دانشگاه یزد

دانشکده ریاضی

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

ریاضی کاربردی

# مطالعه پویای سیستم بانکی با استفاده از نظریه کنترل بهینه تصادفی

استاد راهنما: دکتر سید مهدی کرباسی

استاد مشاور: دکتر علی دلاورخلفی

پژوهش و نگارش: آرزو محمدی

مهرماه ۱۳۸۹

## چکیده

در این پایان‌نامه، مسأله مدیریت بهینه بانک را با دو دیدگاه مینیمم‌سازی ریسک و ماکزیمم‌سازی سود بیان می‌کنیم. بدین منظور ابتدا مسأله کنترل بهینه تصادفی را معرفی کرده و شرایط بهینگی جواب مسأله را در دو حالت افق متناهی و افق نامتناهی بررسی می‌کنیم. در ادامه پس از بیان تعاریف و مفاهیم لازم، با استفاده از کنترل بهینه تصادفی راهکارهایی متناسب با هر کدام از این مسائل را ارائه داده و به بررسی نتایج اقتصادی این راهکارها و اعتبار آن‌ها از دیدگاه بانک‌داری می‌پردازیم. هم‌چنین، نتایج مربوط به شبیه‌سازی مدل‌های معرفی شده را ارائه می‌دهیم.

# فهرست مندرجات

# علائم اختصاری

| | |
|---|---|
| مجموعه تهی | $\emptyset$ |
| $\sigma$-جبر بورل روی مجموعه $\Sigma$ | $\mathcal{B}(\Sigma)$ |
| عملگر امید ریاضی | $\mathbf{E}$ |
| عملگر امید ریاضی نسبت به شرط اولیه $(t,x)$ | $\mathbf{E}_{tx}$ |
| همگرایی تقریباً با قطعیت | $a.s$ |
| همگرایی با احتمال یک | $w.p.1$ |
| فضای حالت فرایند تصادفی | $\Sigma$ |
| عناصر مجموعه $\Omega$ | $\omega$ |
| حرکت براونی استاندارد | $W$ |
| ترانهاده ماتریس یا بردار $A$ | $A'$ |
| ضرب داخلی دو بردار $a$ و $b$ | $a \cdot b$ |
| نرم ماتریس $A$ | $\lvert A \rvert$ |
| بردار گرادیان $\phi$ | $D\phi \equiv \phi_x$ |
| ماتریس مشتقات جزئی مرتبه دوم $\phi$ | $D^2\phi \equiv \phi_{xx}$ |
| بستار مجموعه $Q$ | $\overline{Q}$ |
| مرز $O$ | $\partial O$ |
| معادله برنامه‌ریزی پویا | DPE |
| معادله دیفرانسیل تصادفی | SDE |
| معادله همیلن-ژاکوبی-بلمن | HJB |
| مجموعه توابع $k$ مرتبه به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر روی $Q$ | $C^k(Q)$ |
| فضای $\phi(t,x)$هایی که $\phi$ و مشتقات جزئی $\phi_t$،$\phi_x$ و $\phi_{xx}$ روی $Q$ پیوسته‌اند. | $C^{1,2}(Q)$ |
| فضای $\phi(x)$هایی که $\phi$ و مشتقات جزئی $\phi_x$ و $\phi_{xx}$ روی $Q$ پیوسته‌اند. | $C^2(Q)$ |
| فضای $\phi \in C^{1,2}(Q)$ هایی که $\phi$، $\phi_t$،$\phi_x$ و $\phi_{xx}$ در شرط رشد چندجمله‌ای صدق می‌کنند. | $C_p^{1,2}(Q)$ |
| فضای $\phi \in C^2(Q)$هایی که $\phi$، $\phi_x$ و $\phi_{xx}$ در شرط رشد چندجمله‌ای صدق می‌کنند. | $C_p^2(Q)$ |

# مقدمه

کوتاه‌ترین فاصله بین دو نقطه در یک صفحه با رسم قطعه خط راست بین آن دو نقطه به‌دست می‌آید. دایره شکلی است که حداکثر مساحت را برای محیطی ثابت به‌دست می‌دهد. چنین حقایقی برای یونانیان باستان شناخته شده بود و قدیمی‌ترین راه‌حل‌های آن نوع مسائل، در دسته مسائلی هستند که امروزه تحت عنوان نظریه بهینه‌سازی مطرح می‌شوند. اگرچه شم هندسی یونانیان باستان باعث شد که بتوانند تعداد معدودی از این مسائل را حل کنند ولی از قرن هجدهم بود که نظریه‌ای استوار برای حل این نوع مسائل در زمینه بهینه‌سازی شروع به رشد کرد.

ایده طراحی ماشینی که بتواند به‌طور خودکار به هدف از پیش تعیین شده‌ای برسد یک مسأله ساده است. ترموستات‌ها و تایمرها به‌ترتیب دیگ‌های حرارتی مرکزی و ماشین‌های لباسشویی را کنترل می‌کنند. راننده یک اتومبیل مسیر وسیله نقلیه را با استفاده از پدال‌ها و فرمان اتومبیل کنترل می‌کند. چنین دستگاه‌هایی می‌توانند طوری ساخته شوند که روش کارشان را تغییر دهند و همواره ابزارهایی برای کنترل آن‌ها در اختیار باشد. این بدین معنی است، قوانینی که رفتار آن‌ها را معین می‌کنند باید شامل متغیرهایی باشند که مقادیر این متغیرها بتوانند به وسیله کسی خارج و مستقل از خود دستگاه تغییر داده شوند. در واقع راننده تصمیم می‌گیرد در عوض اعمال فشار بر پدال گاز، بر پدال ترمز فشار وارد کند و دستگاه با آهسته شدن، واکنش نشان می‌دهد. بنابراین همانند متغیرهای وضعیت، که دقیقاً مشخص می‌کنند دستگاه در زمان $t$ چه کاری را انجام می‌دهد، متغیرهایی داریم که متغیرهای کنترل نامیده می‌شوند و می‌توانند برای اصلاح نتایج حاصل شده از رفتار دستگاه مورد استفاده قرار گیرند.

