Pembahasan Soal

OGN 2016

OLIMPIADE GURU NASIONAL KHUSUS GURU MATEMATIKA SMA

OGN Matematika SMA

(Olimpiade Guru Nasional Tingkat Provinsi)

Disusun oleh:

Pak Anang

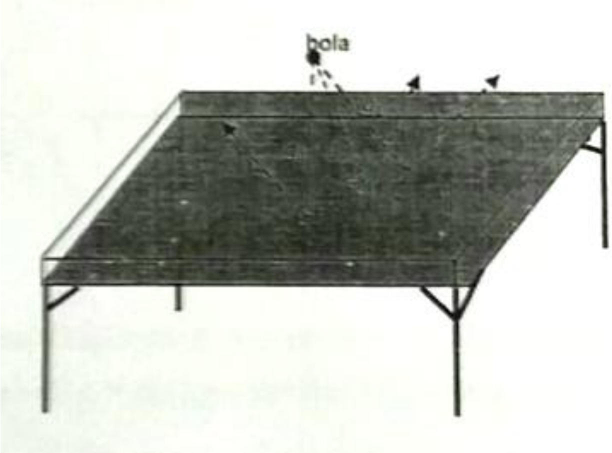
PEMBAHASAN SOAL
OLIMPIADE GURU MATEMATIKA SMA
TINGKAT PROVINSI
AGUSTUS 2016
By Pak Anang (http://pak-anang.blogspot.com)

1. Pak Rahmat akan melakukan proses pembelajaran materi "perbandingan nilai-nilai trigonometri, $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, dan $\tan\alpha$". Untuk menjembatani ke materi itu, Pak Rahmat akan memanfaatkan materi sebelumnya yang sudah dikuasai oleh siswa. Tulislah materi prasyarat paling tepat dan permasalahannya, yang mengantarkan dengan baik ke materi perbandingan nilai-nilai trigonometri !

   Pembahasan:
   Materi prasyarat yang paling tepat untuk materi perbandingan nilai-nilai trigonometri adalah:
   - Unsur-unsur segitiga siku-siku
   - Teorema Pythagoras
   - Kesebangunan

   Contoh permasalahan penggunaan perbandingan trigonometri adalah menghitung ketinggian gedung dengan mengukur jarak ke gedung dan sudut elevasinya.

2. Pak Fauzan sedang melakukan proses pembelajaran “jarak dari titik ke bidang” dengan lintasan belajar sebagai berikut:



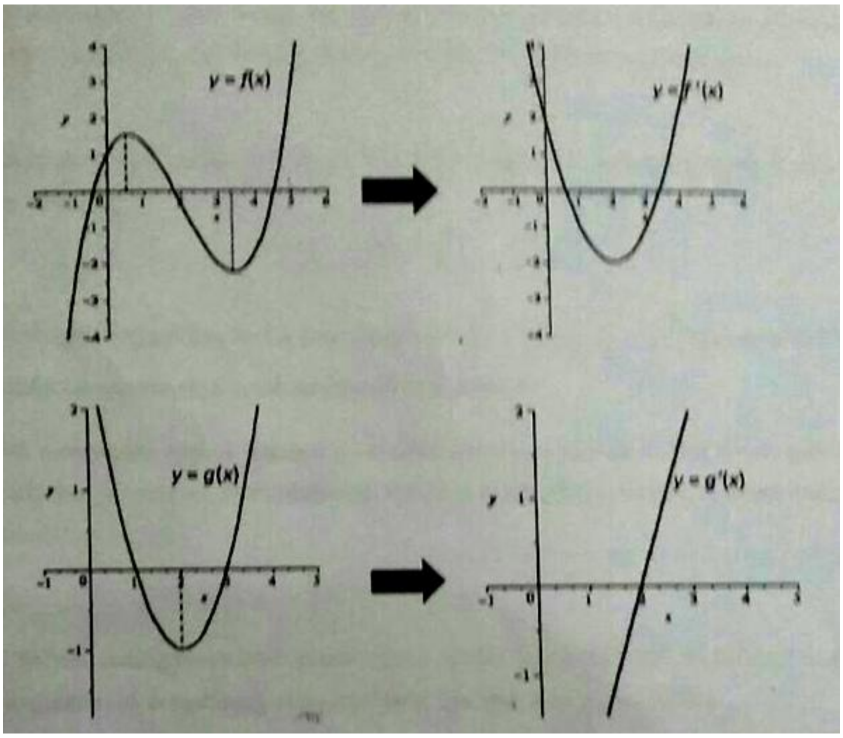
a. Guru menyajikan konteks yang berkaitan dengan jarak dari titik kebidang berupa lintasan bola tenis meja pada lapangan seperti gambar di samping ini.
b. Guru bertanya kepada siswa apakah lintasan g_1, g_2 atau g_2 merupakan lintasan terpendek dari bola ke lapangan ? Jika ketiganya bukan terpendek siswa diminta untuk membuat (mengkonstruksi) lintasan bola yang terpendek ke lapangan.
c. Siswa menyebutkan ciri-ciri lintasan bola terpendek itu, dan guru mendefisinikan panjang lintasan terpendek dari bola ke lapangan itu sebagai jarak dari titik ke bidang.

Pendekatan pembelajaran yang dilakukan oleh Pak Fauzan adalah … sebab ….

Pembahasan:

Pendekatan pembelajaran yang dilakukan oleh Pak Fauzan adalah pendekatan kontekstual, karena pak Fauzan menggunakan contoh permasalahan pada kehidupan nyata.

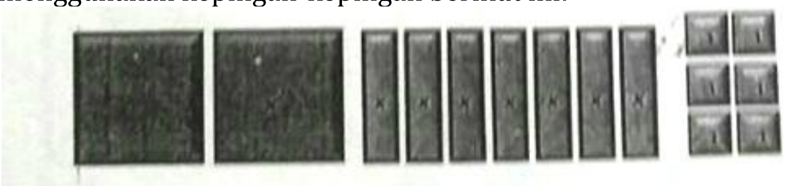
3. Pak Wibisono sedang melakukan proses pembelajaran pokok bahasan turunan fungsi tepatnya *"fungsi naik dan fungsi turun"* diawali dengan menyajikan grafik suatu fungsi dan grafik fungsi turunannya seperti gambar di bawah ini (grafik diplot menggunakan software maple).



Dari sajian fakta-fakta di atas seharusnya muncul pertanyaan dari siswa. Pertanyaan apa yang paling bagus yang mengarah pada pencapaian tujuan pembelajaran ?

