수학 과목 (나형)

1. 정답 : ④

해설 : $3^0 \times (2^{3 \times \frac{2}{3}}) = 2^2 = 4$

2. 정답 : ④

해설 : $r=2, a=\frac{1}{8}$ 이므로 $a_5 = ar^4 = 2$

3. 정답 : ③

해설 : $\lim_{x \to 2} \frac{x^2+2x-8}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+4)}{(x-2)} = 6$

4. 정답 : ②

해설 : $f(x) = 4\cos x + 3$의 최댓값은 $4+3=7$

5. 정답 : ②

해설 : 독립이므로 $P(A|B) = P(A) = P(B)$,$P(A \cap B) = P(A)P(B) = P(A)^2 = \frac{1}{9}$

$P(A) = \frac{1}{3}$

6. 정답 : ①

해설 : $f(x) = x^4 + 3x - 2$, $f'(x) = 4x^3 + 3$, $f'(2) = 32 + 3 = 35$

7. 정답 : ⑤

해설 : $3^{-2x} < 3^{21-4x}$, $-2x < 21-4x$,$0 < x < \frac{21}{2}$ 자연수 $x = 1,2,3,\cdots,10$ 10개

8. 정답 : ②

해설 :$a \times b \times c = 4$, $(a,b,c) = (1,1,4),(1,2,2)$에서 각각 3개씩 모두 6개이다.

구하는 확률은 $\frac{(3+3)}{6^3} = \frac{1}{36}$

9. 정답 : ①

해설 : $(0,2)$를 지나는 법선의 x절편을 구하면 된다. $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$,$f'(0) = 2$

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 2$ 위의 점 $(0,2)$에서 법선방정식

$y - 2 = -\frac{1}{f'(0)}(x-2)$, $y = -\frac{1}{2}x + 2 = 0$ 에서 $x = 4$

10. 정답 : ⑤

해설 : $\sum_{k=1}^{5} a_k = 8$, $\sum_{k=1}^{5} b_k = 9$, $\sum_{k=1}^{5}(2a_k - b_k + 4) = 2\sum_{k=1}^{5} a_k - \sum_{k=1}^{5} b_k + 4 \times 5 = 16 - 9 + 20 = 27$

11. 정답 : ④

해설 : $N(20,\ 5^2)$에서 $E(X) = E(\overline{X}) = 20$

$V(X) = 25$

$V(\overline{X}) = \dfrac{V(X)}{16} = \dfrac{25}{16}$

$E(\overline{X}) + \sigma(\overline{X}) = 20 + \dfrac{5}{4} = \dfrac{85}{4}$

12. 정답 : ②

해설 : $a_1 = 1,\ \sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k+1}) = -n^2 + n\ \cdots$①

$\sum_{k=1}^{n-1}(a_k - a_{k+1}) = -(n-1)^2 + (n-1)\ \cdots$②

①과 ②을 연립하면 $a_n - a_{n+1} = -2n + 2$

$a_1 - a_2 = 0$

$a_2 - a_3 = -2$

$\vdots$

$a_{10} - a_{11} = -18$전체를 더하면

$a_1 - a_{11} = -90$

$\therefore a_{11} = 91$

13. 정답 : ⑤

해설 : $f(2) \le f(3) \le f(3)$을 만족하는 개수는 ${}_4H_3$

$f(1)$이 될 수 있는 값은 $1,2,3,4$

$\therefore {}_4H_3 \times 4 = 80$

14. 정답 : ③

해설 : $v(t) = 2t - 6$

움직인 거리 $= \int_3^k |2t-6|\,dt = [t^2 - 6t]_3^k = k^2 - 6k - (9 - 18) = 25$

$k^2 - 6k - 16 = 0$

$(k-8)(k+2) = 0$

$\therefore k = 8$

15. 정답 : 36

해설 : A와 B는 이웃하므로 한 묶음으로 보고 D,E,F 사이에 A와B를 넣으면 되므로

$(4-1)!\times 2\times 3=36$

16. 정답 : ②

해설 : $0\le x<4\pi,\quad 4\sin^2 x-4\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-3=0$

$4\sin^2 x+4\sin x-3=0$

$(2\sin x+3)(2\sin x-1)=0$

$\therefore \sin x=\frac{1}{2}$ 이므로

$x=\frac{\pi}{6},\ \pi-\frac{\pi}{6},\ 2\pi+\frac{\pi}{6},\ 3\pi-\frac{\pi}{6}$

모든 해의 합은 6π

17. 정답 : ①

해설 : $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+g(x)}{x}=3$

$f(0)+g(0)=0$

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+3}{xg(x)}=2$

$f(0)=-3$

$g(0)=3$

$\lim_{x\to 0}\frac{(f(x)+g(x))-(f(0)+g(0))}{x-0}=3$

$f'(0)+g'(0)=3$

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}\times\frac{1}{g(x)}=2$

$f'(0)\times\frac{1}{g(0)}=2$

$f'(0)=6 \Rightarrow g'(0)=-3$

$h(x)=f(x)g(x) \Rightarrow h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