نظریه کنترل بهینه در طی سال‌های ۱۹۵۰ و ۱۹۶۰، به خاطر فعالیت‌های آمریکا و روسیه در رابطه با کشفیات در منظومه شمسی آغاز گردید و مهندسین هوا ـفضا نظریه کنترل بهینه قطعی را به‌طور وسیعی مورد استفاده قرار دادند. در واقع مسائل ریاضی سفینه‌های فضایی نیز شامل مسائل بهینه‌سازی هستند. هدف ایجاد مسیرهایی بود که در راستای آن مسیرها یک فضاپیما که با یک

موتور کوچک کنترل و هدایت می‌شود به هدف مورد نظرش در کمترین زمان ممکن یا با کمترین سوخت مصرف‌شده برسد. این نوع مسائل جدید با روش‌هایی که تاکنون ابداع شده بود قابل حل نبودند و یک نظریه جدید که ریشه آن به قرن هجدهم باز می‌گردد، بایستی توسعه می‌یافت تا بتوان مسائل جدید را توسط آن حل کرد.

دستگاهی را درنظر بگیرید که رفتار آن به‌وسیله مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیل معمولی توصیف می‌شود. این‌ها در واقع ساده‌ترین دستگاه‌هایی هستند که می‌توان با آن‌ها کار کرد. بسیاری از سیستم‌های صنعتی و اقتصادی را می‌توان توسط روابط ریاضی از قبیل معادلات دیفرانسیل قطعی یا تصادفی مدل‌سازی کرد. این سیستم‌ها یا با زمان یا با هر متغیر وابسته دیگری، طبق یک رابطه دینامیکی، تغییر می‌کنند. علت این‌که نظریه بهینه‌سازی به‌عنوان زمینه‌ای فعال در تحقیقات برای ریاضیدانان ادامه پیدا کرده به‌خاطر زیبایی نوع کار و موضوع و رابطه‌اش با تحقیقات جدید در علوم، صنایع و بحث‌های اقتصادی می‌باشد.

نظریه کنترل بهینه تصادفی در دهه پنجاه همزمان با اصل بیشینه پونتریاگین گسترش یافت. همان‌گونه که نظریه کنترل بهینه توسط مهندسان برای بررسی ویژگی‌های سیستم‌های دینامیکی معادلات دیفرانسیل توسعه یافته است، امروزه در ارتباط با مسائل مالی نیز به‌طور وسیعی، برای پیشگویی و تحلیل سیاست‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرد. به‌علاوه، اگر ابزارهایی از قبیل برنامه‌ریزی پویای تصادفی و کنترل‌گرهای پس‌خورد را درنظر بگیریم، خواهیم دید که نظریه کنترل در سیستم‌های اقتصادی موقعیت مؤثرتری دارد. در سال ۱۹۵۳ تاستین[۱] اولین کسی بود که شباهت بین فرایندهای مهندسی و سیاست‌های کلان اقتصادی را مطرح کرد. در طی دو دهه اخیر، ریاضیات مالی با استفاده از کنترل بهینه به‌همراه فرایندهای تصادفی، نظریه احتمال و معادلات دیفرانسیل جزئی رشد فراوانی داشته است. اساس این پیشرفت کارهای مرتون[۲] و بلک ـشولز[۳] هستند. بعد از این کارها، کنترل بهینه تصادفی به‌طور وسیعی در اقتصاد مالی به‌عنوان یک ابزار مدل‌سازی مهم مورد استفاده قرار گرفت.

در سال‌های اخیر، اکثر سازمان‌های مالی سرمایه‌های کلانی برای مدیریت سیاست‌های خود، به‌منظور بیشینه‌کردن سود و کاهش زیان‌های ناشی از عدم کارایی این سیاست‌ها اختصاص داده‌اند. بانک‌ها، برای تعیین مسیر پس‌اندازهای مردم و رسانیدن آن‌ها به دست شرکت‌ها و سازمان‌هایی که

---

[۱] Tastin

[۲] Merton

[۳] Black-Scholes

دارای فرصت‌های مناسب سرمایه‌گذاری هستند، نقش بسیار مهمی ایفا می‌کنند و وجودشان این اطمینان را می‌دهد که سیستم مالی و اقتصادی به شیوه‌ای موزون و با کارایی بالا عمل می‌کند. علت اهمیت بسیار زیاد بانک‌ها، در مقایسه با سایر واسطه‌های مالی، شیوه فعالیت بانک‌ها برای دستیابی به بیشترین سود، شیوه و علت دادن وام یا اعتبار به درخواست‌کنندگان، شیوه مدیریت بانک‌ها بر دارایی‌ها و بدهی‌ها و سرانجام شیوه کسب درآمد بانک‌ها است. به‌همین دلیل، در بیست سال اخیر جنبه‌های زیادی از مدل‌های بانک‌داری مورد توجه قرار گرفته و تحقیقات زیادی در زمینه اعتبار سیستم‌های بانک‌داری از نظر تئوری و تجربی انجام شده است. در این خصوص، یکی از اولین تلاش‌های جدی و هماهنگ برای توسعه قوانین و مقررات صنعت بانک‌داری بر اساس استانداردهای کمی و کیفی در سطح جهانی، قرارداد بال$(I)$[۴] در سال ۱۹۸۸ بود که توسط کمیته‌ای برای نظارت و سرپرستی بانک‌داری طراحی شد. در ژوئن ۱۹۹۹، اصلاحیه‌های این قرارداد منجر به قرارداد سرمایه بال$(II)$[۵] شد که بر مبنای سه رکن اساسی می‌باشد:

(۱). رکن اول ارتباطی قوی بین مدیریت نیازهای سرمایه و پذیرش ریسک واقعی برقرار می‌کند.

