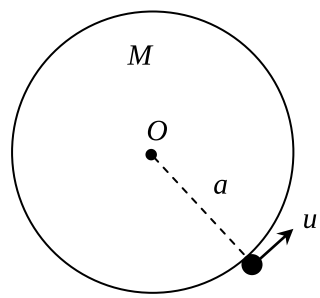
Davit Sipayung
davitsipayung@gmail.com

Soal Olimpiade Sains Tingkat Nasional 2017

Bidang Fisika SMA

Waktu : 5 jam

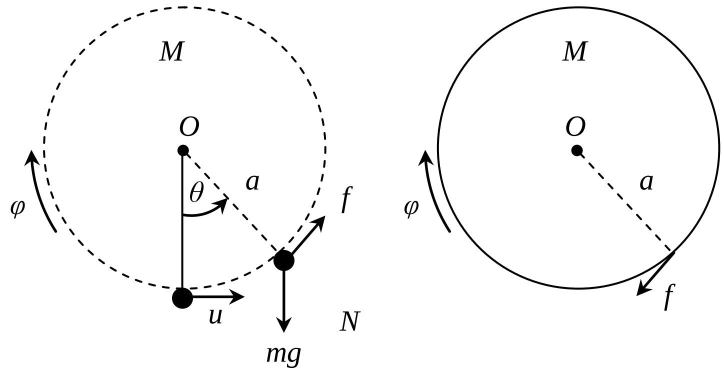
1. Sebuah piringan lingkaran (massa *M*, jari-jari *a*) digantung pada engsel/sumbu simetri mendatar tanpa gesekan yang melalui titik pusat piringan O (lihat gambar). Seekor kumbang K bermassa *m* bergerak merambat di tepian piringan dengan kelajuan konstan *u*. Piringan mula-mula dikondisikan dalam keadaan diam dahulu kemudian dilepas bersamaan dengan saat kumbang berada di titik terbawah tepian piringan. Tentukan besar minimum kelajuan *u* yang diperlukan agar kumbang akhirnya berhasil mencapai posisi tertinggi di tepian piringan tersebut.



Pembahasan:

Syarat kelajuan *u* minimum yang diperlukan agar kumbang akhirnya berhasil mencapai posisi tertinggi adalah benda diam relatif terhadap tanah ketika kumbang mencapai puncak piringan, artinya kecepatan sudut kumbang relatif terhadap tanah sama dengan nol di titik puncak.

Diagram gerak dan diagram gaya sistem :



Misalkan θ adalah sudut tempuh kumbang relatif terhdap tanah dan φ adalah sudut tempuh piringan. Hukum II Newton pada kumbang dalam arah tangensial :

$$\sum F = ma_\theta$$

$$f - mg\sin\theta = m\alpha_\theta R \quad \text{..................(1)}$$

Hukum II Newton untuk gerak rotasi piringan :

$$\sum \tau = I\alpha_\varphi$$

$$fa = \frac{1}{2}Ma^2\alpha_\varphi$$

$$f = \frac{1}{2}Ma\alpha_\varphi \quad \text{..................(2)}$$

Sudut tempuh kumbang relatif terhdap tanah:

$$\theta = \frac{ut}{a} - \varphi \;\Rightarrow\; \omega_\theta = \frac{u}{a} - \omega_\varphi \;\Rightarrow\; \alpha_\theta = -\alpha_\varphi \quad \text{..................(3)}$$

Substitusi persamaan (2) ke dalam persamaan (1) diperoleh

$$\frac{1}{2}Ma\alpha_\varphi - mg\sin\theta = m\alpha_\theta a \quad \text{..................(4)}$$

Substitusi persamaan (3) ke dalam persamaan (4) diperoleh

$$\alpha_\theta = -\frac{2mg}{(M+2m)a}\sin\theta \quad \text{..................(5)}$$

Integralkan persamaan (5) untuk mendapatkan kecepatan sudut kumbang relatif terhadap tanah sebagai fungsi θ.

$$\alpha_\theta = \omega_\theta \frac{d\omega_\theta}{d\theta} = -\frac{2mg}{(M+2m)a}\sin\theta$$

$$\frac{1}{2}\frac{d\omega_\theta^2}{d\theta} = -\frac{2mg}{(M+2m)a}\sin\theta$$

$$d\omega_\theta^2 = -\frac{4mg}{(M+2m)a}\sin\theta d\theta$$

$$\omega_\theta^2 = \int -\frac{4mg}{(M+2m)a}\sin\theta d\theta$$

$$= \frac{4mg}{(M+2m)a}\cos\theta + c \quad ....(6)$$

Jika $\theta = 0$ maka $\omega_\theta = u/a$ sehingga

$$\left(\frac{u}{a}\right)^2 = \frac{4mg}{(M+2m)a}\cos 0 + c$$

$$c = \frac{4mg}{(M+2m)a} - \frac{u^2}{a^2} \quad ....(7)$$

Jadi :

$$\omega_\theta^2 = \frac{4mg}{(M+2m)a}(\cos\theta - 1) + \frac{u^2}{a^2} \quad ....(8)$$

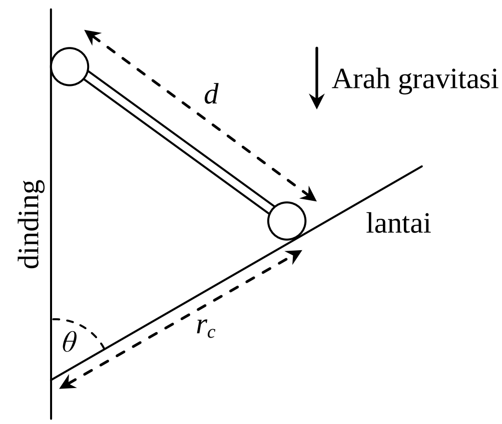
Syarat kelajuan *u* minimum adalah $\omega_\theta = 0$ ketika $\theta = 180^0$, yaitu