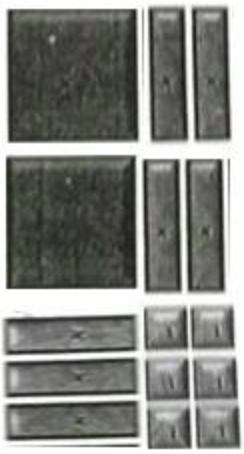
Pembahasan:
Pertanyaan yang paling bagus yang dapat mengarahkan siswa pada pencapaian tujuan pembelajaran tentang fungsi naik dan turun adalah harusnya muncul dari siswa adalah, "Mengapa pada saat $f'(x) = 0$, fungsi $f(x)$ berada di titik puncaknya?".
Agar siswa dapat mengetahui kapan fungsi naik dan kapan fungsi turun, maka siswa harus memahami dulu dimanakah letak titik stasioner, yaitu titik yang menjadi batas interval pada garis bilangan fungsi turunan pertama.

4. Ibu Nuraeni akan memberikan pemahaman mengapa $2x^2 + 7x + 6 = (2x + 3)(x + 2)$, dengan menggunakan kepingan-kepingan berikut ini:



yang menyatakan bentuk kuadrat $2x^2 + 7x + 6$.
Susun kepingan-kepingan itu sehingga mendapatkan bentuk $(2x + 3)(x + 2)$!

Pembahasan



5. Di bawah ini adalah matriks-matriks untuk berbagai transformasi.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

dan yang lainnya.
Berikanlah cara termudah memahami masing-masing matriks kaitannya dengan transformasinya, agar siswa tidak mengingatnya hanya sekedar hapal (tanpa pemahaman) !

Pembahasan:
Cara termudah memahami masing-masing matriks dalam kaitannya dengan transformasi adalah menggunakan gambar geometri transformasi tersebut.

Misalnya, transformasi terhadap sumbu X, maka dari gambar akan diperoleh:

$$A(x, y) \xrightarrow{M_{sbX}} A'(x, -y)$$

sehingga,

$$\begin{aligned} x' &= 1x + 0y \\ y' &= 0x - 1y \end{aligned} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Jadi, matriks transformasi yang berkaitan dengan transformasi pencerminan terhadap sumbu X adalah $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

6. Seorang guru matematika sedang mendiskusikan bagaimana mencari matriks X dalam persamaan

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

yaitu dengan mengalikan kedua ruas dengan invers matriks $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$ dari sebelah kiri, kemudian memprosesnya untuk mendapatkan matriks X.

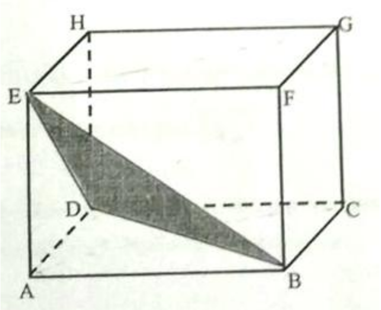
Untuk mengetahui apakah gagasan itu sudah dipahami dengan baik oleh siswa, guru itu mengajukan pertanyaan (permasalahan). Pertanyaan apakah yang paling tepat untuk maksud tersebut ?

Pembahasan:

Permasalahan mencari matriks X dalam diskusi tersebut adalah menggunakan konsep invers matriks, sehingga pertanyaan yang paling tepat untuk menguji apakah siswa sudah memahami gagasan dalam mencari matriks X tersebut adalah sifat perkalian matriks dengan inversnya.

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

7. Pak Sofyan sedang melakukan pembelajaran materi *"jarak titik ke bidang"* dengan menyajikan contoh perhitungan mencari jarak dari titik A ke bidang BDE.



Berdasarkan pengalaman mengajarnya, Pak Sofyan bisa memperkirakan di mana letak kesulitan siswa dalam menghitung jarak itu. Tuliskan kesulitan siswa tersebut !

Pembahasan:
Kesulitan yang dihadapi siswa dalam menghitung jarak titik A ke BDE adalah siswa akan kesulitan dalam menentukan garis yang melalui titik A dan menembus tegak lurus bidang BDE.

8. Seorang detektif melakukan intrograsi kepada enam orang terkait kasus pencurian yang dilakukan oleh dua orang. Hasil intrograsi tersebut adalah:
A berkata “B dan C”, D berkata “E dan F”, E berkata “A dan B”, B berkata “F dan D”, C berkata “B dan E”, F tidak berkata apa-apa. Jika empat dari lima orang yang diintrograsi tersebut menyebutkan satu nama yang benar dan satu nama yang salah sedangkan orang kelima menyebutkan nama yang salah kedua-duanya, maka kedua pencuri tersebut adalah ....

Pembahasan:
Perhatikan tabel berikut:

	A	B	C	D	E	F
A		√	√			
B				√		√
C		√			√	
D					√	√
E	√	√				
Jumlah	1	3	1	1	2	2

Karena empat dari lima orang tersebut menyebutkan satu nama benar dan satu nama salah, maka jumlah benar haruslah 4, sehingga pasangan pencuri yang mungkin BENAR adalah:
- A dan B
- B dan C
- B dan D
- E dan F

Namun, karena tidak ada orang yang mampu menyebutkan nama benar kedua-duanya, maka kemungkinan berikut pasti SALAH, yaitu:
- A dan B
- B dan C
- E dan F

Perhatikan tabel berikut,

	A	B	C	D	E	F	Keterangan
A		√	√				1 benar, 1 salah
B				√		√	1 benar, 1 salah
C		√			√		1 benar, 1 salah
D					√	√	2 salah
E	√	√					1 benar, 1 salah

Jadi, satu-satunya kemungkinan dua orang pencuri tersebut adalah B dan D.

9. Tentukan sisa dari 7^{1203} dibagi 1500

   Pembahasan:
   Menggunakan fungsi Euler phi,
   Karena $1500 = 2^2 \times 3 \times 5^3$, maka:
   $$\varphi(1500) = 1500\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right) = 400$$

   Sehingga, diperoleh:
   $$7^{400} \equiv 1 \pmod{1500}$$

   Jadi,
   $$\begin{aligned} 7^{1203} &= (7^{400})^3 \cdot 7^3 \pmod{1500} \\ &= 7^3 \pmod{1500} \\ &= 343 \end{aligned}$$

10. Diberikan tiga barisan bilangan bulat berikut ini
6, 9, 12, 15, … , 10002
7, 12, 17, 22, … , 10007
8, 15, 22, 29, … , 10004
Tentukan banyaknya bilangan dimana bilangan tersebut muncul pada ketiga barisan di atas.