(۲). رکن دوم روی تحکیم فرایند نظارت متمرکز شده است. به‌ویژه کیفیت مدیریت ریسک در مؤسسات بانک‌داری را ارزیابی می‌کند، و این‌که آیا این مؤسسات دارای روند مناسب برای تعیین مقدار دقیق سرمایه مورد نیاز هستند یا خیر؟

(۳). رکن سوم دربرگیرنده نظم بازار است. در واقع هر بانک باید به منظور هدایت افکار عمومی سازوکار مناسبی داشته باشد تا اطمینان یابد که اطلاعات لازم درباره سلامت و اعتبار بانک با سطحی در خور پذیرش، افشا می‌شود[۳, ۴].

هر معامله یا خدمتی که بانک‌ها انجام می‌دهند، دارای ریسک است. ریسک‌هایی که بانک‌ها را تحت تأثیر قرار می‌دهند از کوتاهی در روند امور و ناموفق بودن سیاست‌ها یا نارسایی‌های سیستم ناشی می‌شود. همه این‌ها ممکن است باعث از دست رفتن مشتریان و فرصت‌های تجاری و شاید هم منجر به پرداخت غرامت شود. اگر بانک‌ها در روش‌های تأمین مالی، قیمت‌گذاری و ارزش‌گذاری وثیقه‌ها اشتباه کنند در معرض ریسک قرار خواهند گرفت. بنابراین بانک‌ها به آگاهی کامل و جامع از هزینه منابع مالی و خدمات خود نیاز دارند. با این دیدگاه، قرارداد موردنظر بانک‌ها را به ایجاد

[۴] Basel I

[۵] Basel II capital accord

راهکارهایی برای مدیریت ریسک تشویق می‌کند. لذا بانک‌ها سعی می‌کنند برای تضمین عملکرد مطلوب خود عمل می‌کند، سرمایه و وام‌هایشان را در سطوح مشخصی حفظ کنند.

در این راستا، وجود یک همبستگی مثبت بین سرمایه بانک و میزان وام‌دهی آن، در سال ۱۹۹۶ توسط تاکور[۶] به اثبات رسید. در سال ۲۰۰۰ دیاموند[۷] و راجان[۸] مدل‌های زمان ـپیوسته‌ای برای پویایی اوراق‌بهادار و مدیریت ساختار سرمایه ارائه دادند. دانگل[۹]، لهار[۱۰]، فوش[۱۱]، گیدئون[۱۲] و پترسن[۱۳] در سال‌های ۲۰۰۴ تا ۲۰۰۶ مدل‌های زمان ـپیوسته‌ای ساخته‌اند که استراتژی‌های مینیمم‌سازی ریسک را با استفاده از نظریه کنترل بهینه حل کرده‌اند[۱۳, ۸, ۹].

در ارتباط با استفاده از نظریه کنترل بهینه تصادفی در سیستم‌های بانک‌داری دو مسأله وجود دارد

(۱). ساخت مدل‌های تصادفی پویا برای مؤلفه‌های بانک‌داری، به‌گونه‌ای که از لحاظ اقتصادی معتبر باشند.

(۲). اتخاذ تصمیماتی درباره‌ی مؤلفه‌هایی که می‌توانند سیستم را به‌سمت هدف موردنظر هدایت کنند.

در این راستا، پایان‌نامه حاضر مشتمل بر فصل‌های زیر است. در فصل اول، تعاریف و پیش‌نیازهای لازم آورده شده است. در فصل دوم، درباره نظریه کنترل بهینه قطعی توضیح مختصری می‌دهیم و سپس مسأله اصلی بحث که کنترل بهینه تصادفی است را مطرح می‌کنیم. از آن‌جا که برای حل مسائل کنترل بهینه روش‌های متفاوتی وجود دارد، دیدگاه برنامه‌ریزی پویا را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. به دنبال آن، در فصل‌های سوم و چهارم وارد بحث اقتصادی موردنظر شده و مدل‌های پویای متناسب با مسأله‌ای که با آن روبرو هستیم را، بیان می‌کنیم. در واقع در فصل سوم به حل مسأله کنترل بهینه برای مینیمم‌سازی ریسک می‌پردازیم. در فصل چهارم نیز مدل متناسب با ماکزیمم‌سازی سود را معرفی کرده و مسأله را برای حالت‌های مختلف، به‌طور تحلیلی حل می‌کنیم. نهایتاً در فصل پنجم، نتایج شبیه‌سازی‌های انجام شده را ارائه می‌کنیم.