$$0 = \frac{4mg}{(M+2m)a}(\cos 180^0 - 1) + \frac{u_{\min}^2}{a^2}$$

$$0 = -\frac{8mg}{(M+2m)a} + \frac{u_{\min}^2}{a^2}$$

$$u_{\min} = \sqrt{\frac{8mga}{M+2m}} \quad ....(9)$$

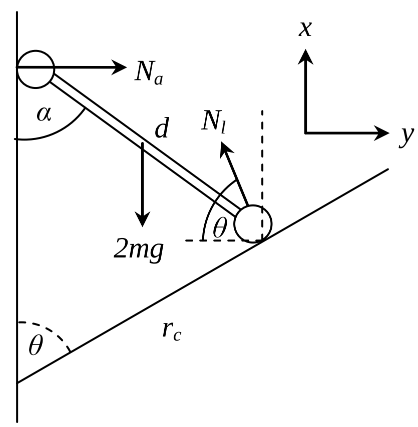
2. Sebuah pojokan terdiri dari dinding dan lantai yang membentuk sudut θ seperti ditunjukkan pada gambar di bawah. Sebuah dumbbell yang terdiri dari dua bola identik yang bermassa *m* dan terhubungkan oleh sebuah batang tak bermassa dengan panjang *d*. Dumbbell disimpan seperti pada gambar dan berada dalam posisi setimbang. Diketahui percepatan gravitasi adalah *g* dan anggap bola sebagai partikel titik. Abaikan semua gaya gesekan.



a. sinθ dinyatakan dalam $\delta = r_c/d$
b. nilai sinθ untuk kasus $\delta = 1$
c. besar masing-masing gaya yang diberikan dumbbel pada dinding dan lantai (dinyatakan dalam δ, m, dan g)
d. jenis kesetimbangan dari sistem dumbbel tersebut.

Pembahasan :

a. Diagram gaya pada sistem :



Hukum II Newton untuk kesetimbangan translasi sistem :

$$\sum F_x = 0$$
$$N_d - N_l \cos\theta = 0$$
$$N_d = N_l \cos\theta \quad ....(1)$$

$$\sum F_y = 0$$
$$N_l \sin\theta - 2mg = 0$$
$$N_l \sin\theta = 2mg \quad ....(3)$$

Hukum II Newton untuk kesetimbangan rotasi sistem :

$$\sum \tau_{pm} = 0$$
$$N_d \frac{d}{2}\cos\alpha + N_l \cos\theta \frac{d}{2}\cos\alpha - N_l \sin\theta \frac{d}{2}\sin\alpha = 0$$
$$N_d \cos\alpha + N_l \cos\theta\cos\alpha = N_l \sin\theta\sin\alpha \quad ....(3)$$

Menurut aturan sinus,

$$\frac{r_c}{\sin\alpha} = \frac{d}{\sin\theta}$$
$$\sin\alpha = \frac{r_c}{d}\sin\theta$$
$$= \delta\sin\theta ....(4)$$

Substitusi persamaan (1) ke dalam persamaan (3) diperoleh

$$2\cos\theta\cos\alpha = \sin\theta\sin\alpha$$
$$2\sqrt{1-\sin^2\theta}\sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sin\theta\sin\alpha$$
$$4\left(1-\sin^2\theta\right)\left(1-\delta^2\sin^2\theta\right) = \sin^2\theta\left(\delta^2\sin^2\theta\right)$$
$$4\left(1-\delta^2\sin^2\theta - \sin^2\theta + \delta^2\sin^4\theta\right) = \delta^2\sin^4\theta$$
$$3\delta^2\sin^4\theta - 4\left(1+\delta^2\right)\sin^2\theta + 4 = 0 \ ....(5)$$

Menurut rumus akar-akar persamaan kuadrat diperoleh

$$\sin^2\theta = \frac{4\left(1+\delta^2\right) \pm \sqrt{4^2\left(1+\delta^2\right)^2 - 4\cdot 3\delta^2\cdot 4}}{2\cdot 3\delta^2}$$
$$= \frac{2}{3}\left(\frac{\left(1+\delta^2\right) \pm \sqrt{1-\delta^2+\delta^4}}{\delta^2}\right)$$
$$\sin\theta = \sqrt{\frac{2}{3}\left(\frac{\left(1+\delta^2\right) \pm \sqrt{1-\delta^2+\delta^4}}{\delta^2}\right)} \ ....(6)$$

b. Untuk kasus $\delta = 1$,

$$\sin\theta = \sqrt{\frac{2}{3}\left(\frac{\left(1+1^2\right)\pm\sqrt{1-1^2+1^4}}{1^2}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{3}(2\pm 1)} \quad \text{..................(7)}$$

Solusi yang mungkin adalah

$$\sin\theta = \sqrt{\frac{2}{3}} \quad \text{..................(8)}$$

c. Gaya yang diberikan dumbbel pada lantai adalah

$$N_l = \frac{2mg}{\sin\theta}$$

$$= \frac{2mg}{\sqrt{\frac{2}{3}\left(\frac{\left(1+\delta^2\right)\pm\sqrt{1-\delta^2+\delta^4}}{\delta^2}\right)}} \quad \text{..................(9)}$$

Gaya yang diberikan dumbbel pada dinding adalah

$$N_d = N_l \cos\theta$$

$$= N_l\sqrt{1-\sin^2\theta}$$

$$= \frac{2mg}{\sqrt{\frac{2}{3}\left(\frac{\left(1+\delta^2\right)\pm\sqrt{1-\delta^2+\delta^4}}{\delta^2}\right)}}\sqrt{1-\frac{2}{3}\left(\frac{\left(1+\delta^2\right)\pm\sqrt{1-\delta^2+\delta^4}}{\delta^2}\right)} \quad \text{..................(10)}$$

d. jenis kesetimbangan dari sistem dumbbel ditentukan dengan uji turunan kedua energi potensial di titik setimbang. Energi potensial sistem adalah

$$EP = mgr_c\cos\theta + mg\left(r_c\cos\theta + d\cos\alpha\right)$$

$$= 2mgr_c\cos\theta + mgd\sqrt{1-\sin^2\alpha}$$

$$= 2mgr_c\cos\theta + mgd\sqrt{1-\delta^2\sin^2\theta}$$

Turunan pertama energi potensial sistem adalah

Davit Sipayung
davitsipayung@gmail.com

$$\frac{d}{d\theta}\left(EP\right)=-2mgr_c\sin\theta-\frac{1}{2}mgd\delta^2\sin 2\theta\sqrt{1-\sin^2\theta}$$

Turunan kedua energi potensial sistem adalah

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\left(EP\right)=-2mgr_c\cos\theta-mgd\delta^2\cos 2\theta\left(1-\delta^2\sin^2\theta\right)^{-\frac{1}{2}}$$
$$-\frac{1}{2}mgd\delta^4\sin 2\theta\left(1-\delta^2\sin^2\theta\right)^{-\frac{3}{2}}$$

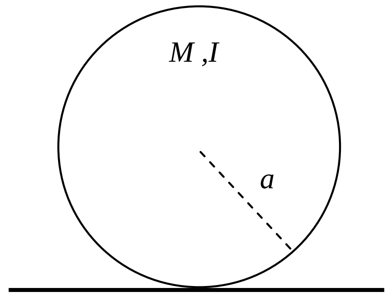
Kerena $\frac{d^2}{d\theta^2}\left(EP\right)<0$ di titik setimbang maka jenis kesetimbangan sistem adalah labil.

