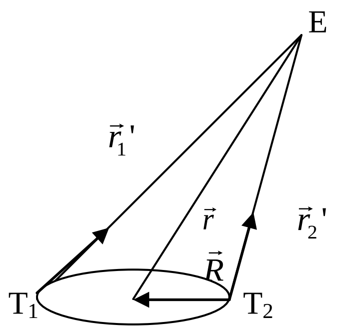
PARALAJE ANUA Y DIURNA

1. PARALAJE ANUA

Debido al movimiento de traslación de la Tierra alrededor del Sol, por un efecto de cambio de origen, denominado paralaje anua, las estrellas próximas parecen oscilar alrededor de sus posiciones medias, en el transcurso de un año. Este efecto es muy pequeño, dad la distancia a que se encuentran las estrellas más próximas, y su semi amplitud no alcanza nunca 1’’.Sin embargo, este efecto permitió determinar por vez primera la distancia de las estrellas próximas a nuestro Sistema Solar.
Si expresamos el movimiento de la Tierra en función del movimiento aparente del Sol ($\vec{R}$, con origen en T y extremo en S) se tiene:

$$d\vec{r} = \vec{r}' - \vec{r} = \vec{R} \qquad \text{(ya que R<< r)} \qquad \textbf{(7.1)}$$

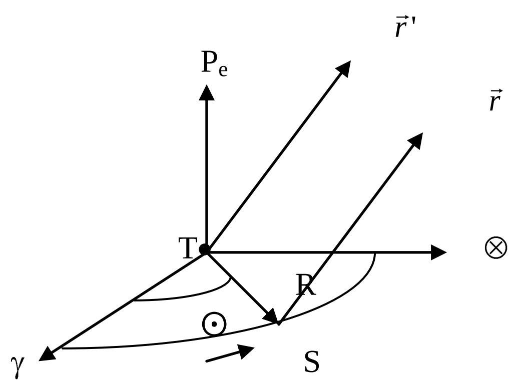
$d\vec{r}$ es la corrección de paralaje a aplicar para pasar de las coordenadas heliocéntricas $\vec{r}$ (verdaderas) a coordenadas geocéntricas $\vec{r}'$ (aparentes).



Si consideramos el triedro de las coordenadas eclípticas, se tiene:

Coordenadas del Sol:(R cos☺, R sen☺,0) (Rectangulares, GC)

Coordenadas de la estrella:(r, L, B) (Esféricas, HC)



Si proyectamos los vectores $\vec{r}$, $\vec{r}'$ sobre la misma esfera (TRASLACIÓN DIFERENCIAL), se cumple:

$$\overline{E}\vec{E}' = \vec{r}' - \vec{r} = d\vec{r} \quad \begin{cases} (x, y, z): (R.\cos\odot,\ R.\mathrm{sen}\ \odot,\ 0) \\ \\ (x'', y'', z''): (dx'', dy'', dz'') \end{cases}$$

Las posiciones E, E' presentan distintas coordenadas:

E(r, L, B), E'(r', L', B'), de modo que:

L'- L = <u>dL</u> ,, B'- B = <u>dB</u>

Efectuando los giros:

$R_3(L)$: (x, y, z$\Rightarrow$x', y', z'=z)