---

[۶] Thakor
[۷] Diamond
[۸] Rajan
[۹] Dangl
[۱۰] Lehar
[۱۱] Fouche
[۱۲] Gideon
[۱۳] Petersen

# فصل ۱

# تعاریف و پیش‌نیازها

## ۱.۱ تعاریف و مفاهیم ریاضی

**تعریف ۱.۱.۱.** مجموعه غیرتهی $\Omega$ را درنظر بگیرید. کلاس $\mathcal{F}$ از زیرمجموعه‌های $\Omega$، یعنی $\mathcal{F} \subset ۲^{\Omega}$، یک جبر[۱] است اگر:

۱) $A \in \mathcal{F}$ آنگاه $A^c \in \mathcal{F}$ ( $A^c$ متمم $A$ در $\Omega$ است).

۲) $A, B \in \mathcal{F}$ آنگاه $A \cup B \in \mathcal{F}$.

۳) $\Omega \in \mathcal{F}$ (یا به‌طور معادل $\emptyset \in \mathcal{F}$).

به‌علاوه کلاس $\mathcal{F}$ از زیرمجموعه‌های $\Omega$ یک $\sigma$ ـ جبر است هرگاه یک جبر باشد و:

۴) اگر $A_i \in \mathcal{F}$، $i = ۱, ۲, \ldots$، آنگاه $\bigcup\limits_{i=۱}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

از دیدگاه احتمال $\sigma$ ـجبر را می‌توان به عنوان اطلاعات داده شده یک آزمایش درنظر گرفت. در مباحث اقتصادی $\mathcal{F}$ را برای نمایش مجموعه سوابق[۲] استفاده می‌کنند. در واقع شرایط (۱) تا (۴) یک ساختار ریاضی برای سابقه آزمایش فراهم می‌کنند.

**تعریف ۲.۱.۱.**

الف) یک فضای اندازه‌پذیر زوج $(\Omega, \mathcal{F})$ شامل مجموعه ناتهی دلخواه $\Omega$ و $\sigma$ ـجبر $\mathcal{F}$ از زیر مجموعه‌های $\Omega$ است.

ب) اندازه $P$ روی فضای اندازه‌پذیر $(\Omega, \mathcal{F})$ یک تابع مجموعه‌ای نامنفی روی $\mathcal{F}$ است به‌گونه‌ای که:

۱) $P(\emptyset) = ۰$.

۲) اگر $A_i \in \mathcal{F}$، $i = ۱, ۲, \ldots$، دو به دو مجزا باشند آنگاه $P(\bigcup\limits_{i=۱}^{\infty} A_i) = \sum\limits_{i=۱}^{\infty} P(A_i)$.

در این‌صورت به سه‌تایی $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ یک فضای اندازه می‌گویند.

ج) اگر $P(\Omega) = ۱$، $P$ را اندازه احتمال[۳] روی فضای اندازه‌پذیر $(\Omega, \mathcal{F})$ و سه‌تایی $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ را فضای احتمال[۴] می‌نامند.

---

[۱] Algebra

[۲] Information set

[۳] Probability measure

[۴] Probability space

**تعریف ۳.۱.۱.** فرض کنید $(\Omega, \mathcal{F})$ و $(\Omega', \mathcal{F}')$ دو فضای اندازه باشند آنگاه تابع $T : \Omega \longrightarrow \Omega'$ یک بردار تصادفی است اگر $T$، $\mathcal{F}$ ـ اندازه‌پذیر باشد یعنی به ازای هر $B \in \mathcal{F}'$،

$$T^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : T(\omega) \in \mathcal{F}'\} \in \mathcal{F}.$$

اگر این شرط برقرار باشد خواهیم داشت

$$T : (\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow (\Omega', \mathcal{F}').$$

به‌ویژه اگر $(\Omega', \mathcal{F}') = (\mathbb{R}, \mathcal{B})$، که $\mathcal{B}$ $\sigma$ ـجبر تولید شده توسط بازه‌های متناهی در $\mathbb{R}$ است، آنگاه $T$ را یک متغیر تصادفی[1] می‌گویند.

**تعریف ۴.۱.۱.**

الف) فضای اندازه $(X, \mathcal{M}, \nu)$ توسیع[2] فضای اندازه $(X, \mathcal{A}, \mu)$ است اگر $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ و روی $\mathcal{A}$، $\mu = \nu$.

ب) $\sigma$ ـجبر $\mathcal{A}$ تام[3] است اگر $A \in \mathcal{A}$ و $\mu(A) = 0$، آنگاه به‌ازای هر زیرمجموعه $B$ از $A$ نیز داشته باشیم $B \in \mathcal{A}$ و درنتیجه $\mu(B) = 0$.

هر فضای اندازه $(X, \mathcal{A}, \mu)$ دارای یک توسیع تام مینیمال منحصربه‌فرد است که آن‌را تکمیل‌یافته[4] فضای اندازه داده شده می‌نامند.

**تعریف ۵.۱.۱.** یک فرایند تصادفی[5] $\{X_t : t \in I\}$ خانواده‌ای از متغیرهای تصادفی است که در آن $I$ یک مجموعه اندیس‌گذار است. اگر $I = \mathbb{Z}$ آنگاه $\{X_t : t \in I\}$ یک فرایند تصادفی گسسته، سری زمانی یا دنباله تصادفی نامیده می‌شود. اگر $I = [0, 1]$ یا $I = [0, \infty)$ آنگاه $\{X_t : t \in I\}$ را یک فرایند تصادفی پیوسته می‌نامند. به عبارت دیگر اگر $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ یک فضای احتمال باشد یک فرایند تصادفی یک تابع اندازه‌پذیر $X(t, \omega)$ است که روی فضای $I \times \Omega$ تعریف شده به‌گونه‌ای‌که $X : (t, \omega) \longrightarrow X(t, \omega) = X_t(\omega)$ و به‌ویژه

۱) به‌ازای‌هر $t \in I$، $X(t, \cdot)$ یک متغیر تصادفی است.