$g'(0)=f'(0)g(0)+f(0)g'(0)$

$=6\times 3+(-3)\times(-3)$

$=18+9=27$

18. 정답 : ③

해설 : ㄱ. $A(a,1),\ B(4a,1)$

$1:4$ 외분점 $\left(\frac{4a-4a}{1-4},1\right)=(0,1)$ (참)

ㄴ. $a=\frac{1}{4a},\ 4a=\frac{1}{a} \Rightarrow a^2=\frac{1}{4}\ \therefore a=\frac{1}{2}$ (참)

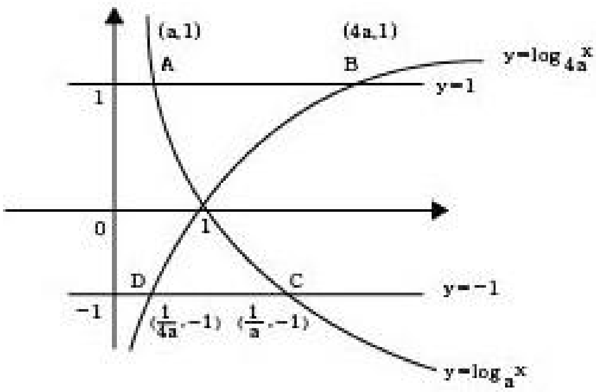
ㄷ. $\overline{AB} < \overline{CD}$

$3a < \frac{3}{4a}$

$4a^2 < 1$

$-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$

조건에 의해 $\frac{1}{4} < a < \frac{1}{2}$(거짓)



19. 정답 : ④

해설 : $X \sim N(8, 3^2)$

$Y \sim N(m, \sigma^2)$

$p(-\frac{4}{3} \le z \le 0) + p(z \ge \frac{8-m}{\sigma}) = \frac{1}{2}$

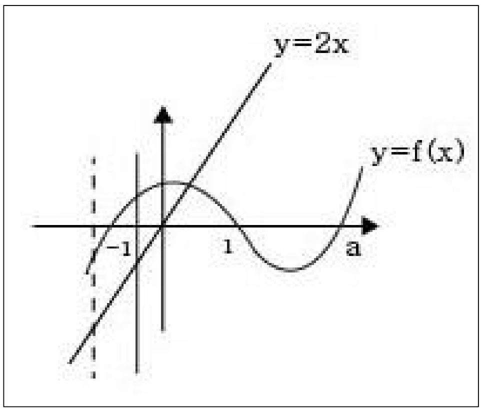
$p(z \le \frac{8m + \frac{2\sigma}{3}}{\sigma})$

$= p(z \le \frac{8-m}{\sigma} + \frac{2}{3})$

$= p(z \le 2)$

$= 0.9772$

20. 정답 : ④



해설 : $g'(x) = 2x\int_0^x f(t)dt$

x가 $*$ 부분에서 $y = 2x(-)$

정적분$(+)$

어느순간 저 적분이 음수가 되고

$y = 2x$도 음수 => $(+)$

그리고 $y = 2x(+)$, 정적분 $\int_0^x f(t)dt \geq 0$ 이면 된다

a가 최대일 때는 $\int_0^a f(x)dx = 0$

$[\frac{1}{4}a^4 - \frac{1}{3}a^4 - \frac{1}{2}a^2 + a^2]_0^a = 0$

$-\frac{1}{12}a^4 + \frac{1}{2}a^2 = 0$

$a^4 - 6a^2 = 0$

$a^2 = 6$

$\therefore a = \sqrt{6}$

21. 정답 : ③

해설 : $a_7 = a_2a_3 - 2 = 2$ => $a_2a_3 = 4$

$a_{25} = a_2a_{12} - 2$

$a_{12} = a_2a_6 + 1$

$a_6 = a_2a_3 + 1 = 5$ => $a_{12} = 5a_2 + 1$

$a_{25} = a_2(5a_2 + 1) - 2$

$a_2 = a_2a_1 + 1$

$a_3 = a_2a_1 - 2$

$a_2a_3 = 4$

$(a_2a_1 + 1)(a_2a_1 - 2) = 4$

$(a_2a_1)^2 - (a_2a_1) - 6 = 0$

$a_2a_1 = 3$ or $a_2a_1 = -2$

$\therefore a_2a_1 = 3$

$\therefore a_2 = 4 (\because a_2 = a_2a_1 + 1)$

$a_{12} = 21, a_{25} = 21 \times 4 - 2 = 82$

22. 정답 : 24

해설 : ${}_8C_1(3x)^1 = 8 \times 3x = 24x$

23. 정답 : 12

해설: $f'(x) = 3x^2 + 4x + 5$를 부정적분을 하면 $f(x) = x^3 + 2x^2 + 5x + C$ 이고 $f(0) = 4$ 이므로 $C = 4$ 따라서 $f(x) = x^3 + 2x^2 + 5x + 4$이다. 따라서 $f(1) = 12$ 이다.