Pembahasan:
Dengan menggunakan Chinese Remainder Theorem, soal tersebut sama halnya dengan mencari nilai x pada sistem kongruen linear berikut:

$$x \equiv 0 \pmod 3$$
$$x \equiv 2 \pmod 5$$
$$x \equiv 1 \pmod 7$$

Perhatikan, bilangan 3, 5, 7 adalah bilangan prima, sehingga:

$$n = 3 \times 5 \times 7 = 105$$

Maka,

$$N_1 = \frac{105}{3} = 35$$
$$N_2 = \frac{105}{5} = 21$$
$$N_3 = \frac{105}{7} = 15$$

Diperoleh,

$$35x_1 \equiv 1 (\text{mod } 3) \Rightarrow x_1 = 2 (\text{mod } 3)$$
$$21x_2 \equiv 1 (\text{mod } 5) \Rightarrow x_2 = 1 (\text{mod } 5)$$
$$15x_3 \equiv 1 (\text{mod } 7) \Rightarrow x_3 = 1 (\text{mod } 7)$$

Oleh karena itu,

$$x \equiv (0)(35)(1) + (2)(21)(1) + (1)(15)(1) \pmod{105}$$
$$\Leftrightarrow x \equiv 57 \pmod{105}$$

Maka, bilangan yang muncul pada ketiga barisan di atas merupakan barisan aritmetika dengan suku pertama $a = 57$ dan beda $b = 105$.

Diperoleh, $U_n = 57 + (n-1)105$

Padahal, suku terakhir yang masih mungkin menjadi nilai U_n adalah 10002, maka:

$$U_n \leq 10002 \Rightarrow 57 + (n-1)105 \leq 10002$$
$$\Leftrightarrow 105n \leq 10050$$
$$\Leftrightarrow n \leq 95{,}7$$

Jadi, banyaknya bilangan yang muncul pada ketiga barisan di atas adalah sebanyak 95 buah.

11. Tentukan semua solusi dari sistem non linear berikut ini:

$$x^2 + y^2 = 16$$
$$|x| + y = 4$$

Pembahasan:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = 16 \Rightarrow \quad x^2 &= 16 - y^2 \\ \Leftrightarrow \sqrt{x^2} &= \sqrt{16 - y^2} \\ \Leftrightarrow \quad |x| &= \sqrt{16 - y^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |x| + y = 4 \Rightarrow \sqrt{16 - y^2} + y &= 4 \\ \Leftrightarrow \quad \sqrt{16 - y^2} &= 4 - y \\ \Leftrightarrow \quad 16 - y^2 &= 16 - 8y + y^2 \\ \Leftrightarrow \quad 2y^2 - 8y &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad y^2 - 4y &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad y(y - 4) &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad y = 0 \text{ atau } y &= 4 \end{aligned}$$

Untuk $y = 0 \Rightarrow$
$$\begin{aligned} x^2 + 0^2 &= 16 \\ \Leftrightarrow \quad x^2 - 16 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x + 4)(x - 4) &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad x = -4 \text{ atau } x &= 4 \end{aligned}$$
Jadi diperoleh solusi $(-4, 0)$ dan $(4, 0)$

Untuk $y = 4 \Rightarrow$
$$\begin{aligned} x^2 + 4^2 &= 16 \\ \Leftrightarrow x^2 + 16 &= 16 \\ \Leftrightarrow \quad x^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad x &= 0 \end{aligned}$$
Jadi diperoleh solusi $(0, 4)$

Sehingga, semua solusi sistem non linear tersebut ada 3 buah yaitu $\{(-4, 0), (0, 0), (4, 0)\}$

12. Misalkan a dan b bilangan-bilangan real yang memenuhi $\frac{ab}{a^2-b^2}=\frac{1}{4}$. Tentukan semua kemungkinan nilai dari $\frac{|a^2-b^2|}{a^2+b^2}$.

Pembahasan:
Perhatikan,

$$\frac{ab}{a^2-b^2}=\frac{1}{4}\Rightarrow a^2-b^2=4ab$$

$$\begin{aligned}\frac{ab}{a^2-b^2}=\frac{1}{4}\Rightarrow\quad \frac{(ab)^2}{(a^2-b^2)^2}&=\frac{1}{16}\\ \Leftrightarrow \frac{(ab)^2}{(a^2+b^2)^2-4(ab)^2}&=\frac{1}{16}\\ \Leftrightarrow\quad (a^2+b^2)^2&=20(ab)^2\\ \Leftrightarrow\quad a^2+b^2&=2ab\sqrt{5}\end{aligned}$$

Jadi,

$$\frac{|a^2-b^2|}{a^2+b^2}=\frac{4ab}{2ab\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2}{5}\sqrt{5}$$

Cara Alternatif:
Perhatikan,

$$\frac{ab}{a^2-b^2}=\frac{1}{4}$$

maka jelas bahwa $a\neq 0, b\neq 0$, dan $a\neq b$.

Sehingga, misal $\frac{a}{b}=p$, maka

$$\begin{aligned}\frac{ab}{a^2-b^2}=\frac{1}{4}\Rightarrow\quad \frac{p}{p^2-1}&=\frac{1}{4}\\ \Leftrightarrow\ p^2-4p&=1\\ \Leftrightarrow (p-2)^2&=5\\ \Leftrightarrow\quad p&=2\pm\sqrt{5}\end{aligned}$$

Pandang $\frac{|a^2-b^2|}{a^2+b^2}$ dalam bentuk p, sehingga diperoleh:

$$\frac{|a^2-b^2|}{a^2+b^2}=\frac{|p^2-1|}{p^2+1}$$

Sehingga,
Untuk $\mathrm{p}=2+\sqrt{5}$, diperoleh:

$$\frac{|a^2-b^2|}{a^2+b^2}=\frac{\left|\left(2+\sqrt{5}\right)^2-1\right|}{\left(2+\sqrt{5}\right)^2+1}=\frac{8+4\sqrt{5}}{10+4\sqrt{5}}=\frac{2}{5}\sqrt{5}$$

Untuk $\mathrm{p}=2-\sqrt{5}$, diperoleh:

$$\frac{|a^2-b^2|}{a^2+b^2}=\frac{\left|\left(2-\sqrt{5}\right)^2-1\right|}{\left(2-\sqrt{5}\right)^2+1}=\frac{4\sqrt{5}-8}{10-4\sqrt{5}}=\frac{2}{5}\sqrt{5}$$

Jadi, kemungkinan nilai $\frac{|a^2-b^2|}{a^2+b^2}$ hanya $\frac{2}{5}\sqrt{5}$.

13. Misalkan a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 bilangan-bilangan real sedemikian sehingga $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 20$. Tentukan nilai terkecil dari

$$\sum_{1 \le i < j \le 5} \lfloor a_i + a_j \rfloor$$

dimana $\lfloor x \rfloor =$ bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x.