۲) به‌ازای‌هر $\omega \in \Omega$، $X(\cdot, \omega) : I \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی اندازه‌پذیر است که مسیر نمونه‌ای[6] یا مسیر [7] نامیده می‌شود.

---

[1] Random variable
[2] Extension
[3] Complete
[4] Completion
[5] Stochastic process
[6] Sample path
[7] Trajectory

برد متغیر تصادفی $X$ را فضای حالت[۱] و برای $\omega \in \Omega$ $X(t,\omega)$ را وضعیت در زمان $t$ می‌نامند.

**تعریف ۶.۱.۱.** فرایند تصادفی $X(t,\omega)$، $0 \leq t \leq 1$ و $\omega \in \Omega$ را جدایی‌پذیر[۲] گویند اگر $\Omega_0$ با $P(\Omega_0) = 1$ و یک زیر مجموعه چگال شمارای $S$ از $[0,1]$ وجود داشته باشد به‌گونه‌ای که به‌ازای هر مجموعه بسته $E \subset \mathbb{R}$ و هر بازه باز $I \subset [0,1]$ مجموعه تفاضل

$$\{\omega \in \Omega; X(t,\omega) \in E, \forall t \in I \cap S\} \setminus \{\omega \in \Omega; X(t,\omega) \in E, \forall t \in I\}$$

زیر مجموعه‌ای از $\Omega_0$ باشد. در این‌صورت مجموعه $S$ را یک مجموعه جداکننده گویند.

**تعریف ۷.۱.۱.**

الف) دنباله $\{X_n\}$ را با احتمال یک $(w.p.1)$[۳] همگرا به متغیر تصادفی $X$ می‌نامند هرگاه

$$P(\{\omega \in \Omega; \lim_{n\to\infty} |X_n(\omega) - X(\omega)| = 0\}) = 1$$

به این همگرایی، همگرایی تقریباً با قطعیت $(a.s)$ [۴] نیز می‌گویند.

ب) دنباله $\{X_n\}$ در میانگین توان دوم[۵] همگرا به متغیر تصادفی $X$ است هرگاه به ازای هر $E(X_n^2) < \infty, n = 1,2,...$، $E(X^2) < \infty$،

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left[|X_n - X|^2\right] = 0$$

**تعریف ۸.۱.۱.** فرض کنید $\Sigma$ فضای حالت فرایند تصادفی $\{X_t; t \in I\}$ باشد که روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ تعریف شده است. $X_t$ را یک فرایند مارکوف [۶] می‌نامند اگر به‌ازای‌هر مجموعه بورل $B \in \mathcal{B}(\Sigma)$ و هر $\{t_i\}$ در $I$ به‌گونه‌ای‌که $t_0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t$ و وضعیت‌های $x_1, x_2, ..., x_n \in \Sigma$،

$$P[X_t \in B | X_{t_1} = x_1, X_{t_2} = x_2, ..., X_{t_n} = x_n] = P[X_t \in B | X_{t_n} = x_n]$$

**تعریف ۹.۱.۱.** احتمال انتقال[۷] فرایند مارکوف $\{X_t; t \in I\}$ برای $t < s$ و $s,t \in I$ و برای $x \in \Sigma$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\hat{P}(t,x,s,B) = P(X_s \in B | X_t = x), \quad \forall B \in \mathcal{B}(\Sigma), \quad w.p.1.$$

[۱] State space
[۲] Separable
[۳] With probability one
[۴] Almost surely
[۵] In mean square
[۶] Markove process
[۷] Transition probability

به‌ویژه برای $s,t$ و $B$ ثابت، $\hat{P}(t,\cdot,s,B)$ یک تابع $\mathcal{B}(\Sigma)$_اندازه‌پذیر، و برای $s,t$ و $x$ ثابت، تابع $\hat{P}(t,x,s,\cdot)$ یک اندازه احتمال است. به‌علاوه برابری چپمن ـکولموگروف[۱] برای $s,t,r \in I, t < r < s$ به‌صورت زیر برقرار است:

$$\hat{P}(t,x,s,B) = \int_{\Sigma} \hat{P}(r,y,s,B)\hat{P}(t,x,r,dy), \qquad w.p.1.$$

**تعریف ۱۰.۱.۱.** فرایند مارکوف $\{X_t; t \in I\}$ یک فرایند مانا (ایستا)[۲] است اگر

$$\hat{P}(t+u,x,s+u,B) = \hat{P}(t,x,s,B).$$

**تعریف ۱۱.۱.۱.** فرایند مارکوف را روی $\Sigma = \mathbb{R}^n$ یک فرایند پخش[۳] $n$ ـ بعدی گویند اگر:

۱) به‌ازای‌هر $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{h \to 0^+} h^{-1} \int_{|x-y|>\varepsilon} \hat{P}(t,x,t+h,dy) = 0$$

۲) توابع حقیقی $f_i(t,x), a_{ij}(t,x)$، $i,j = 1,...,n$ وجود دارند به‌گونه‌ای‌که برای هر $\varepsilon > 0$،

$$\lim_{h \to 0^+} h^{-1} \int_{|x-y|\leq\varepsilon} (y_i - x_i)\hat{P}(t,x,t+h,dy) = f_i(t,x)$$

$$\lim_{h \to 0^+} h^{-1} \int_{|x-y|\leq\varepsilon} (y_i - x_i)(y_j - x_j)\hat{P}(t,x,t+h,dy) = a_{i,j}(t,x)$$

این حدود به‌ازای‌هر $x \in \mathbb{R}^n$ و هر $t \in I$ برقرارند. تابع برداری $f = (f_1,...,f_n)$ را ضریب انحراف موضعی[۴] و تابع ماتریسی $a = (a_{i,j})$ را ماتریس کوواریانس موضعی[۵] می‌گویند.