3. Tinjau sebuah roda pejal dengan massa *M*, jari-jari *a* dan momen inersia *I* terhadap sumbu roda yang melewati pusat massanya (lihat gambar). Roda berputar disekitar sumbunya dengan kelajuan sudut konstan ω_0, lalu dilepaskan pada posisi tegak di atas bidang lantai datar sehingga roda sempat tergelincir (slip) selama waktu τ lalu selanjutnya mulai menggelinding tanpa slip. Diketahui koefisien gesek antara roda dengan bidang lantai datar adalah μ.

   a. Tentukan besar τ dan kecepatan pusat massa roda *v* saat menggelinding. Buat skets grafik hubungan antara gaya *F* yang bekerja, kecepatan *v* dan kecepatan sudut ω terhadap waktu *t*.

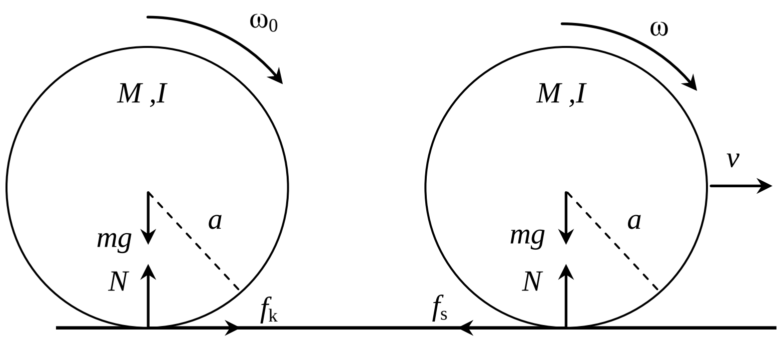
   b. Katakan roda dalam soal (*a*) di atas memiliki kelajuan pusat massa awal v_0 selain kelajuan sudut ω_0 sehingga roda mulai menggelingding tanpa *slip* tepat pada saat $t=\tau$. Tentukan nilai τ tersebut dan kelajuan pusat massa $v(\tau)$. Hitung besar energi kinetik yang hilang karena harus mengatasi gaya gesek agar tidak slip.

   c. Sekarang tinjau roda dalam soal (a) di atas yang telah memiliki kelajuan pusat massa awal v_0 dan kelajuan sudut $-\omega_0$. Dalam kasus sekarang, roda tergelincir dulu selama τ dan kemudian menggelinding tanpa slip. Tentukan nilai τ tersebut dan kelajuan pusat massa $v(\tau)$.



Pembahasan :

a. Diagram gerak silinder dan diagram gaya silinder :



Hukum kedua Newton untuk gerak translasi silinder :

$$f_k = Ma_{pm}$$
$$\mu_k Mg = Ma_{pm}$$
$$a_{pm} = \mu_k g$$

Hukum kedua Newton untuk gerak rotasi silinder :

$$-f_k a = I_{pm}\alpha$$
$$-\mu_k Mga = I\alpha$$
$$\alpha = -\frac{\mu_k Mga}{I}$$

Kecepatan pusat massa silinder adalah

$$v = v_0 + a_{pm}t = \mu_k gt$$

Kecepatan sudut silinder adalah

$$\omega = \omega_0 + \alpha t = \omega_0 - \frac{\mu_k Mga}{I}$$

Selinder menggeling tanpa slip dalam waktu τ, sehingga

$$v = \omega a$$

$$\mu_k g\tau = \left(\omega_0 - \frac{\mu_k Mga}{I}\tau\right)a$$

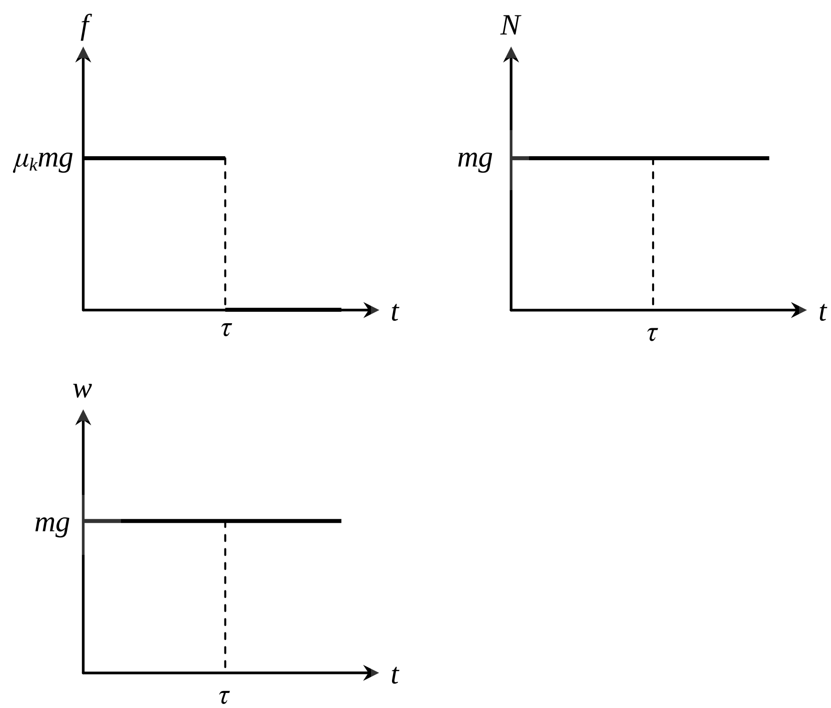
$$\tau = \frac{\omega_0 a}{\mu_k g\left(1 + \frac{Ma^2}{I}\right)}$$