Pembahasan:
Perhatikan,

$$\sum_{1 \le i < j \le 5} \lfloor a_i + a_j \rfloor = \lfloor a_1 + a_2 \rfloor + \lfloor a_1 + a_3 \rfloor + \lfloor a_1 + a_4 \rfloor + \lfloor a_1 + a_5 \rfloor + \lfloor a_2 + a_3 \rfloor + \lfloor a_2 + a_4 \rfloor$$
$$+ \lfloor a_2 + a_5 \rfloor + \lfloor a_3 + a_4 \rfloor + \lfloor a_3 + a_5 \rfloor + \lfloor a_4 + a_5 \rfloor$$

Misal $0 \le \delta < 1$, maka untuk setiap a bilangan real berlaku:
$a = \lfloor a \rfloor + \delta \Leftrightarrow \lfloor a \rfloor = a - \delta$

Perhatikan, pada soal diketahui bahwa $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 20$, maka bentuk tersebut dapat dituliskan sebagai bentuk berikut,

$$\begin{aligned} & a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 20 \\ \Leftrightarrow \quad & \sum_{1 \le k \le 5} a_k = 20 \\ \Leftrightarrow \quad & \sum_{1 \le k \le 5} \lfloor a_k \rfloor + \sum_{1 \le k \le 5} \delta_k = 20 \end{aligned}$$

Padahal $\sum_{1 \le k \le 5} \lfloor a_k \rfloor$ adalah bilangan bulat, maka $\sum_{1 \le k \le 5} \delta_k$ juga merupakan bilangan bulat.

Perhatikan, karena $0 \le \delta < 1$,maka $0 \le \sum_{1 \le k \le 5} \delta_k < 5$.

Sehingga, ada 5 kemungkinan nilai $\sum_{1 \le k \le 5} \delta_k$, yaitu $\{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Perhatikan juga bahwa,
$\lfloor a_1 + a_2 \rfloor = \lfloor a_1 \rfloor + \lfloor a_2 \rfloor + \lfloor \delta_1 + \delta_2 \rfloor$

Sehingga diperoleh,
$\lfloor a_1 + a_2 \rfloor = (a_1 + a_2) - (\delta_1 + \delta_2) + \lfloor \delta_1 + \delta_2 \rfloor$

dimana $0 \le \delta_1 + \delta_2 < 2$, sehingga ada 2 kemungkinan nilai $\lfloor \delta_1 + \delta_2 \rfloor$, yaitu $\{0, 1\}$.

Padahal,
$\lfloor a \rfloor = a - \delta \Leftrightarrow \lfloor a_1 + a_2 \rfloor = (a_1 + a_2) - \delta$

Sehingga,
$$\begin{aligned} \lfloor a_1 + a_2 \rfloor = (a_1 + a_2) - \delta \Rightarrow \ & (a_1 + a_2) - (\delta_1 + \delta_2) + \lfloor \delta_1 + \delta_2 \rfloor = (a_1 + a_2) - \delta \\ \Leftrightarrow \ & \delta = (\delta_1 + \delta_2) - \lfloor \delta_1 + \delta_2 \rfloor \end{aligned}$$

Jadi,
$0 \le (\delta_1 + \delta_2) - \lfloor \delta_1 + \delta_2 \rfloor < 1$

Perhatikan,

$$\begin{aligned}\sum_{1\le i<j\le 5} \lfloor a_i + a_j \rfloor &= \sum_{1\le i<j\le 5} \left((a_i + a_j) - (\delta_i + \delta_j) + \lfloor \delta_i + \delta_j \rfloor \right) \\ &= \left(4 \sum_{1\le k\le 5} a_k \right) - \left(4 \sum_{1\le k\le 5} \delta_k \right) + \left(\sum_{1\le i<j\le 5} \lfloor \delta_i + \delta_j \rfloor \right) \\ &= 80 - \left(4 \sum_{1\le k\le 5} \delta_k \right) + \left(\sum_{1\le i<j\le 5} \lfloor \delta_i + \delta_j \rfloor \right)\end{aligned}$$

Sehingga, terdapat lima kasus:

Kasus 1:

$$\sum_{1\le k\le 5} \delta_k = 0$$

Maka,

$$\lfloor \delta_i + \delta_j \rfloor = 0$$

Sehingga,

$$\sum_{1\le i<j\le 5} \lfloor \delta_i + \delta_j \rfloor = 0$$

Jadi,

$$\begin{aligned}\sum_{1\le i<j\le 5} \lfloor a_i + a_j \rfloor &= 80 - \left(4 \sum_{1\le k\le 5} \delta_k \right) + \left(\sum_{1\le i<j\le 5} \lfloor \delta_i + \delta_j \rfloor \right) \\ &= 80 - 0 + 0 \\ &= 80\end{aligned}$$

Kasus 2:

$$\sum_{1\le k\le 5} \delta_k = 1$$

Maka,

$$\lfloor \delta_i + \delta_j \rfloor < 0 \text{ untuk semua } i, j$$

Sehingga,

$$\sum_{1\le i<j\le 5} \lfloor \delta_i + \delta_j \rfloor = 0$$

Jadi,

$$\begin{aligned}\sum_{1\le i<j\le 5} \lfloor a_i + a_j \rfloor &= 80 - \left(4 \sum_{1\le k\le 5} \delta_k \right) + \left(\sum_{1\le i<j\le 5} \lfloor \delta_i + \delta_j \rfloor \right) \\ &= 80 - 4 \cdot 1 + 0 \\ &= 76\end{aligned}$$

Kasus 3:

$$\sum_{1\le k\le 5} \delta_k = 2$$

Maka,

Agar minimum pilih $\lfloor \delta_i + \delta_j \rfloor = 0,4$ untuk semua i, j

Sehingga,

$$\sum_{1\le i<j\le 5} \lfloor \delta_i + \delta_j \rfloor = 0$$

Jadi,

$$\begin{aligned}\sum_{1\le i<j\le 5} \lfloor a_i + a_j \rfloor &= 80 - \left(4\sum_{1\le k\le 5} \delta_k\right) + \left(\sum_{1\le i<j\le 5} \lfloor \delta_i + \delta_j \rfloor\right)\\ &= 80 - 4\cdot 2 + 0\\ &= 72\end{aligned}$$

Kasus 4:

$$\sum_{1\le k\le 5} \delta_k = 3$$

Maka,

Agar minimum pilih $\lfloor \delta_i + \delta_j \rfloor > 1$ harus juga seminium mungkin.

