t)=f(t)-tf'(t)$ 를 약간 변형하여
$g(t)=f(t)-tf'(t)+f(t)-f(t) = 2f(t)-[f(t)+tf'(t)]$ 둘 수 있고,
여기서 $f(t)+tf'(t) = [tf(t)]'$ 이다. 따라서 $g(t)=2f(t)-[tf(t)]'$ 이 된다.
여기서 양변을 t에 대해 부정적분하면 $G(t)=2F(t)-t\cdot f(t)+D$ 이 된다.

문제에서 물어보는 값이 $2f(4)+f(-4)-\int_{-4}^{4}f(x)dx$ 이고, 문제에서 제시해주고 있는 값이

$\int_0^1 f(x)dx=-\frac{\ln 10}{4}, f(1)=4+\frac{\ln 17}{8}$ 이므로 이를 이용해서 물어보는 값의 형태를 뽑아내야 한다.

여기서 $\int_0^1 f(x)dx=-\frac{\ln 10}{4} = F(1)-F(0)$ 이다.

그러므로 위에서 우리가 도출해낸 식
(가) $G(t)=2F(t)-t\cdot f(t)+D$
(나) $G(t+1)-G(t)=\ln(1+t^2)+C$ 를 이용하여 문제에 접근해야 하는데 그러기 위해선 먼저 적분 상수 C의 값부터 찾아보자. (가), (나) 식에 $t=0, t=1$ 을 대입하여
$G(1)=2F(1)-f(1)+D$

$G(0)=2F(0)+D$ 이므로 $G(1)-G(0)=2(F(1)-F(0))-f(1)$ 이고 또한, (나)식에서 $t=0$

대입하면 $G(1)-G(0)=C$ $\therefore C=-\frac{\ln 10}{2}-(4+\frac{\ln 17}{8})$ 이다.

$2f(4)+f(-4)-\int_{-4}^{4} f(x)dx$ 를 도출해내기 위해 $t=4, t=-4$ 를 (가) 식에 대입하여 빼면

$G(4)-G(-4)=2[F(4)-F(-4)]-4[f(4)-f(-4)]=2\int_{-4}^{4} f(x)dx-4[f(4)-f(-4)]$ 되고

$-\frac{1}{2}[G(4)-G(-4)]=2[f(4)-f(-4)]-\int_{-4}^{4} f(x)dx$ 가 되므로 구하고자 하는 값은

$-\frac{1}{2}[G(4)-G(-4)]$ 이 된다. 한편, $G(t+1)-G(t)=\ln(1+t^2)+C$ 이므로

$[G(4)-G(-4)]=[G(4)-G(3)]+[G(3)-G(2)]+[G(2)-G(1)]+[G(1)-G(0)]$
$+[G(0)-G(-1)]+[G(-1)-G(-2)]+[G(-2)-G(-3)]+[G(-3)-G(-4)]$

이므로 $[G(4)-G(-4)]=8C+4\ln 10+\ln 17$ 이 된다.

따라서, $\therefore C=-\frac{\ln 10}{2}-(4+\frac{\ln 17}{8})$ 이므로

$[G(4)-G(-4)]=8(-\frac{1}{2}\ln 10-4-\frac{\ln 17}{8})+4\ln 10+\ln 17=-32$

$\therefore \frac{1}{2}(-32)=16$