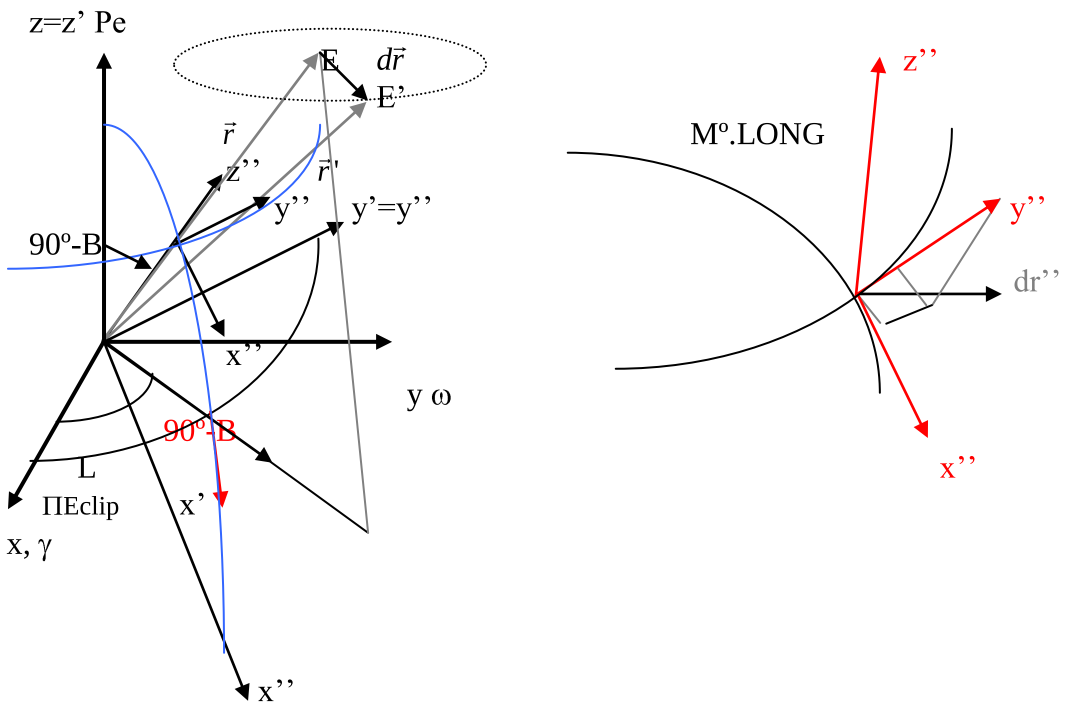
$R_2(90º\text{-}B)$: (x', y', z'$\Rightarrow$ x'', y''=y', z'')

de modo que :

$$z'' \parallel \vec{r} \ ,, \ x'' \parallel_{MAXIMOLONGITUD} (L = \text{cte.}),, \quad y'' \parallel_{MENORLATITUD} (B = \text{cte.})$$

se tiene:

$$d\vec{r}'' = \begin{pmatrix} dx'' \\ dy'' \\ dz'' \end{pmatrix} = R_2\,(90º\text{-}B)\; R_3(L) \begin{pmatrix} R\cos\odot \\ R\ \mathrm{sen}\ \odot \\ 0 \end{pmatrix} (\,d\vec{r}\,) \qquad \textbf{(7.2)}$$



En (x'', y'', z'') se cumple: $d\vec{r}'' =$ (-r dB, r cos B dL, dz''), de modo que sustituyendo en lo que sigue <u>r</u> por <u>s</u>, se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} dB = -\Pi\ \mathrm{sen}\ B \cos(\odot - L) \\ dL = \Pi \sec B\ \mathrm{sen}\ (\odot - L) \\ \dfrac{ds}{s} = \Pi \cos B \cos(\odot - L) \end{array}\right\} \qquad \textbf{(7.3)}$$

donde se ha hecho $\frac{R}{s} = \Pi$ (rad), paralaje de la estrella o ángulo bajo el cual se ve desde la misma el radio de la órbita terrestre.

★Para interpretar estas ecuaciones (7.3) consideramos ahora el sistema x'', y'', z'', con origen la estrella considerada y teniendo en cuenta (7.2) con R constante en el tiempo:

$$\left.\begin{aligned} dx'' &= -s\, dB = R \text{ sen } B \cos(\odot - L) \\ dy'' &= s \cos B\, dL = R \text{ sen}(\odot - L) \\ dz'' &= \quad ds = R \cos(\odot - L) \end{aligned}\right\} , \qquad \textbf{(7.4)}$$

ecuaciones paramétricas de una circunferencia, intersección de la esfera: $dx''^2 + dy''^2 + 0 = R^2$ con el plano: dx'' cos B- dz''sen B =0, paralelo al plano de la eclíptica (ya que es paralelo al eje y'' y además $\frac{dz''}{dx''} = \cot B$). Debido a la paralaje anua, la estrella pasa a describir en un año, alrededor de su posición verdadera y con movimiento uniforme, una circunferencia de radio R paralela a la eclíptica. Dicha circunferencia se proyecta sobre el plano x''y'', tangente a la esfera celeste, según una elipse de semiejes: R sen B y R y excentricidad cos B, llamada elipse de paralaje.