**تعریف ۱۲.۱.۱.** فرایند تصادفی $W(t,\omega)$ را یک حرکت براونی استاندارد[۶] می‌نامند اگر در شرایط زیر صدق کند:

۱) $P\{\omega; W(0,\omega) = 0\} = 1$

۲) به‌ازای هر $0 \leq s \leq t$، متغیر تصادفی $W_t - W_s$ دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس $(t-s)$ باشد، یعنی به‌ازای هر $a < b$:

$$P\{a \leq W_t - W_s \leq b\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_a^b \exp\{\frac{-x^2}{2(t-s)}\}dx.$$

---

[۱] Chapman-Kolmogrov
[۲] Stationary process
[۳] Diffusion process
[۴] Local drift coefficient
[۵] Local covariance matrix
[۶] Standard Brownian motion

۳) $W(t,\omega)$ دارای نموهای مستقل باشد یعنی به‌ازای هر $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ متغیرهای تصادفی $W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \cdots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ مستقل باشند.

۴) تمام مسیرهای نمونه‌ای $W(t,\omega)$ ، با احتمال یک پیوسته باشند.

به‌ازای هر $E[W_t] = 0, E[W_t^2] = t, t \geq 0$. کوواریانس فرایند وینر[1](حرکت براونی) استاندارد برای $s,t \geq 0$ به‌صورت زیر باشد

$$E[W_t W_s] = \min\{s,t\} = s \wedge t$$

هم‌چنین، مسیرهای نمونه‌ای فرایند وینر هیچ جا مشتق‌پذیر نیستند.

**تعریف ۱.۱.۱۳.**

الف) فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ را درنظر بگیرید. خانواده‌ای از $\sigma$ ـجبرهای صعودی یعنی خانواده $\{\mathcal{F}_s | a \leq s \leq b\}$ را که اگر $a \leq s \leq t \leq b$ آنگاه $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ را یک فیلتر[2] می‌نامند .

ب) اگر $\{W_t\}$ یک فرایند وینر باشد آنگاه $\sigma$ ـجبر تولید شده توسط $\{W_t\}$ برای تمام $t$ها به‌صورت$F_t = \sigma(W_s; s \leq t)$ را فیلتراستاندارد می‌گویند.

ج) یک فضای احتمال فیلتردار [3]، فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ به همراه فیلتر $\{\mathcal{F}_t; t \in I\}$ است به‌گونه‌ای که $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\infty$. ($\mathcal{F}_\infty$ اشتراک تمام $\sigma$ ـجبرها روی $\Omega$ است که تمام پیشامدهای $\mathcal{F}_t$ را شامل می‌شود.)

د) فیلتر $\{\mathcal{F}_t : t \in [0,\infty[\}$ از راست پیوسته[4] است اگر

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^+ := \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s, \qquad \forall t \in [0,\infty]$$

**تعریف ۱.۱.۱۴.**

الف) فرایند تصادفی $\{X_t; t \in I\}$ را سازگار[5] با فیلتر $\{\mathcal{F}_t; t \in I\}$ می‌گویند اگر متغیر تصادفی $X_t$ به‌ازای هر $t$، $\mathcal{F}_t$ ـاندازه پذیر باشد.

ب) تابع $\sigma(t,\omega) : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ سازگار[6] است اگر $\sigma(t,\omega)$ به‌ازای هر $t$، $\mathcal{F}_t$ ـاندازه‌پذیر باشد.

---

[1] Wiener process
[2] Filtration
[3] Filtered probability space
[4] Right continuous
[5] Adapted
[6] Nonanticipating

**تعریف ۱.۱.۱۵.** گیریم فیلتر $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ داده شده باشد، متغیر تصادفی $\tau:\Omega\longrightarrow\mathbb{N}\bigcup\{+\infty\}$ را یک $\mathcal{F}_n$ ـزمان توقف[1] می‌نامند اگر برای هر $n\geq 1$، $\{\tau\leq n\}\in\mathcal{F}_n$.

به عبارتی تعریف دیگر برای زمان توقف به‌صورت زیر است.

تابع $\tau:\Omega\longrightarrow[0,+\infty]$ را یک زمان توقف نسبت به فیلتر $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ می‌نامند اگر

$$\{\omega\in\Omega:\tau(\omega)=t\}\in\mathcal{F}_t^+,\quad \forall t\in[0,+\infty].$$

زمان توقف را متغیر تصادفی اختیاری نیز می‌نامند[۲۶].

**تعریف ۱.۱.۱۶.** فرم کلی یک معادله دیفرانسیل تصادفی ایتو $(SDE)$[2] به‌صورت زیر است

$$dX_t=\mu(t,X_t)dt+\sigma(t,X_t)dW_t$$

که در آن $W_t$ یک فرایند وینر است.