Kecepatan pusat massa piringan menggelinding adalah

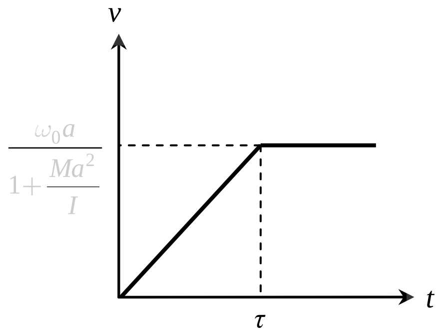
$$v = \mu_k g\tau$$

$$= \frac{\omega_0 a}{1 + \frac{Ma^2}{I}}$$

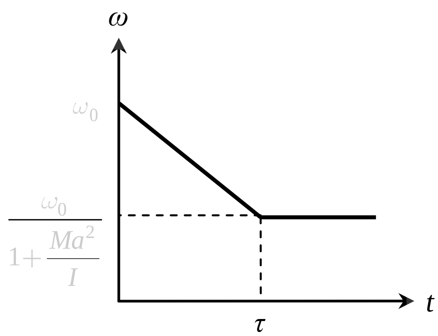
Skets grafik hubungan antara gaya *F* yang bekerja terhadap waktu *t*.



Skets grafik hubungan antara kecepatan *v* terhadap waktu *t*.



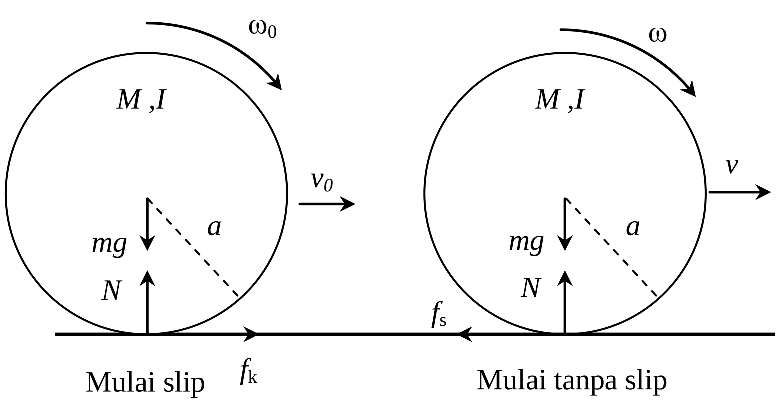
Skets grafik hubungan antara kecepatan sudut ω terhadap waktu t.



b. Tinjau dua kasus dalam penentuan arah gaya gesek.

Kasus I : $v_0 < \omega a$

Diagram gerak silinder dan diagram gaya silinder:



Hukum kedua Newton untuk gerak translasi silinder :

$$f_k = Ma_{pm}$$
$$\mu_k Mg = Ma_{pm}$$
$$a_{pm} = \mu_k g$$

Hukum kedua Newton untuk gerak rotasi silinder :

$$-f_k a = I_{pm}\alpha$$
$$-\mu_k Mga = I\alpha$$
$$\alpha = -\frac{\mu_k Mga}{I}$$

Kecepatan pusat massa silinder adalah

$$v = v_0 + a_{pm}t = v_0 + \mu_k gt$$

Kecepatan sudut silinder adalah

$$\omega = \omega_0 + \alpha t = \omega_0 - \frac{\mu_k Mga}{I}$$

Selinder menggeling tanpa slip dalam waktu τ, sehingga

$$v = \omega a$$
$$v_0 + \mu_k g\tau = \left(\omega_0 - \frac{\mu_k Mga}{I}\tau\right)a$$
$$\tau = \frac{\omega_0 a - v_0}{\mu_k g\left(1 + \frac{Ma^2}{I}\right)}$$

Kecpatan pusat massa piringan menggelinding adalah

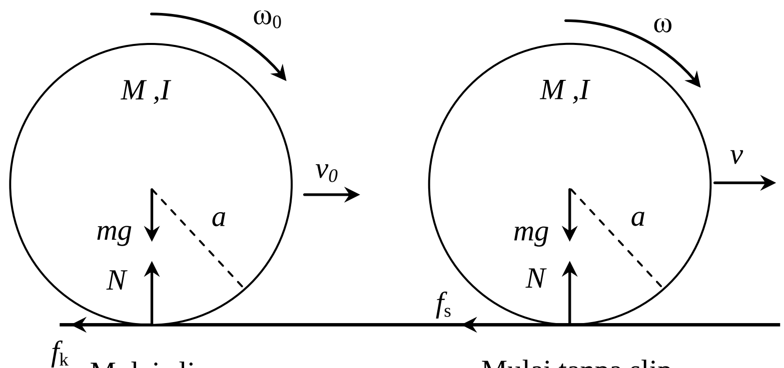
$$v = v_0 + \mu_k g\tau$$
$$= v_0 + \frac{\omega_0 a - v_0}{\left(1 + \frac{Ma^2}{I}\right)}$$
$$= \frac{\omega_0 a + \frac{Ma^2}{I}v_0}{\left(1 + \frac{Ma^2}{I}\right)}$$

Besar energi kinetik yang hilang selama proses slip :

$$E_{hilang} = EK_{awal} - EK_{akhir}$$
$$= \left(\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}I\omega_0^2\right) - \left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(mv_0^2 + I\omega_0^2\right) - \frac{1}{2}\left(m + \frac{I}{a^2}\right)\left\{\frac{\omega_0 a + \frac{Ma^2}{I}v_0}{\left(1 + \frac{Ma^2}{I}\right)}\right\}^2$$

Kasus II : $v_0 > \omega a$

Diagram gerak silinder dan diagram gaya silinder:



Mulai slip Mulai tanpa slip

Hukum kedua Newton untuk gerak translasi silinder :

$$-f_k = Ma_{pm}$$
$$-\mu_k Mg = Ma_{pm}$$
$$a_{pm} = -\mu_k g$$

Hukum kedua Newton untuk gerak rotasi silinder :

$$f_k a = I_{pm}\alpha$$
$$\mu_k Mga = I\alpha$$
$$\alpha = \frac{\mu_k Mga}{I}$$