★En coordenadas ecuatoriales tendremos, pasando antes las coordenadas eclípticas geocéntricas del Sol a coordenadas ecuatoriales mediante la rotación $R_1(-\varepsilon)$ y aplicando después las fórmulas diferenciales de paso de coordenadas rectilíneas a coordenadas esféricas ecuatoriales:

$$d\vec{s}'' = \begin{pmatrix} dx'' \\ dy'' \\ dz'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s\, dD \\ s \cos D\, dA \\ ds \end{pmatrix} = R_2(90^\circ - D)\, R_3(A)\, R_1(-\varepsilon) \begin{pmatrix} R \cos \odot \\ R \text{ sen } \odot \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(7.5)}$$

Operando e introduciendo la paralaje Π de la estrella, limitándonos a la consideración de las dos primeras componentes:

$$\left.\begin{aligned} dD &= \Pi\, [(\cos D \text{ sen } \varepsilon - \text{sen } D \text{ sen } A \cos \varepsilon) \text{ sen } \odot - \text{sen } D \cos A \cos \odot] \\ dA &= \Pi \sec D\, [\cos A \cos \varepsilon \text{ sen } \odot - \text{sen } A \cos \odot] \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(7.6)}$$

Actualmente, con más precisión, en las "Efemérides Astronómicas" se da otra forma a las ecuaciones (7.6), expresándolas directamente en función de las coordenadas ecuatoriales rectangulares geocéntricas del Sol, X, Y, Z, calculables como veremos más adelante. La órbita aparente del Sol se supone ahora elíptica con foco en la TIERRA; tomando como unidad la distancia de la Tierra al Sol, la paralaje de la estrella vale:

$\Pi = \frac{1}{s}$.

En este caso las fórmulas diferenciales de cambio son:

$$\begin{pmatrix} -s\ dD \\ s \cos D\ dA \\ ds \end{pmatrix} = R_2(90^o\text{-}D)\ R_3(A) \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \qquad \textbf{(7.7)}$$

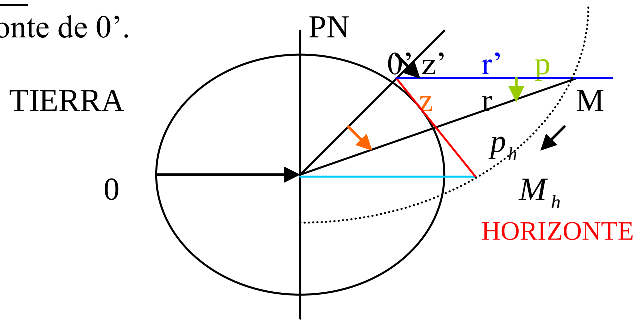
Operando y haciendo $\Pi = \frac{1}{s}$, finalmente:

$$\left.\begin{aligned} \underline{dD} &= \Pi\ (-X \text{ sen } D \cos A - Y \text{ sen } D \text{ sen } A + Z \cos D) \\ \underline{dA} &= \Pi \sec D\ (-X \text{ sen } A + Y \cos A) \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(7.8)}$$

2. PARALAJE DIURNA

En un mismo instante, los astros próximos se observan en distintas direcciones, según sea el lugar de la observación, y esta diferencia de posiciones observadas será tanto mayor cuanto más próximo esté el astro al observador (satélites artificiales, Luna, planetas, Sol), variando además con el transcurso del tiempo.
Se hace necesario pues, reducir las observaciones a un mismo punto, que se toma el centro de la TIERRA. Es un efecto de traslación del origen de coordenadas (satélites artificiales, Luna), que en algunos caso puede tratarse como cambio diferencial de coordenadas esféricas (planetas, Sol) cuando las distancia del astro es >> distancia entre los lugares de observación.
Estas coordenadas se llaman geocéntricas y las relativas a cada observador, topocéntricas. La corrección que hay que aplicar para pasar de las segundas a las primeras se denomina corrección de paralaje diurna.