24. 정답 : 2

해설 : $\log_3 72 - \log_3 8 = \log_3 \frac{72}{8} = \log_3 9 = 2$

25. 정답 : 15

해설 : $y=4x^3-12x+7$ 을 미분하면 $y'=12x^2-12=12(x-1)(x+1)$ 이다.

삼차함수의 그래프를 그려보면 교점의 개수가 2개가 되는 양수 $k=15$이다.

26. 정답 : 6

해설 : 모든 실수에서 연속이면 $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$이므로

$\lim_{x\to1}\frac{x+b}{\sqrt{x+3}-2}=-3+a$ 따라서 $1+b=0$ $\therefore b=-1$

$$\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}=-3+a$$

$$\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)}=\lim_{x\to1}(\sqrt{x+3}+2)=4$$

$4=-3+a$ $\therefore a=7$

$a+b=7-1=6$

27. 정답 : 36

해설 : a,b는 $f(x)=g(x)$의 근 이라 하자

$x^2-7x+10=-x+10$

=>$x^2-6x=0$ 따라서 $x=0$ 또는 6

$$S=\int_a^b g(x)-f(x)\,dx = \int_0^6(-x+10)-(x^2-7x+10)\,dx$$

$$=\int_0^6 -x^2+6x\,dx = 36$$

28. 정답 : 21

해설 : $\overline{AB}$=$3k$, $\overline{AB}$=k라 두고 $\overline{BC}$=x라 두자

① 코사인법칙에 의해 $x^2=k^2+9k^2-2k3k\cos\frac{\pi}{3}=7k^2$

② 사인법칙에 의해 $\frac{x}{\sin\frac{\pi}{3}}=14$ 이므로 $x=7\sqrt{3}$

따라서 ①,② 연립하면 $k^2=21$

29. 정답 : 587

해설 : 3,3,4,4,4의 공이 들어있는 주머니에서

3을 꺼낼 확률은 $\frac{2}{5}$이다.

4를 꺼낼 확률은 $\frac{3}{5}$이다.

따라서 case를 두 가지로 나누어서 생각해야한다.

case1)주머니에서 3이 나와 주사위 세 번 던져 합이 10이 되는 확률
합이 10이 되는 경우는 총 27가지이다.
따라서 $(\frac{2}{5})\times\frac{3\times3\times3}{6\times6\times6}=\frac{1}{20}$

case2)주머니에서 4가 나와 주사위를 네 번 던져 합이 10이 되는 확률
합이 10이 되는 경우는 총 80가지이다.
따라서 $(\frac{3}{5})\times\frac{2\times2\times2\times2\times5}{6\times6\times6\times6}=\frac{1}{27}$

case1,2에 의해 정답은 $\frac{47}{540}$이다. 따라서 $p+q=587$

30. 정답 : 39

해설 : $h(x)=\begin{cases}|f(x)-g(x)| & (x<1)\\ f(x)+g(x) & (x\geq1)\end{cases}$ 이고 $h(0)=0,\ h(5)=2$
미분가능 함수이므로
먼저 체크해야할 부분은 $f(0)=g(0),\ f'(0)=g'(0)$ 이고 $x=1$에서도 연속이므로
$g(1)=0$ 이거나 $f(1)=0$ 이여야 한다.
하지만 $g(1)=0$인 경우 문제 조건을 만족하는 1차함수가 존재하지 않는다.
(실제로 상수함수가 되어버림)
따라서 문제에서 $g(x)$는 1차함수라 했으므로 $f(1)=0$ 이여야 한다.
따라서 $f(0)=g(0),\ f'(0)=g'(0)$과 $h(5)=2$를 이용해 한문자에 대해 구해주면
$f(x)=(x-1)(x^2-(\frac{1}{2}-a)x+\frac{1}{2})$
$g(x)=ax-\frac{1}{2}$
이 된다.
여기서 $x=1$에서 미분가능이고 $f(1)=0$ 이므로
$-f'(1)+g'(1)=f'(1)+g'(1)$이므로 $f'(1)=0$이된다.
따라서 $a=2$이다.

구하고자 하는 값은 $h(4)=f(4)+g(4)$ 이므로 대입하여 구해주면
$h(4)=8-\frac{1}{2}+\frac{63}{2}=8+31=39$ 이다.