Kecepatan pusat massa silinder adalah

$$v = v_0 + a_{pm}t = v_0 - \mu_k gt$$

Kecepatan sudut silinder adalah

$$\omega = \omega_0 + \alpha t = \omega_0 + \frac{\mu_k Mga}{I}$$

Selinder menggeling tanpa slip dalam waktu τ, sehingga

$$v = \omega a$$

$$v_0 - \mu_k g\tau = \left(\omega_0 + \frac{\mu_k Mga}{I}\tau\right)a$$

$$\tau = \frac{v_0 - \omega_0 a}{\mu_k g\left(1 + \frac{Ma^2}{I}\right)}$$

Kecpatan pusat massa piringan menggelinding adalah

$$v = v_0 - \mu_k g\tau$$

$$= v_0 - \frac{v_0 - \omega_0 a}{\left(1 + \frac{Ma^2}{I}\right)}$$

$$= \frac{\omega_0 a + \frac{Ma^2}{I}v_0}{\left(1 + \frac{Ma^2}{I}\right)}$$

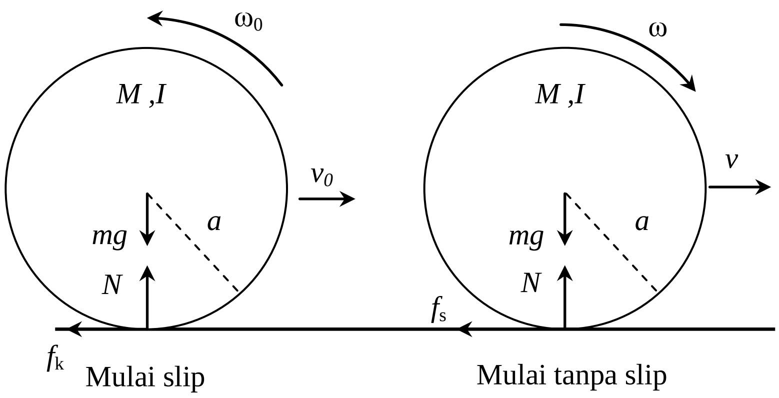
Besar energi kinetik yang hilang selama proses slip:

$$E_{hilang} = EK_{awal} - EK_{akhir}$$

$$= \left(\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}I\omega_0^2\right) - \left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(mv_0^2 + I\omega_0^2\right) - \frac{1}{2}\left(m + \frac{I}{a^2}\right)\left\{\frac{\omega_0 a + \frac{Ma^2}{I}v_0}{\left(1 + \frac{Ma^2}{I}\right)}\right\}^2$$

c. Diagram gerak silinder dan diagram gaya silinder:



Hukum kedua Newton untuk gerak translasi silinder :

$$-f_k = Ma_{pm}$$
$$-\mu_k Mg = Ma_{pm}$$
$$a_{pm} = -\mu_k g$$

Hukum kedua Newton untuk gerak rotasi silinder :

$$f_k a = I_{pm}\alpha$$
$$\mu_k Mga = I\alpha$$
$$\alpha = \frac{\mu_k Mga}{I}$$

Kecepatan pusat massa silinder adalah

$$v = v_0 + a_{pm}t = v_0 - \mu_k gt$$

Kecepatan sudut silinder adalah

$$\omega = \omega_0 + \alpha t = -\omega_0 + \frac{\mu_k Mga}{I}$$

Selinder menggeling tanpa slip dalam waktu τ, sehingga

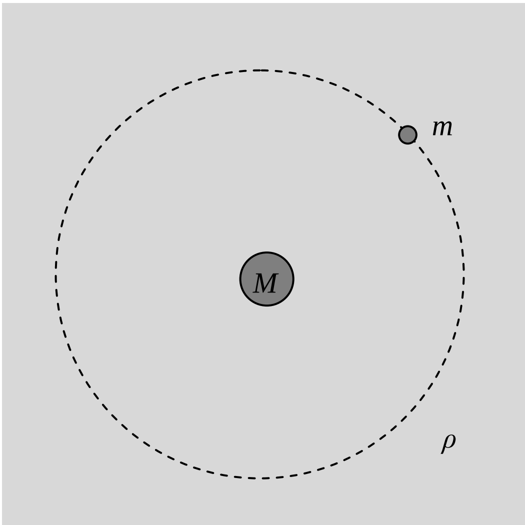
$$v = \omega a$$
$$v_0 - \mu_k g\tau = \left(-\omega_0 + \frac{\mu_k Mga}{I}\tau\right)a$$
$$\tau = \frac{v_0 + \omega_0 a}{\mu_k g\left(1 + \frac{Ma^2}{I}\right)}$$

Kecpatan pusat massa piringan menggelinding adalah

Davit Sipayung
davitsipayung@gmail.com

$$v = v_0 - \mu_k g\tau$$
$$= v_0 - \frac{v_0 + \omega_0 a}{\left(1 + \frac{Ma^2}{I}\right)}$$
$$= \frac{\frac{Ma^2}{I} v_0 - \omega_0 a}{\left(1 + \frac{Ma^2}{I}\right)}$$

4. Sebuah planet yang massa *m* mengorbit Matahari yang bermassa *M*. Terdapat awan debu yang tersebar merata pada di luar angkasa dengan kerapan ρ., ternasuk diantara planet tersebut dan matahari. Diketahui bahwa konstanta gravitasi umum adalah *G* serta pengarus gesekan dan tumbukan antara partikel debu dan planet dapat diabaikan.



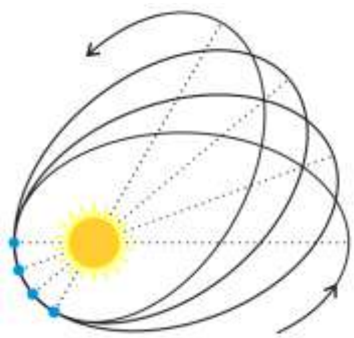
a. Tunjukkan bahwa awan debu memberikan penambahan gaya gravitasi planet terhadap Matahari yang sebanding dengan jarak planet dan Matahari *r* dalam bentuk :
$F' = kmr$
Tentukan nilai konstanta *k*.
b. Tinjau kasus dimana planet bergerak dengan momentum sudut yang konstan sebesar *L*. *L* juga merupakan nilai momentum sudut jika planet bergerak melingkar dengan jari-jari r_0. Tentukan persamaan gerak planet dalam arah radial yang menghubungkan r_0, *L*, *G*, *M*,*m*, dan *k*.

c. Tentukan periode revolusi planet mengelilingi Matahari jika diasumsikan orbit planet adalah lingkaran. Nyatakan jawaban dalam L, m, dan r_0.

d. Pada suatu ketika planet mengalami sedikit simpangan kecil pada arah radial sehingga orbitnya terganggu. Tunjukkan bahwa planet mengalami gerak osilasi harmonik sederhana pada arah radial.

e. Asumsikan nilai F' cukup kecil jika dibandingkan dengan gaya tarik Matahari. Tunjukkan bahwa orbit planet membentuk "*precessing ellipse*".