✦En <u>primera aproximación</u>, para comprender el fenómeno, consideramos la <u>TIERRA esférica</u> de radio <u>R</u> y estudiemos la corrección de paralaje diurna en coordenadas horizontales. Como ambas direcciones están en el mismo círculo vertical, solo habrá corrección de paralaje en <u>altura</u>, manteniéndose constante el acimut (FIGURA).
Sea <u>M</u> un astro, <u>z'</u> su distancia cenital topocéntrica relativa a un observador 0', <u>z</u> su distancia cenital geocéntrica, <u>p</u> su paralaje en altura, ángulo bajo el que se ve desde M, el radio R, y $\underline{p_h}$ su paralaje horizontal, el ángulo anterior cuando el astro está en $\underline{M_h}$, sobre el horizonte de 0'.



Supongamos además que r, distancia del astro al centro de la TIERRA, se mantiene constante en el transcurso del día. Aplicando el teorema del seno al triángulo 00’M nos da:

$$\frac{R}{sen(p)}=\frac{r}{sen(180°-z')}=\frac{r}{sen(z')}$$

Es decir:

$$\frac{R}{r}=\frac{sen(p)}{sen(z')} \qquad \textbf{(7.9)}$$

En el triángulo rectángulo 00’ M_h se tiene:

$$\text{sen } p_h = \frac{R}{r}=\frac{sen(p)}{sen(z')}$$

o sea : $\quad$ sen p = sen p_h sen z’ $\qquad$ **(7.10)**

siendo: $\quad$ z = z’- p $\qquad$ **(7.11)**

Si exceptuamos los satélites artificiales y la Luna, la pequeñez de p y p_h permite sustituir en (7.10) sus senos por sus arcos en radianes:

p = p_h sen z’,

con lo que, según (7.11):

z = z’- p_h sen z’ $\qquad$ **(7.12)**

Si interesa el resultado en segundos de arco se tiene:

$$p_h'' = \frac{R}{r}\ 206265''$$

Este factor expresa el número de segundos de arco por radián.

✦Consideramos ahora la TIERRA como un elipsoide de revolución y estudiamos la corrección de paralaje diurna en coordenadas horarias.
Se llama paralaje horizontal ecuatorial p_0 de un astro M, al ángulo bajo el cual se ve desde dicho astro el radio ecuatorial de la Tierra:

$$p_0 \cong \text{sen } p_0 = \frac{a}{r} \quad (a = 6378{,}4\,Km)$$

En el caso del Sol se designa por Π_0, su paralaje horizontal ecuatorial cuando se encuentra a una unidad astronómica de distancia:

1 u.a. = 149,6 $\cdot 10^6$ Km (distancia media Sol-Tierra).

Tomando como unidad de longitud dicha distancia media, Π_0 en segundos de arco valdrá:

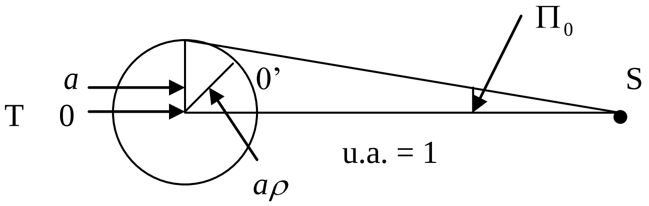
$$\Pi_0 = \frac{6378{,}4}{149{,}5}\cdot 206265'' = 8'',80 \qquad \textbf{(7.13)}$$

Recientemente se han corregido los valores de a, de la u.a y de Π_0, trabajándose con:

a =6378,2 Km , u.a =149,6$\cdot 10^6$ Km y Π_0 =8’’,79.

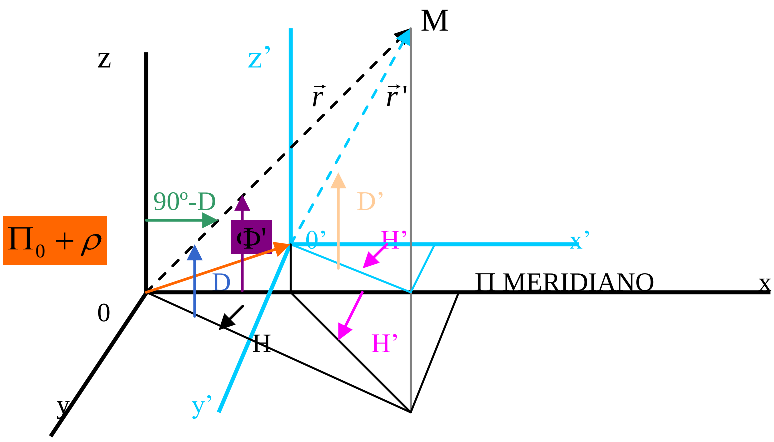
Si medimos las distancias en u.a. y Π_0 en radianes, resulta para el radio vector del observador sobre el elipsoide $a\rho$ la expresión (FIGURA):