Misal banyak $\lfloor \delta_i + \delta_j \rfloor > 1$ adalah m, maka

$$\begin{aligned}\sum_{1\le i<j\le 5} \lfloor \delta_i + \delta_j \rfloor = 2m + 10 - m \Rightarrow\ 4\sum_{1\le k\le 5} \delta_k &< m + 10\\ \Leftrightarrow \qquad 12 &< m + 10\\ \Leftrightarrow \qquad m &> 2\end{aligned}$$

Periksa $m = 3$, yang artinya ada 3 buah $\lfloor \delta_i + \delta_j \rfloor > 1$.

Akan menghasilkan kontradiksi karena ada salah satu $\lfloor \delta_i + \delta_j \rfloor < 0$

Sehingga,

$$\sum_{1\le i<j\le 5} \lfloor \delta_i + \delta_j \rfloor = 3$$

Jadi,

$$\begin{aligned}\sum_{1\le i<j\le 5} \lfloor a_i + a_j \rfloor &= 80 - \left(4\sum_{1\le k\le 5} \delta_k\right) + \left(\sum_{1\le i<j\le 5} \lfloor \delta_i + \delta_j \rfloor\right)\\ &> 80 - 4\cdot 3 + 3\\ &> 71\end{aligned}$$

Kasus 5:

$$\sum_{1\le k\le 5} \delta_k = 4$$

Maka,

Agar minimum pilih $\lfloor \delta_i + \delta_j \rfloor > 1$ harus juga seminium mungkin.

Misal banyak $\lfloor \delta_i + \delta_j \rfloor > 1$ adalah m, maka

$$\sum_{1\le i<j\le 5} \lfloor \delta_i + \delta_j \rfloor = 2m + 10 - m \Rightarrow 4 \sum_{1\le k\le 5} \delta_k < m + 10$$

$$\Leftrightarrow \quad 6 < m + 10$$

$$\Leftrightarrow \quad m > 6$$

Periksa $m = 7$, yang artinya ada 7 buah $\lfloor \delta_i + \delta_j \rfloor > 1$.

Akan menghasilkan kontradiksi karena ada salah satu $\lfloor \delta_i + \delta_j \rfloor < 0$

Sehingga,

$$\sum_{1\le i<j\le 5} \lfloor \delta_i + \delta_j \rfloor = 7$$

Jadi,

$$\begin{aligned}\sum_{1\le i<j\le 5} \lfloor a_i + a_j \rfloor &= 80 - \left(4 \sum_{1\le k\le 5} \delta_k\right) + \left(\sum_{1\le i<j\le 5} \lfloor \delta_i + \delta_j \rfloor\right)\\ &> 80 - 4 \cdot 4 + 7\\ &> 71\end{aligned}$$

Jadi dari kasus 1 sampai dengan kasus 5 diperoleh nilai minimumnya adalah 72.

14. Tentukan sebuah polinomial monik tak nol $P(x)$ dengan koefisien bilangan bulat dan berderajat minimal sedemikian sehingga $P\left(1-\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}\right)=0$. (Sebuah polinomial dikatakan monik jika koefisien dari pangkat tertinggi variabelnya bernilai 1, yaitu berbentuk $P(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0$)

Pembahasan:

Perhatikan,

$$x=1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$$
$$x^2=3\left(\sqrt[3]{4}-1\right)$$
$$x^3=9\left(\sqrt[3]{2}-1\right)$$

Sehingga, diperoleh:

$$\begin{aligned} x^3=9\left(\sqrt[3]{2}-1\right) \Rightarrow\quad & x^3=9\left(\sqrt[3]{2}-x\right) \\ \Leftrightarrow\quad & x^3=9\left(\left(\sqrt[3]{4}-1\right)-x+1\right) \\ \Leftrightarrow\quad & x^3=9\left(\frac{1}{3}x^2-x+1\right) \\ \Leftrightarrow\quad & x^3=3x^2-9x+9 \\ \Leftrightarrow\quad & x^3-3x^2+9x-9=0 \end{aligned}$$

15. Tentukan nilai maksimum dan minimum dari
$$f(x, y) = 2y + x$$
dimana $x, y \in \Re$ dan $y^2 + xy - 1 = 0$.

Pembahasan:

$$y^2 + xy - 1 = 0 \Rightarrow xy = 1 - y^2$$
$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{y} - y$$

$$f(x, y) = 2y + x \Rightarrow f(y) = 2y + \left(\frac{1}{y} - y\right)$$
$$\Leftrightarrow f(y) = y + \frac{1}{y}$$

Titik stasioner $f(y)$ akan dicapai saat $f'(y) = 0$, sehingga:

$$f'(y) = 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{y^2} = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad y^2 = 1$$
$$\Leftrightarrow \quad y = \pm 1$$

Periksa turunan kedua $f(y)$, yaitu $f''(y)$

$$f''(y) = \frac{2}{y^3}$$

$f''(-1) = -2 < 0$, berarti $f(x, y)$ akan mencapai maksimum lokal di $y = -1 \Rightarrow x = 0$
$f''(1) = 2 > 0$, berarti $f(x, y)$ akan mencapai minimum lokal di $y = 1 \Rightarrow x = 0$

Jadi,
Nilai maksimum lokal f adalah $f(0, -1) = -2$
Nilai maksimum lokal f adalah $f(0, 1) = 2$

16. Sepasang dadu enam-sisi diberi label sedemikian sehingga satu dadu hanya memiliki label bilangan genap, yaitu 2, 2, 4, 4, 6, 6 dan dadu lainnya hanya memiliki label bilangan ganjil, yaitu 1, 1, 3, 3, 5, 5. Kedua dadu tersebut dilempar bersama-sama. Berapakah probabilitas bahwa jumlah dua bilangan yang muncul pada kedua dadu berjumlah 7?

Pembahasan:
Perhatikan, tabel berikut,

	1	**1**	**3**	**3**	**5**	**5**
2	(2, 1)	(2, 1)	(2, 3)	(2, 3)	(2, 5)	(2, 5)
2	(2, 1)	(2, 1)	(2, 3)	(2, 3)	(2, 5)	(2, 5)
4	(4, 1)	(4, 1)	(4, 3)	(4, 3)	(4, 5)	(4, 5)
4	(4, 1)	(4, 1)	(4, 3)	(4, 3)	(4, 5)	(4, 5)
6	(6, 1)	(6, 1)	(6, 3)	(6, 3)	(6, 5)	(6, 5)
6	(6, 1)	(6, 1)	(6, 3)	(6, 3)	(6, 5)	(6, 5)

Diperoleh,

$S = \{(2,1),(2,3),(2,5),(4,1),(4,3),(4,5),(6,1),(6,3),(6,5)\}$
$n(S) = 9$
$A = \{(2,5),(4,3),(6,1)\}$
$n(A) = 3$

Jadi,

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

17. Misal satu dari 500 orang pada suatu populasi mengidap suatu penyakit tertentu tanpa menampakkan gejala. Terdapat suatu uji darah untuk mendeteksi penyakit ini. Untuk orang yang mengidap penyakit ini, uji tersebut selalu memberikan nilai positif. Sementara, untuk orang yang tidak mengidap penyakit ini, uji tersebut memberikan *false positive* sebesar 2%. Dengan kata lain, untuk orang yang tidak mengidap penyakit, uji tersebut memberikan nilai positif sebesar 2%. Berapakah probabilitas bahwa seseorang benar mengidap penyakit dari orang-orang yang mendapatkan hasil uji positif?