   Hint : gerakan *precessing ellipse* adalah gerakan dengan bentuk dasar elips, namun sumbu elips tersebut juga ikut berputar (lihat gambar di bawah). Anda tidak perlu menggunakan persamaan elips untuk mengerjakan soal ini.



f. Tunjukkan waktu yang dibutuhkan planet untuk kembali ke titik semula (titik sebelum mengalami simpangan) untuk pertama kalinya. Nyatakan jawaban dalam L,m, k, dan r_0.

g. Apakah arah putar dari sumbu elips sama gerakan *precessing ellipse* searah atau berlawanan arah kecepatan sudut planet? Jelaskan.

Pembahasan:

a. Gaya gravitasi planet terhadap Matahari dengan jarak planet dan Matahari r sama dengan gaya gravitasi yang dialami oleh planet akibat massa total debu dengan jari-jari r yang dikosentrasikan di pusat Matahari. Dengan kata lain,

$$F' = -G\frac{mM_{debu}}{r^2} = -G\frac{m}{r^2}\left(\rho\frac{4}{3}\pi r^3\right) = -\frac{4\pi\rho Gmr}{3} = -mkr$$

dengan $k = -\dfrac{4\pi\rho G}{3}$

b. Hukum II Newton gerak planet dalam koordinat polar adalah

$$\sum F_r = ma_r$$
$$F_M + F' = m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)$$
$$-G\frac{mM}{r^2} - mkr = m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)$$

Momentum sudut planet terhadap pusat matahari karena torsi terhadap matahari sama dengan nol,yaitu

$$L = mvr = m\left(\dot{\theta}r\right)r = m\dot{\theta}r^2 \quad \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{L}{mr^2} = \frac{L}{mr_0^2}$$

Persamaan gerak planet dalam arah radial menjadi

$$-G\frac{mM}{r^2} - mkr + \frac{L^2}{mr^3} = m\ddot{r}$$

Jika planet bergerak melingkar dengan jari-jari r_0, maka

$$-G\frac{mM}{r_0^2} - mkr_0 + \frac{L^2}{mr_0^3} = 0$$

c. Periode planet adalah

$$T = \frac{2\pi}{\dot{\theta}}$$
$$= 2\pi\frac{mr_0^2}{L}$$

d. Planet mengalami sedikit simpangan kecil $\varepsilon << r_0$ sehingga $r = r_0 + \varepsilon$. Akibatnya,

$$m\ddot{\varepsilon} = -G\frac{mM}{r^2} - mkr + \frac{L^2}{mr^3}$$
$$= -G\frac{mM}{(r_0+\varepsilon)^2} - mk(r_0+\varepsilon) + \frac{L^2}{m(r_0+\varepsilon)^3}$$
$$= -G\frac{mM}{r_0^2\left(1+\frac{\varepsilon}{r_0}\right)^2} - mkr_0\left(1+\frac{\varepsilon}{r_0}\right) + \frac{L^2}{mr_0^3\left(1+\frac{\varepsilon}{r_0}\right)^3}$$
$$\approx -G\frac{mM}{r_0^2}\left(1-\frac{2\varepsilon}{r_0}\right) - mkr_0\left(1+\frac{\varepsilon}{r_0}\right) + \frac{L^2}{mr_0^3}\left(1-\frac{3\varepsilon}{r_0}\right)$$
$$= \left(-G\frac{mM}{r_0^2} - mkr_0 + \frac{L^2}{mr_0^3}\right) + \frac{2\varepsilon}{r_0}\left(G\frac{mM}{r_0^2}\right) - mk\varepsilon - \frac{3\varepsilon}{r_0}\frac{L^2}{mr_0^3}$$

Gunakan orbit persamaan gerak planet untuk mendapatkan

$$m\ddot{\varepsilon} = -\left[mk + \frac{L^2}{mr_0^4} + \frac{2}{r_0}\left(-G\frac{mM}{r_0^2} + \frac{L^2}{mr_0^3}\right)\right]\varepsilon$$
$$= -\left[\frac{L^2}{mr_0^4} + 3km\right]\varepsilon$$

atau

$$\ddot{\varepsilon} = -\left(\frac{L^2}{m^2 r_0^4} + 3k\right)\varepsilon$$

Ini adalah persamaan gerak harmonik sederhana dengan frekuensi angular

$$\omega_r = \sqrt{\frac{L^2}{m^2 r_0^4} + 3k}$$

e. *Precessing ellipse* terjadi jika ada perbedaan kecil antara frekuensi sudut arah radial dan frekuensi sudut orbital planet. Frekuensi sudut orbital planet adalah

$$\omega_0 = \frac{L^2}{mr_0^2}$$

dan

$$\omega_r = \sqrt{\frac{L^2}{m^2 r_0^4} + 3k}$$
$$= \frac{L}{mr_0^2}\left(1 + \frac{3km^2 r_0^4}{L^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\approx \frac{L}{mr_0^2}\left(1 + \frac{3km^2 r_0^4}{2L^2}\right)$$
$$= \frac{L}{mr_0^2} + \frac{3kmr_0^2}{2L}$$

Orbit planet membentuk "*precessing ellipse*" karena ada perbedaan kecil antara frekuensi sudut arah radial dan frekuensi sudut orbital planet.

f. Waktu yang dibutuhkan planet untuk kembali ke titik semula sama dengan periode *precessing*. Frekuensi sudut *precessing* sama dengan selisaih frekuensi sudut radial dan frekuensi sudut orbital planet, yaitu

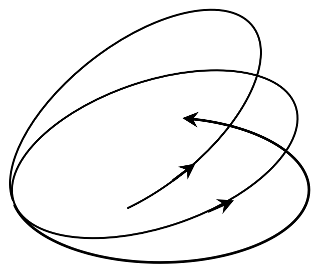
$$\omega_p = \omega_r - \omega_0$$
$$= \frac{3kmr_0^2}{2L}$$