اگر $\mu(t,X_t)=aX_t$ و $\sigma(t,X_t)=bX_t$، به‌گونه‌ای که $a$ و $b$ ثابت باشند یعنی

$$dX_t=aX_tdt+bX_tdW_t$$

آنگاه این معادله دیفرانسیل تصادفی را یک حرکت براونی هندسی[3] می‌نامند که شکل جواب این معادله به‌صورت زیر است:

$$X_t=X_{t_0}exp\{(a-\frac{b^2}{2})t+bW_t\}.$$

### ۱.۱.۱ انتگرال ایتو و مارتینگل‌ها

در بسیاری از مدل‌های اقتصادی پویایی یک متغیر توسط معادله دیفرانسیل

$$\dot{x}=\mu(t,x), \tag{۱.۱.۱}$$

مشخص شده است. این معادله را می‌توان به‌صورت دیفرانسیلی

$$dx=\mu(t,x)dt, \tag{۱.۱.۲}$$

نیز بیان کرد. به‌علاوه، معادله دیفرانسیل فوق را می‌توان به $SDE$ زیر توسیع داد

$$dX_t=\mu(t,X_t)dt+\sigma(t,X_t)dW_t. \tag{۱.۱.۳}$$

[1] Stopping time
[2] Ito stochastic differential equation
[3] Geometric Brownian motion

که $W_t$ یک فرآیند وینر است. معادله بالا را نمی‌توان به‌صورت معادله (۱.۱.۱) نوشت، چون $\frac{dW_t}{dt}$ تعریف نشده است. به‌علاوه، معادله دیفرانسیل (۱.۱.۱) را می‌توان به‌صورت معادله انتگرال

$$x_t = x_{t_0} + \int_{t_0}^{t} \mu(s,x)ds \tag{۴.۱.۱}$$

نوشت. به‌طور مشابه معادله دیفرانسیل تصادفی را می‌توان به فرم معادله انتگرال زیر نوشت

$$X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^{t} \mu(s,X_s)ds + \int_{t_0}^{t} \sigma(s,X_s)dW_s. \tag{۵.۱.۱}$$

انتگرال دوم در (۵.۱.۱) یک انتگرال ریمان یا لبگ معمولی نیست زیرا شرط لازم برای وجود انتگرال ریمان ـاشتیل‌یس $\int_a^b f d\alpha$ این است که $\alpha$ بر $[a,b]$ با تغییر کراندار باشد. طبق خواص فرایند وینر، مسیرهای نمونه‌ای فرایند وینر هیچ‌جا مشتق‌پذیر نیستند. هم‌اکنون نشان می‌دهیم که آن‌ها روی هر بازه متناهی دارای تغییرات کراندار نیستند.

بازه کراندار $a \le t \le b$ را درنظر می‌گیریم و آن‌را به زیربازه‌های $[t_k^{(n)}, t_{k+1}^{(n)}]$ با طول مساوی $۲^{-n}(b-a)$ افراز می‌کنیم که $t_k^{(n)} = a + k۲^{-n}(b-a)$ برای $k = ۱,۲,...,۲^n$. سپس تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned} S_n(\omega) &= \sum_{k=0}^{۲^n-۱} \left( W_{t_{k+1}^{(n)}}(\omega) - W_{t_k^{(n)}}(\omega) \right)^۲ - (b-a) \\ &= \sum_{k=0}^{۲^n-۱} \left( \Delta_{n,k}(\omega) - ۲^{-n}(b-a) \right), \end{aligned}$$

که

$$\Delta_{n,k}(\omega) = \left( W_{t_{k+1}^{(n)}}(\omega) - W_{t_k^{(n)}}(\omega) \right)^۲.$$

چون $S_n$ مجموع متغیرهای تصادفی مستقل است که هر کدام دارای میانگین صفر هستند بنابراین $\mathbf{E}(S_n) = 0$ و

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(S_n^۲) &= \mathbf{E}\left( \sum_{k=0}^{۲^n-۱} \left( \Delta_{n,k}(\omega) - ۲^{-n}(b-a) \right)^۲ \right) \\ &= \sum_{k=0}^{۲^n-۱} \left( \mathbf{E}(\Delta_{n,k}^۲) - ۲^{-n+۱}(b-a)\mathbf{E}(\Delta_{n,k}) + ۲^{-۲n}(b-a)^۲ \right) \\ &= \sum_{k=0}^{۲^n-۱} (b-a)^۲ ۲^{-۲n+۱} = (b-a)^۲ ۲^{-n+۱}. \end{aligned}$$

به‌وضوح در میانگین توان دوم $S_n \longrightarrow ۰$ هرگاه $n \longrightarrow \infty$. به‌ویژه به ازای هر $\varepsilon > ۰$ داریم:

$$P\left(\{\omega \in \Omega : |S_n(\omega)| \geq \varepsilon\}\right) \leq \frac{۱}{\varepsilon^۲}\mathbf{E}(S_n^۲) \leq \frac{۱}{\varepsilon^۲}(b-a)^۲ ۲^{-n+۱}.$$

بنابراین سری مثبت $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} P\left(\{\omega \in \Omega : |S_n(\omega)| \geq \varepsilon\}\right)$ از بالا به‌وسیله $\dfrac{(b-a)^۲}{\varepsilon^۲}$ کراندار است و بنابراین همگراست. با استفاده از لم بورل ـکانتلی می‌توان نتیجه گرفت که پیشامدهای $\{\omega \in \Omega : |S_n(\omega)| \geq \varepsilon\}$ با احتمال یک در حداکثر تعداد متناهی $n$ رخ می‌دهند. درنتیجه با احتمال یک داریم:

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \sum_{k=۰}^{۲^n-۱} \left(W_{t_{k+۱}^{(n)}}(\omega) - W_{t_k^{(n)}}(\omega)\right)^۲ = b-a. \qquad (۶.۱.۱)$$

در واقع این رابطه به‌ازای هر افراز از بازه $[a,b]$ با

$$\delta^n = \max_{k \geq ۰} |t_{k+۱}^{(n)} - t_k^{(n)}| \longrightarrow ۰ \qquad \text{هرگاه} \qquad n \longrightarrow \infty\ .$$

