Theoretische Physik 1b: Mechanik
Übungsblatt 4

Prof. Dr. Frank Wilhelm-Mauch
Dr. Michael Marthaler
Andrii Sokolov, M.Sc.

SS 2018 **Abgabe 07.05.2018**

***Info**: Bitte schreiben Sie Name und Ihre Übungsgruppe auf das Übungsblatt und tackern Sie dieses. Sie dürfen in Gruppen von bis zu drei Personen abgeben.*

Aufgabe 1: Optimale Trajektorie (*19 Punkte*)

Welche Form muss die Bahn haben, auf der ein Körper reibungsfrei in kürzester Zeit von einem Punkt $A = (x_0, y_0)$ zu einem Punkt $B = (x_1, y_1)$ gelangt, wenn er ausschließlich von der Schwerkraft angetrieben wird?

(a) Als Vorbetrachtung, benutzen Sie die Euler-Lagrange-Gleichung, um herauszufinden, unter welcher Bedingung folgender Erhaltungssatz gilt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0,$$

wobei $F = F(x, y, y')$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $y = y(x)$ ist. (*5 Punkte*)

(b) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit und Gesamtlaufzeit für eine beliebige Strecke $y(x)$. (*4 Punkte*)

(c) Nutzen Sie das Ergebnis aus Aufgabenteil (a), um eine Differentialgleichung für y herzuleiten, unter der Annahme, dass die Gesamtlaufzeit minimal sein soll. (*3 Punkte*)

(d) Lösen Sie die DGL mithilfe der Substitution $y = 2r_0 \sin^2(\phi/2)$ und geben Sie die Parametrisierung $x = x(\phi)$ und $y = y(\phi)$ der gesuchten Kurve an. Um welche Form handelt es sich dabei? (*5 Punkte*)

Hinweis: r_0 kann eine beliebige Konstante sein.

(e) Wie gehen Sie vor, um noch unbekannte Konstanten mithilfe der Randbedingungen zu bestimmen? Berechnen Sie die Unbekannten für die Fälle

(i) $(x_0, y_0) = (0, 0)$ und $(x_2, y_2) = (2, 2)$, sowie (*1 Punkt*)

(ii) $(x_0, y_0) = (0, 0)$ und $(x_2, y_2) = (3, 1)$. (*1 Punkt*)

Aufgabe 2: Geodäte auf einer Kugel (*13 Punkte*)

Eine Geodäte beschreibt die kürzeste Verbindungslinie zweier Punkte, wobei der Pfad auf einer gegebenen Oberfläche fixiert ist. Finden Sie die Geodäte auf einer Kugel.

(a) Geben Sie das infinitesimale Wegelement auf einer Kugel in Kugelkoordinaten an und finden Sie eine Integraldarstellung für die Entfernung zweier Punkte. (*4 Punkte*)

(b) Verwenden Sie die Euler-Lagrange Gleichung, um die Geodäte (in Kugelkoordinaten) zu finden. (*5 Punkte*)

Hinweis: Eine Substitution der Form $u = \cot(x)$ könnte hilfreich sein.

(c) Überführen Sie die in Teil b) gefundene Lösung in rechtwinklige kartesische Koordinaten und zeigen Sie, dass die Geodäte dem Pfad entlang des Schnittes der Kugeloberfläche und einer beide zu verbindenden Punkte enthaltende Ebene durch den Kugelmittelpunkt entspricht. (*4 Punkte*)

Aufgabe 3: Minimierung einer Fläche (*8 Punkte*)

Wir betrachten die Fläche die entsteht, wenn eine allgemeine Verbindungslinie zwischen zwei Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) um die y-Achse rotiert (vgl. Abb. 1).

a) Finden Sie einen Ausdruck für den Flächeninhalt der Rotationsfläche (*3 Punkte*)
Hinweis: Betrachten Sie erst die Streifenfläche der Breite $\mathrm{d}s$ *und geben Sie damit die Gesamtfläche als Integral an.*

b) Nutzen Sie die Euler-Lagrange Gleichung um die Funktion $y(x)$ zu finden, sodass diese Fläche minimal wird. Wodurch werden die auftretenden Konstanten festgelegt? Für den Fall dass Sie Aufgabenteil (a) nicht gelöst haben: die Rotationsfläche ist gegeben durch $A = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} x\sqrt{1 + y'^2}\mathrm{d}x$ (*5 Punkte*)

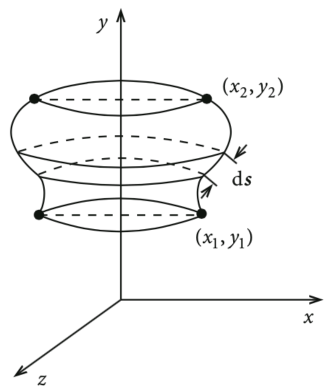

Abbildung 1: Zur Berechnung der Verbindungslinie zwischen zwei Punkten der Ebene, die bei Rotation um die y-Achse zu einer minimalen Mantelfläche führt (links).