Pembahasan:
Peluang suatu orang mengidap penyakit adalah

$$P(M) = \frac{n(M)}{n(S)} \times 100\% = \frac{1}{500} \times 100\% = 0{,}2\%$$

Peluang suatu orang tidak mengidap penyakit adalah:

$$P(M^c) = 1 - P(M) = 100\% - 0{,}2\% = 99{,}8\%$$

Peluang suatu orang mendapatkan uji darah positif dengan syarat orang tersebut mengidap penyakit adalah $P(P\|M) = 100\%$	Peluang suatu orang mendapatkan uji darah positif dengan syarat orang tersebut tidak mengidap penyakit adalah $P(P\|M^c) = 2\%$
Peluang suatu orang mendapatkan uji darah negatif dengan syarat orang tersebut mengidap penyakit adalah $P(P^c\|M) = 0\%$	Peluang suatu orang mendapatkan uji darah negatif dengan syarat orang tersebut tidak mengidap penyakit adalah $P(P^c\|M^c) = 98\%$

Perhatikan ilustrasi pada tabel berikut ini,

	Mengidap $(M) = 0{,}2\%$	**Tidak Mengidap $(M^c) = 98{,}8\%$**
Positif (P)	$P(P \cap M) = P(P\|M) \times P(M) = 100\% \times 0{,}2\% = 0{,}2\%$	$P(P \cap M^c) = P(P\|M) \times P(M^c) = 2\% \times 99{,}8\% = 1{,}996\%$
Negatif (P^c)	$P(P^c \cap M) = P(P^c\|M) \times P(M) = 0\% \times 0{,}2\% = 0\%$	$P(P^c \cap M^c) = P(P^c\|M^c) \times P(M^c) = 98\% \times 99{,}8\% = 97{,}804\%$

Dari peluang kejadian bersyarat diperoleh:

$$P(M|P) \times P(P) = P(P|M) \times P(M) \Rightarrow P(M|P) = \frac{P(P|M) \times P(M)}{P(P)}$$

Padahal, peluang suatu orang mendapatkan uji darah positif adalah:

$$P(P) = P(P|M) \times P(M) + P(P|M) \times P(M^c) = 0{,}2\% + 1{,}996\% = 2{,}196\%$$

Sehingga, dari orang yang benar mengidap penyakit dengan syarat mendapatkan nilai uji darah positif adalah:

$$P(M|P) = \frac{P(P|M) \times P(M)}{P(P)} = \frac{0{,}2\%}{2{,}196\%} = 0{,}091\%$$

18. Pada suatu universitas, devisi ilmu matematika terdiri dari departemen matematika, statistika, dan ilmu komputer. Terdapat dua orang professor laki-laki dan dua orang professor perempuan pada masing-masing departemen tersebut. Suatu komite terdiri dari enam orang professor akan dibentuk dimana komite tersebut harus terdiri dari tiga professor laki-laki dan tiga professor perempuan serta harus juga beranggotakan dua professor dari masing-masing departemen. Tentukan jumlah komite yang mungkin dibentuk yang memenuhi syarat-syarat yang telah diberikan.

Pembahasan:
Perhatikan ilustrasi daftar nama professor pada tabel berikut:

DEVISI ILMU MATEMATIKA			Keterangan
Dept. Mat.	**Dept. Stat.**	**Dept. Ilkom.**	
A	E	I	Laki-laki
B	F	J	
C	G	K	Perempuan
D	H	L	

Akan dipilih enam orang, dimana susunan harus terdiri dari
- 3 professor laki-laki dan 3 profesor perempuan.
- 2 professor dari masing-masing departemen.

Ada dua kasus yang mungkin terjadi yaitu:
Kasus 1.

DEVISI ILMU MATEMATIKA			Keterangan
Dept. Mat.	**Dept. Stat.**	**Dept. Ilkom.**	
Laki-laki	Laki-laki	Laki-laki	Terpilih 6 professor pada setiap departemen terdiri dari 1 laki-laki dan 1 perempuan.
Perempuan	Perempuan	Perempuan	

Banyak kemungkinan terpilih 6 professor pada setiap departemen terdiri dari 1 professor laki-laki dan 1 professor perempuan, yaitu sebanyak $2^6 = 64$ kemungkinan.

Kasus2.

DEVISI ILMU MATEMATIKA			Keterangan
Dept. Mat.	**Dept. Stat.**	**Dept. Ilkom.**	
Laki-laki	Laki-laki	Perempuan	Terpilih 6 professor dan 2 departemen hanya terdiri dari laki-laki saja dan perempuan saja.
Laki-laki	Perempuan	Perempuan	

Tinjau banyak professor laki-laki pada setiap kelompok, terdapat $3! = 6$ buah kemungkinan kombinasi banyak laki-laki pada tiap Departemen. $\{(0,1,2), (0,1,2), (1,0,2), (1,2,0), (2,0,1), (2,1,0)\}$.

Tinjau salah satu kemungkinan kombinasi banyak professor laki-laki $\{(0,1,2)\}$, sehingga diperoleh sebanyak 4 kemungkinan.

Sehingga, banyak kemungkinan pada kasus terpilih 6 professor dan 2 departemen hanya terdiri dari professor laki-laki saja dan professor perempuan saja, yaitu sebanyak $3! \times 4 = 24$ kemungkinan.

Kesimpulan:
Jadi, banyak komite yang mungkin dibentuk yang memenuhi syarat-syarat yang telah diberikan adalah $64 + 24 = 88$ kemungkinan.

19. Diberikan himpunan $S = \{1, 2, 3, \dots, n\}$, dengan $n \geq 3$. Misalkan $T = \{(x, y, z) \in S^3 | x < z \text{ dan } y < z\}$. Tentukan banyaknya anggota dari T.

    Pembahasan:
    Perhatikan, soal ini berkaitan dengan mencari banyaknya permutasi x dan$y$ dimana $x < z$ dan $y < z$. Sehingga $x \neq z$ dan $y \neq z$. Nilai z terkecil yang masih bisa dipilih adalah $z = 2$ dan nilai terbesar yang dapat dipilih adalah n.