$$\Pi_0 = \frac{a}{u.a} = a$$



Luego: $a\rho = \Pi_0 \ \rho$

Traslademos ahora el sistema local de coordenadas horarias al centro de la TIERRA conservando fijo el plano x'z'(= Πxz = Π meridiano). Con ello se tiene (FIGURA):



$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \Pi_0 \vec{\rho} \quad , \qquad \textbf{(7.14)}$$

ecuación vectorial que equivale a un sistema de tres ecuaciones (para las tres componentes) con tres incógnitas, r, H y D, lo que permite su cálculo:

$$\left.\begin{aligned} r \cos D \cos H &= r' \cos D' \cos H' + \Pi_0 \rho \cos \Phi' \\ r \cos D \operatorname{sen} H &= r' \cos D' \operatorname{sen} H' \\ r \operatorname{sen} D &= r' \operatorname{sen} D' + \Pi_0 \rho \operatorname{sen} \Phi' \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(7.15)}$$

siendo Φ' la latitud geocéntrica.

Recordando las fórmulas de transformaciones de coordenadas por traslación, vistas en el tema de la Esfera Celeste, resulta:

$$\operatorname{tg}(H'-H) = \frac{\Pi_0 \rho (\cos \Phi' \operatorname{sen} H)}{r \cos D - \Pi_0 \rho \cos \Phi' \cos H} \qquad \textbf{(7.16)}$$

Suponiendo que H'-H sea pequeña, se obtiene para D'-D:

$$\operatorname{tg}(D'-D) = \frac{\Pi_0 \rho (\cos \Phi' \cos H \operatorname{sen} D - \operatorname{sen} \Phi' \cos D)}{r - \Pi_0 \rho (\cos \Phi' \cos H \cos D + \operatorname{sen} \Phi' \operatorname{sen} D)} \qquad \textbf{(7.17)}$$

Si el astro M se encuentra muy alejado (caso de planetas y cometas), $\underline{\Pi_0 \rho}$ es un infinitésimo frente a r y está justificado el empleo de fórmulas diferenciales que simplifican los cálculos:

$$d\vec{r} = \vec{r}' - \vec{r} = -\Pi_0 \vec{\rho} \qquad \textbf{(7.18)}$$

En la figura aparecen los triedros (x, y, z), (x', y', z') y (x'', y'', z'') relacionados mediante los giros:

$$(x, y, z) \xrightarrow{R_3(H)} (x', y', z') \xrightarrow{R_2(90^o - D)} (x'', y'', z'')$$

de modo que:

$$d\vec{r}'' = R_2(90^o\text{-}D) R_3(H)\, d\vec{r} \qquad \textbf{(7.19)}$$

En el triedro(xyz) :

$$d\vec{r} = -\Pi_0 \vec{\rho} = \begin{pmatrix} -\Pi_0 \rho \cos\Phi' \\ 0 \\ -\Pi_0 \rho\, sen\Phi' \end{pmatrix} \qquad \textbf{(7.20)}$$

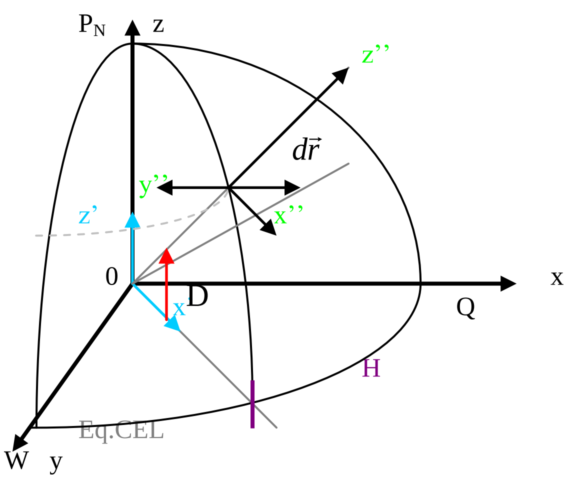
y en (x''y''z''):

$$d\vec{r}'' = \begin{pmatrix} -r\, dD \\ r\cos D\, dH \\ -dr \end{pmatrix} \qquad \textbf{(7.21)}$$