Periode *precessing* adalah

$$T_p = \frac{2\pi}{\omega_p}$$

$$= \frac{4\pi L}{3kmr_0^2}$$

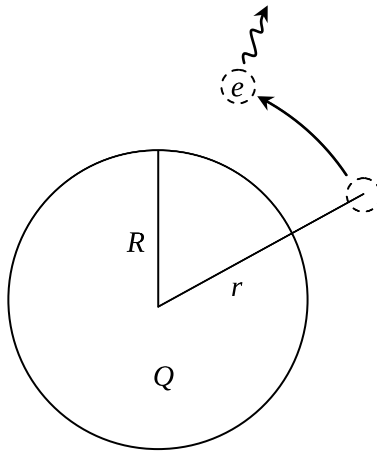
h. Arah putar dari sumbu elips gerakan *precessing ellipse* berlawanan arah kecepatan sudut planet karena kecepatan sudut osilasi radial lebih besar dari kecepatan sudut orbital seperti gambar di bawah ini.



5. Sebuah bola pejal berjari-jari R memiliki muatan total Q dengan persebaran densitas muatan merata. Sebuah elektron bermuatan $-e$ bermassa m dan **bergerak bebas** di daerah dalam dalam dan luar bola tersebut. Elektron tersebut bergerak membentuk orbit lingkaran pada jarak r dari pusat bola. Dalam gerakannya, elektron tersebut dipercepat dengan gaya sentripetal sehingga akan terjadi radiasi P yang dapat dinyatakan dengan

$$P = C\xi a^n$$

dimana C adalah konstanta tak berdimensi dengan nilai $C = 1/6\pi$, ζ adalah konstanta fisik sebagai fungsi dari muatan Q, laju cahaya c, dan permitivitas ruang vakum ε_0, serta a adalah percepatan muatan dan n konstanta tak berdimensi. Persamaan di atas dikenal sebagai *Lamor Formula*.



Sebelumnya, abaikan radiasi pada soal berikut.

a. Ambil $r < R$, tentukan periode T gerak orbit elektron (nyatakan dalam r, R, Q, e, m, ε_0)!

b. Ambil $r > R$, tentukan periode T gerak orbit elektron (nyatakan dalam r, R, Q, e, m, ε_0)!

c. Asumsikan elektron berada pada posisi diam di $r = 2R$, tentukan kelajuan elektron saat melewati titik pusat bola bermuatan (nyatakan dalam R, Q, e, m, ε_0)!

Sekarang radiasi tak diabaikan.

d. Tentukan ekspresi $\zeta(q,c,\ \varepsilon_0)$ dan n, lalu tentukan formula *Larmor* P di atas (nyatakan dalam R, Q, e, m, ε_0)!

Asumsikan bentuk orbit setelah mengalami radiasi tetap berbentuk lingkaran dan jari-jari orbit tersebut berubah sebesar $|\Delta r| << r$.

e. Ambil $r<R$, tentukan perubahan jari-jari orbit Δr dalam satu orbit (nyatakan dalam r, R, Q, e, m, ε_0,c)!

f. Ambil $r > R$, tentukan perubahan jari-jari orbit Δr dalam satu orbit (nyatakan dalam r, R, Q, e, m, ε_0,c)!

g. Tentukan waktu yang dibutuhkan elektron untuk jatuh dari orbit $r=R$ ke orbit $r=R/2$.

Pembahasan :

a. Periode gerak elektron adalah

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Hukum II Newton untuk gerak elektron,

$$\sum F = ma_{sp} = m\omega^2 r$$

Gaya yang dialami oleh elektron di $r<R$ sama dengan gaya oleh muatan Q' yang merupakan muatan total bola pejal dengan radius r. Densitas muatan merata sehingga

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{Q'}{\frac{4}{3}\pi r^3} \Rightarrow Q' = \frac{r^3}{R^3}Q$$

Jadi :

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{eQ'}{r^2} = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{r^2}\left(\frac{r^3}{R^3}Q\right) = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r$$

$$T_1 = \sqrt{\frac{16\pi^3\varepsilon_0 mR^3}{eQ}}$$

b. Hukum II Newton untuk gerak elektron,

$$\sum F = ma_{sp} = m\omega^2 r$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{eQ}{r^2} = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{eQ}{r^2} = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r$$

Jadi,

$$T_2 = \sqrt{\frac{16\pi^3\varepsilon_0 mr^3}{eQ}}$$

c. Usaha total oleh gaya coulomb sama dengan perubahan energi kinetik.

$$W_{total} = \Delta EK$$

$$\int_{2R}^{0} F dr = \frac{1}{2}mv^2 - 0$$

$$\int_{2R}^{R}\left(-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{eQ}{r^2}\right)dr + \int_{R}^{0}\left(-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{eQ'}{r}\right)dr = \frac{1}{2}mv^2$$

$$-\frac{eQ}{4\pi\varepsilon_0}\int_{2R}^{R}\frac{1}{r^2}\,dr - \frac{eQ}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\int_{R}^{0} r\,dr = \frac{1}{2}mv^2$$

$$-\frac{eQ}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\bigg|_{2R}^{R}\right) - \frac{eQ}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\left(\frac{1}{2}r^2\bigg|_{R}^{0}\right) = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\frac{eQ}{8\pi\varepsilon_0 R} + \frac{eQ}{8\pi\varepsilon_0 R} = \frac{1}{2}mv^2$$

$$v = \sqrt{\frac{eQ}{2\pi\varepsilon_0 mR}}$$

d. Formula *Larmor* adalah

$$P = C\xi a^n = Cq^x c^y \varepsilon_0^z a^n$$

Menurut analisis dimensi,

$$[P] = [q]^x [c]^y \left[\varepsilon_0\right]^z [a]^n$$

$$MLT^{-3} = (TI)^x \left(LT^{-1}\right)^y \left(ML^{-3}T^4I^2\right)^z \left(LT^{-2}\right)^n$$

$$MLT^{-3} = M^{-z}L^{y-3z+n}T^{x-y+4z-2n}I^{x+2z}$$

Menurut kesamaan pangkat diperoleh x = 2, y = -3, z = -1 dan n = 2. Jadi :

$$P = Cq^2c^{-3}\varepsilon_0^{-1}a^2$$

$$= \frac{q^2a^2}{6\pi c^3\varepsilon_0}$$

e. Perubahan jari-jari orbit satu periode diperoleh dengan mendapatkan bentuk *dr/dt* dan kemudian diintegralkan. Laju radiasi elektron adalah

$$\frac{dE}{dt} = -P = -\frac{eQa^2}{6\pi c^3\varepsilon_0}$$

Energi mekanik elektron adalah

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + V$$

Hukum II Newton untuk gerak elekton adalah

$$\sum F = ma$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{eQ'}{r^2} = ma = m\frac{v^2}{r}$$

$$\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{eQr^2}{R^3} = \frac{1}{2}mv^2$$