    Misal $n = 3$,
    Dari $S = \{1, 2, 3\}$, maka nilai z yang mungkin adalah $2 \leq z \leq 3$, yaitu z hanya boleh diisi bilangan 2 dan 3 saja. maka akan diperoleh
    - Untuk $z = 2$, maka x dan y hanya boleh diisi bilangan 1. Jadi banyak anggota T menggunakan aturan perkalian adalah $1 \times 1 = 1^2$
    - Untuk $z = 3$, maka x dan y hanya boleh diisi bilangan 1 dan 2. Jadi banyak anggota T menggunakan aturan perkalian adalah $2 \times 2 = 2^2$

    Sehingga, himpunan T yang mungkin adalah:

    $$T = \left\{ \underbrace{(1,1,2)}_{\substack{z=2,\\ 1\leq x\leq 1\\ 1\leq y\leq 1}}, \underbrace{(1,1,3), (1,2,3), (2,1,3), (2,2,3)}_{\substack{z=3,\\ 1\leq x\leq 2\\ 1\leq y\leq 2}} \right\}$$

    Sehingga untuk $n = 3$, maka $n(T) = 1^2 + 2^2$
    Dapat diperluas lagi untuk $n = 4$, maka $n(T) = 1^2 + 2^2 + 3^2$
    Dan seterusnya ....

    Sehingga, apabila n kita pilih dari sebuah bilangan dimana $n \geq 3$, maka banyaknya anggota dari T, akan memenuhi:

    $$n(T) = \sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{1}{6}(n-1)(n)(2n-1)$$

20. Hitung nilai dari

$$\binom{2016}{0}+\frac{1}{2}\binom{2016}{1}+\frac{1}{3}\binom{2016}{2}+\frac{1}{4}\binom{2016}{3}+\cdots+\frac{1}{2017}\binom{2016}{2016}$$

dimana $\binom{n}{k}=\dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$

Pembahasan:

$$\begin{aligned} p &= \binom{2016}{0}+\frac{1}{2}\binom{2016}{1}+\frac{1}{3}\binom{2016}{2}+\frac{1}{4}\binom{2016}{3}+\cdots+\frac{1}{2017}\binom{2016}{2016} \\ \Rightarrow\ 2017p &= \binom{2017}{1}+\binom{2017}{2}+\binom{2017}{3}+\binom{2017}{4}+\cdots+\binom{2017}{2017} \\ \Leftrightarrow\ 2017p &= 2^{2017}-1 \\ \Leftrightarrow\qquad p &= \frac{2^{2017}-1}{2017} \end{aligned}$$

21. Budi dan Iwan memainkan suatu permainan dengan mekanisme sebagai berikut: satu kartu bilangan bulat antara 0 dan 999 dipilih dan diberikan ke Budi. Ketika menerima kartu bilangan tersebut, Budi mengkalikan bilangan tersebut dengan dua dan memberikan kartu bilangan hasilnya kepada Iwan. Ketika Iwan menerima kartu bilangan itu, dia menambahkan 50 ke bilangan tersebut dan memberikan kartu bilangan hasilnya pada Budi. Demikian seterusnya, Budi dan Iwan melakukan mekanisme yang sama. Pemenang permainan tersebut adalah orang yang terakhir yang menghasilkan bilangan lebih kecil dari 1000. Berapakah bilangan awal terkecil yang menghasilkan Budi sebagai pemenang?

Pembahasan:
Budi menang apabila menjadi orang terakhir dengan bilangan lebih kecil dari 1000.

Perhatikan, setiap Budi menerima kartu bilangan tersebut, budi mengalikan bilangan tersebut dengan dua, jadi Budi akan pasti menang apabila bilangan terakhir yang didapatnya adalah $500 \leq F(B) \leq 999$.

Fungsi yang dapat dituliskan saat bilangan diterima Budi adalah sebagai berikut:

$$500 \leq x \leq 999$$
$$500 \leq 2(x) + 50 \leq 998 \Rightarrow 225 \leq x \leq 474$$
$$500 \leq 2(2(x) + 50) + 50 \leq 998 \Rightarrow \frac{175}{2} \leq x \leq 212$$
$$500 \leq 2(2(2(x) + 50) + 50) + 50 \leq 999 \Rightarrow \frac{75}{4} \leq x \leq 81$$
$$500 \leq 2(2(2(2(x) + 50) + 50) + 50) + 50 \leq 999 \Rightarrow -\frac{125}{8} \leq x \leq \frac{31}{2}$$

Jadi, karena $-\frac{125}{8} \leq x \leq \frac{31}{2}$, memuat bilangan bulat terkecil antara 0 sampai 999, yaitu $x = 1$, maka jelas nilai bilangan awal terkecil antara 0 dan 999 yang menghasilkan Budi sebagai pemenang adalah 1.

Perhatikan ilustrasinya pada tabel berikut

Budi	Iwan	Budi	Iwan	Budi	Iwan	Budi	Iwan	Budi	Iwan

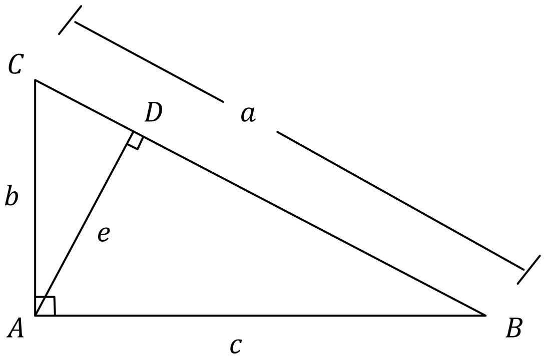
dikali 2		dikali 2		dikali 2		dikali 2		dikali 2	
1	2	52	104	154	308	358	716	766	1532
	ditambah 50		ditambah 50		ditambah 50		ditambah 50		

Menang!

Jadi, bilangan awal terkecil yang menghasilkan Budi sebagai pemenang adalah 0.

22. Diberikan segitiga ABC siku-siku di A. Misalkan AD garis tinggi dari A ke sisi miring BC. Jika panjang AB, AC, BC, AD dinotasikan secara berurutan dengan c, b, a, e. Tentukan nilai dari $\frac{1}{e}$ dalam bentuk b dan c.