Por tanto:

$$\begin{pmatrix} -r\, dD \\ r\cos D\, dH \\ -dr \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} senD & o & -\cos D \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos D & 0 & senD \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos H & senH & 0 \\ -senH & \cos H & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\Pi_0 \rho \cos\Phi' \\ 0 \\ -\Pi_0 \rho\, sen\Phi' \end{pmatrix} \qquad \textbf{(7.22)}$$

ESFERA DE DIRECCIONES



Desarrollando resulta:

$$\left.\begin{aligned} -r\ dD &= -\Pi_0 \rho\,(\cos\Phi' senD \cos H - sen\Phi' \cos D) \\ r\cos D\ dH &= \Pi_0 \rho \cos\Phi' senH \\ -dr &= -\Pi_0 \rho\,(\cos\Phi' \cos D \cos H + sen\Phi' senD) \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(7.23)}$$

De esta fórmulas (7.23) solo interesan las dos primeras ecuaciones, que permiten calcular dD y dH.

Dado que D≅D’ y H≅H’ , en estas fórmulas y en lo que sigue es indiferente usar coordenadas topocéntricas (H’, D’) o geocéntricas (H, D).

Concretamente se introduce en (7.23) un ángulo auxiliar γ tal que:

$$\mathrm{tg}\ \gamma = \mathrm{tg}\ \Phi' \mathrm{sen}\ H$$

y se obtiene:

$$\left.\begin{aligned} -r\ dD &= -\Pi_0 \rho\ sen\Phi' \frac{sen(\gamma - D)}{sen\gamma} \\ r\cos D\ dH &= \Pi_0 \rho \cos\Phi' senH \end{aligned}\right\}$$

Luego:

$$\left.\begin{aligned} -\underline{dH} = H - H' &= \frac{-\Pi_0 \rho \cos\Phi' \sec D\ senH}{r} \qquad \text{(a)} \\ -\underline{dD} = D - D' &= \frac{\Pi_0 \rho\ sen\Phi' sen(\gamma - D) \operatorname{cosec}\gamma}{r} \qquad \text{(b)} \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(7.24)}$$

En (7.24-a) se suele dividir por 15 para que el resultado venga expresado en segundos de tiempo (ya que r se mide en u.a y Π_0 en segundos de arco).

✦Para corregir de paralaje diurna en coordenadas ecuatoriales basta recordar que:

dA = - dH

y aplicar (7.24-a). La corrección en declinación sigue siendo (7.24-b).

A los numeradores de (7.24-a) y (7.24-b) se les denomina factores parelácticos:

FACTOR PARALÁCTICO EN ASCENSIÓN RECTA:

$$p_A = \frac{1}{15(''/s)} \Pi_0^{('')} \rho(u,a) \cos\Phi' \sec D\ senH(s)\ (u.a)$$

FACTOR PARALÁCTICO EN DECLINACIÓN:

$$p_D = \Pi_0^{('')} \rho(u.a) sen\Phi' sen(\gamma - D) \operatorname{cosec}\gamma\ ('')\ (u.a)$$

Con esta notación se tiene:

$$A = A' + \frac{p_A}{r} \qquad \textbf{(7.25)} \qquad\qquad D = D' + \frac{p_D}{r} \qquad \textbf{(7.26)}$$

En los Anuarios Astronómicos figuran los factores $\underline{\frac{1}{15}\Pi_0 \rho \cos\Phi'}$, $\underline{\Pi_0\ \rho\ sen\Phi'}$, λ, relativos a los principales Observatorios del mundo (MPC).

Estas últimas fórmulas permiten calcular r: observando M desde dos puntos distintos, en un mismo instante, será:

$$A = A_1' + \frac{p_{A1}}{r} = A_2' + \frac{p_{A2}}{r} \;\;,, \;\; D = D_1' + \frac{p_{D1}}{r} = D_2' + \frac{p_{D2}}{r}$$

Debe obtenerse el mismo valor de r a partir de las A y las D.