Energi potensial elektron di dalam bola r<R sama dengan usaha untuk memindahkan elektron dari titik di posisi r ke titik tidak berhingga.

$$V = \int_r^\infty F dr$$

$$= \int_r^R \left(-\frac{eQr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\right)dr + \int_R^\infty \left(-\frac{eQ}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\right)dr$$

$$= -\frac{eQ}{8\pi\varepsilon_0 R^3}\left(R^2 - r^2\right) - \frac{eQ}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R}$$

$$= -\frac{eQ}{8\pi\varepsilon_0 R^3}\left(3R^2 - r^2\right)$$

Jadi :

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + V$$

$$= \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{eQr^2}{R^3} - \frac{eQ}{8\pi\varepsilon_0 R^3}\left(3R^2 - r^2\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{eQr^2}{R^3} - \frac{3}{8\pi\varepsilon_0}\frac{eQ}{R}$$

Selanjutnya,

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{eQr}{R^3}\frac{dr}{dt}$$

$$-\frac{eQa^2}{6\pi c^3\varepsilon_0} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{eQr}{R^3}\frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{R^3a^2}{3c^3 r}$$

$$= -\frac{R^3}{3c^3 r}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{eQ}{mR^3}r\right)^2$$

$$= -\frac{e^2Q^2}{48m^2\pi^2\varepsilon_0^2c^3R^3}r$$

Perubahan jari-jari orbit dalam satu orbit adalah

$$\frac{dr}{r}=-\frac{e^2Q^2}{48m^2\pi^2\varepsilon_0^2c^3R^3}dt$$

$$\int_r^{r-\Delta r}\frac{dr}{r}=-\frac{e^2Q^2}{48m^2\pi^2\varepsilon_0^2c^3R^3}\int_0^{T_1}dt$$

$$\ln\left(\frac{r-\Delta r}{r}\right)=-\frac{e^2Q^2}{48m^2\pi^2\varepsilon_0^2c^3R^3}T_1$$

$$\ln\left(\frac{r-\Delta r}{r}\right)=-\frac{e^2Q^2}{48m^2\pi^2\varepsilon_0^2c^3R^3}\sqrt{\frac{16\pi^3\varepsilon_0 mR^3}{eQ}}$$

$$1-\frac{\Delta r}{r}=e^{-\frac{R^3e^2Q^2}{12m^2\pi\varepsilon_0^2c^3R^2}\sqrt{\frac{\pi\varepsilon_0 mR}{eQ}}}$$

$$\Delta r=r\left(1-e^{-\frac{R^3e^2Q^2}{12m^2\pi\varepsilon_0^2c^3R^2}\sqrt{\frac{\pi\varepsilon_0 mR}{eQ}}}\right)$$

f. Laju radiasi elektron adalah

$$\frac{dE}{dt}=-P=-\frac{eQa^2}{6\pi c^3\varepsilon_0}$$

Energi mekanik elektron adalah

$$E=\frac{1}{2}mv^2+V$$
$$=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{eQ}{r}$$

Hukum II Newton untuk gerak elekton adalah

$$\sum F=ma$$
$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{eQ}{r^2}=ma=m\frac{v^2}{r}$$
$$\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{eQ}{r^2}=\frac{1}{2}mv^2$$

Jadi :

$$E=\frac{1}{2}mv^2+V$$
$$=\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{eQ}{r}-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{eQ}{r}$$
$$=-\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{eQ}{r}$$

Davit Sipayung
davitsipayung@gmail.com

Selanjutnya,

$$\frac{dE}{dt}=\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{eQ}{r^2}\frac{dr}{dt}$$

$$-\frac{eQa^2}{6\pi c^3\varepsilon_0}=\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{eQ}{r^2}\frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dr}{dt}=-\frac{4r^2a^2}{3c^3}$$

$$=-\frac{4r^2}{3c^3}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{eQ}{mr^2}\right)^2$$

$$=-\frac{e^2Q^2}{12m^2\pi^2\varepsilon_0^2c^3r^2}$$

Perubahan jari-jari orbit dalam satu orbit adalah

$$r^2dr=-\frac{e^2Q^2}{12m^2\pi^2\varepsilon_0^2c^3}dt$$

$$\int_r^{r-\Delta r} r^2dr=-\frac{e^2Q^2}{12m^2\pi^2\varepsilon_0^2c^3}\int_0^{T_2} dt$$

$$\frac{1}{3}\left[(r-\Delta r)^3-r^3\right]=-\frac{e^2Q^2}{12m^2\pi^2\varepsilon_0^2c^3}\sqrt{\frac{16\pi^3\varepsilon_0 mr^3}{eQ}}$$

$$\left[r^3\left(1-\frac{\Delta r}{r}\right)^3-r^3\right]=-\frac{e^2Q^2}{m^2\pi\varepsilon_0^2c^3}\sqrt{\frac{\pi\varepsilon_0 mr^3}{eQ}}$$

$$\left[r^3\left(1-3\frac{\Delta r}{r}\right)-r^3\right]\approx-\frac{e^2Q^2}{m^2\pi\varepsilon_0^2c^3}\sqrt{\frac{\pi\varepsilon_0 mr^3}{eQ}}$$

$$\Delta r\approx\frac{e^2Q^2}{3m^2\pi\varepsilon_0^2c^3r}\sqrt{\frac{\pi\varepsilon_0 mr}{eQ}}$$

g. Waktu yang dibutuhkan elektron untuk jatuh dari orbit *r=R* ke orbit *r=R/2*:

$$\int_R^{R/2} r^2dr=-\frac{e^2Q^2}{12m^2\pi^2\varepsilon_0^2c^3}\int_0^{\tau}dt$$

$$\tau=\frac{7m^2\pi^2\varepsilon_0^2c^3}{2e^2Q^2}$$