برقرار است به شرط آن‌که $\sum\limits_{n=۱}^{\infty} \delta^{(n)} < \infty$. با استفاده از این مطلب می‌توان نتیجه گرفت با احتمال یک $W_t(\omega)$ روی $[a,b]$ با تغییر کراندار نیست. واضح است که از (۴.۱.۱) داریم:

$$b-a \leq \limsup_{n \longrightarrow \infty} \max_{۰ \leq k \leq ۲^n-۱} |W_{t_{k+۱}^{(n)}}(\omega) - W_{t_k^{(n)}}(\omega)| \sum_{k=۰}^{۲^n-۱} {}_{t_{k+۱}^{(n)}}(\omega) - W_{t_k^{(n)}}(\omega)|$$

و با استفاده از پیوستگی مسیرهای نمونه‌ای هرگاه $n \longrightarrow \infty$ با احتمال یک داریم:

$$\max_{۰ \leq k \leq ۲^n-۱} |W_{t_{k+۱}^{(n)}}(\omega) - W_{t_k^{(n)}}(\omega)| \longrightarrow ۰$$

و هرگاه $n \longrightarrow \infty$ با احتمال یک داریم:

$$\sum_{k=۰}^{۲^n-۱} |W_{t_{k+۱}^{(n)}}(\omega) - W_{t_k^{(n)}}(\omega)| \longrightarrow \infty$$

بنابراین، تقریباً با قطعیت، مسیرهای نمونه‌ای روی $a \leq t \leq b$ دارای تغییرات کراندار نیستند. لذا انتگرال دوم در (۵.۱.۱) را نمی‌توان به‌عنوان یک انتگرال ریمان ـاشتیل‌یس برای مسیرهای نمونه‌ای تعبیر کرد[۱۴].

وقتی که می‌خواهیم مقدار انتگرال یک تابع را با استفاده از انتگرال ریمان محاسبه کنیم، مقدار انتگرال به انتخاب $\tau_k^{(n)}$، $k = ۱, \ldots, n$ بستگی ندارد، در واقع اگر بازه موردنظر را به $n$ زیر بازه تقسیم کنیم آنگاه $\tau_k^{(n)}$، یک نقطه دلخواه از زیر بازه $k$ ام است. با توجه به انتخاب $\tau_k^{(n)}$ ها سه نوع انتگرال تصادفی داریم. فرض کنید $\tau_k^{(n)} \in [t_{k-۱}^{(n)}, t_k^{(n)}]$،

- اگر $\tau_k^{(n)} = t_{k-1}^{(n)}$ آنگاه، انتگرال تصادفی، انتگرال ایتو[1] است
- اگر $\tau_k = \frac{t_{k-1}^{(n)} + t_k^{(n)}}{2}$ آنگاه، انتگرال تصادفی، انتگرال استراتونوویچ[2] است
- اگر $\tau_k^{(n)} = t_{k(n)}$ آنگاه، انتگرال تصادفی، انتگرال پسرو است.

انتگرال تصادفی ایتو را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$I(\sigma) = \int_{t_0}^{T} \sigma(s, X_s) dW_s.$$

هم‌اکنون کلاس‌هایی از توابع را معرفی می‌کنیم که انتگرال ایتو روی آن‌ها تعریف شده است. فرض کنید $\mathcal{M}_0([t_0, T] \times \Omega)$ مجموعه توابع غیرقابل پیش‌بینی باشند که

$$\int_{t_0}^{T} |\sigma(t, \omega)|^2 dt < \infty \quad w.p.1.$$

یعنی $\sigma(t, \omega) \in \mathcal{M}_0([t_0, T] \times \Omega)$ به معنی این است که:

۱) $\sigma(t, \omega)$ به‌ازای هر $t$، $\mathcal{F}_t$ ـ اندازه‌پذیر است.

۲) به ازای هر $\omega$ تابع نمونه‌ای $\sigma(t, \omega)$ انتگرال‌پذیر مربعی است.

فرض کنید $\mathcal{M}^2([t_0, T] \times \Omega)$ زیرمجموعه‌ای از $\mathcal{M}_0([t_0, T] \times \Omega)$ باشد به‌گونه‌ای که

$$\mathbf{E}\Big[\int_{t_0}^{T} |\sigma(t, \omega)|^2 dt\Big] < \infty.$$

**تعریف ۱۷.۱.۱**. تابع $\sigma(t, \omega)$ یک تابع پله‌ای[3] (تابع ساده یا فرایند ساده) نامیده می‌شود اگر افراز $t_0 < t_1 < \cdots < T$ از $[t_0, T]$ وجود داشته باشد به‌گونه‌ای که به‌ازای‌هر $t \in [t_i, t_{i+1})$ که $i = 0, 1, ..., n-1$، $\sigma(t, \omega) = \sigma(t_i, \omega)$.

قرار می‌دهیم:

$$\mathcal{S}^2 = \{\sigma \in \mathcal{M}^2([t_0, T] \times \Omega) : \text{یک تابع پله‌ای است } \sigma\}.$$

**تعریف ۱۸.۱.۱**. انتگرال ایتوی تابع پله‌ای غیر قابل پیش بینی $\sigma(t, \omega)$ روی بازه $[t_0, T]$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$I(\sigma)(\omega) = \int_{t_0}^{T} \sigma(t, \omega) dW_t = \sum_{i=0}^{n-1} \sigma(t_i, \omega)[W_{t_{i+1}} - W_{t_i}].$$

---

[1] Ito
[2] Stratonovich
[3] Simple function