Pembahasan:
Perhatikan gambar segitiga ABC yang siku-siku di A berikut:



Dari teorema Pythagoras diperoleh:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

Luas segitiga dapat dihitung dengan dua cara

$$L\Delta ABC = \frac{1}{2} AB \cdot AC$$

dan

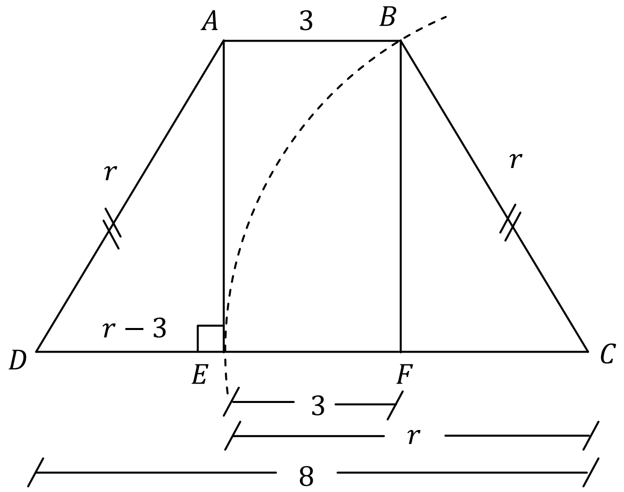
$$L\Delta ABC = \frac{1}{2} BC \cdot AD$$

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} AB \cdot AC &= \frac{1}{2} BC \cdot AD \\ \Leftrightarrow \qquad \frac{1}{2} bc &= \frac{1}{2} ae \\ \Leftrightarrow \qquad \frac{1}{e} &= \frac{a}{bc} \\ \Leftrightarrow \qquad \frac{1}{e} &= \frac{\sqrt{b^2 + c^2}}{bc} \end{aligned}$$

23. Misalkan $ABCD$ adalah trapesium sama kaki dengan $AD = BC, AB = 3$, dan $CD = 8$. Misalkan E adalah titik pada bidang sedemikian sehingga $BC = EC$ dan $AE \perp EC$. Tentukan panjang AE.

Pembahasan:
Perhatikan, ilustrasi di bawah ini,



Perhatikan,

$$DC = DE + EF + FC$$
$$DC = 2DE + EF$$
$$8 = 2(r-3) + 3$$
$$r = \frac{11}{2}$$

Maka, diperoleh panjang DE dan AD sebagai berikut,

$$DE = r - 3 = \frac{11}{2} - 3 = \frac{5}{2}$$
$$AD = r = \frac{11}{2}$$

Jadi,

$$AE = \sqrt{AD^2 - DE^2} \Rightarrow AE = \sqrt{\left(\frac{11}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2}$$
$$= \sqrt{\frac{121}{4} - \frac{25}{4}}$$
$$= \sqrt{24}$$
$$= 2\sqrt{6}$$

24. Misalkan diketahui $\sin x - 2a\cos x = b$, tentukan nilai $|2a\sin x + \cos x|$ dalam bentuk a dan b.

Pembahasan:
Kuadratkan kedua ruas, sehingga diperoleh:

$$\sin x - 2a\cos x = b \Rightarrow \quad (\sin x - 2a\cos x)^2 = b^2$$
$$\Leftrightarrow \sin^2 x - 4a\sin x\cos x + 4a^2\cos^2 x = b^2$$

Misal, $p = |2a\sin x + \cos x|$, maka diperoleh:

$$|2a\sin x + \cos x| = p \Rightarrow \quad (2a\sin x + \cos x)^2 = p^2$$
$$\Leftrightarrow 4a^2\sin^2 x + 4a\sin x\cos x + \cos^2 x = p^2$$

Dari kedua persamaan di atas, maka diperoleh:

$$\begin{array}{l} \sin^2 x - 4a\sin x\cos x + 4a^2\cos^2 x = b^2 \\ 4a^2\sin^2 x + 4a\sin x\cos x + \cos^2 x = p^2 \\ \hline \end{array} +$$

$$(4a^2+1)(\cos^2 x + \sin^2 x) = b^2 + p^2 \Rightarrow 4a^2 + 1 = b^2 + p^2$$
$$\Leftrightarrow \quad p^2 = 4a^2 - b^2 + 1$$
$$\Leftrightarrow \quad p = \pm\sqrt{4a^2 - b^2 + 1}$$

Karena $p = |2a\sin x + \cos x|$, sehingga $p \geq 0$, maka $p = \sqrt{4a^2 - b^2 + 1}$

25. Tentukan semua bilangan real x dimana $0 \leq x \leq 2\pi$ sedemikian sehingga

$$\frac{1-\sqrt{3}}{\sin x} - \frac{1+\sqrt{3}}{\cos x} = 4\sqrt{2}$$

Pembahasan:

$$\begin{aligned}
& \frac{1-\sqrt{3}}{\sin x} - \frac{1+\sqrt{3}}{\cos x} = 4\sqrt{2} \\
\Rightarrow\ & \frac{\left(1-\sqrt{3}\right)\cos x - \left(1+\sqrt{3}\right)\sin x}{\sin x \cos x} = 4\sqrt{2} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{2\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{7\pi}{12}\right)}{2\sin x \cos x} = 2\sqrt{2} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{\cos\left(x+\frac{7\pi}{12}\right)}{\sin 2x} = 1 \\
\Leftrightarrow\ & \cos\left(x+\frac{7\pi}{12}\right) = \sin 2x \\
\Leftrightarrow\ & \sin\left(-\frac{\pi}{12}-x\right) = \sin 2x
\end{aligned}$$

Sehingga,

$$\begin{aligned}
2x = \left(-\frac{\pi}{12}-x\right) + n\cdot 2\pi \Rightarrow\ & 3x = -\frac{\pi}{12} + n\cdot 2\pi \\
\Leftrightarrow\ & x = -\frac{\pi}{36} + n\cdot\frac{2\pi}{3} \\
\Leftrightarrow\ & x = \left\{\frac{23\pi}{36}, \frac{47\pi}{36}, \frac{71\pi}{36}\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2x = \left(\pi - \left(-\frac{\pi}{12}-x\right)\right) + n\cdot 2\pi \Rightarrow\ & x = \frac{13\pi}{12} + n\cdot 2\pi \\
\Leftrightarrow\ & x = \left\{\frac{13\pi}{12}\right\}
\end{aligned}$$

Jadi,

$$\mathrm{HP} = \left\{\frac{23\pi}{36}, \frac{13\pi}{12}, \frac{47\pi}{36}, \frac{71\pi}{36}\right\}$$

Pembahasan soal OGN Matematika SMA 2016 ini sangat mungkin jauh dari sempurna mengingat keterbatasan penulis. Saran, koreksi dan tanggapan sangat diharapkan demi perbaikan pembahasan soal OSN ini.

Untuk download pembahasan soal SBMPTN, UNAS, Olimpiade, dan rangkuman materi pelajaran serta soal-soal ujian yang lainnya, silahkan kunjungi http://pak-anang.blogspot.com.

Terima kasih.
Pak Anang