SINTEZA LUCRARII PNII-RU-TE-2012-3-0161 ANUL 2014

BOGDAN ICHIM

INTRODUCERE

In perioada mai 2013 – decembrie 2014, membrii grantului PNII-RU-TE-2012-3-0161, cu titlul ”Algebraic study of some combinatorial problems and associated computational experiments”, au elaborat opt articole stiintifice [19], [24], [29], [20], [15], [16], [17], [9], din care patru au fost publicate sau acceptate spre publicare si patru au fost submise spre publicare. De asemenea au fost lansate sapte pachete de software computational gratuit (in mai multe versiuni) care sunt disponibile online [10], [4], [21]. Atat catre articolele stiintifice, cat si spre paginile de internet ale pachetelor software sunt disponibile linkuri din pagina de web a grantului, la adresa https://dl.dropboxusercontent.com/s/lb9znyg9ov2gtkn/ASSCPACE.htm. In cele ce urmeaza prezentam detaliat rezultatele obtinute.

1. REZULTATE STIINTIFICE PRINCIPALE

1. In articolul [19], publicat in jurnalul Experimental Mathematics (IF=1), introducem un algoritm de calcul pentru Hilbert depth a unui modul multigraduat finit generat M peste inelul de polinoame $R = K[X_1,\dots,X_n]$ standard multigraduat. Acesta e bazat pe metoda introdusa in [18] si cateva imbunatatiri. Algoritmul se poate adaptata pentru calculul Stanley depth a lui M daca $\dim_K M_a \le 1$ pentru toti $a \in \mathbb{Z}^n$. In continuare, oferim o implementare experimentala a algoritmului in CoCoA [12] si o folosim pentru a gasi exemple interesante. In consecinta, prezentam raspunsuri complete la urmatoare intrebari puse de Herzog in [14]:

Problema 1. [14, Problema 1.66] *Gasiti un algoritm de calcul pentru Stanley depth a unui R-modul multigraduat finit generat M cu $\dim_K M_a \le 1$ pentru toti $a \in \mathbb{Z}^n$.*

Problema 2. [14, Problema 1.67] *Fie M si N R-module multigraduate finit generate. Atunci*

$$\operatorname{sdepth}(M \oplus N) \ge \operatorname{Min}\{\operatorname{sdepth}(M), \operatorname{sdepth}(N)\}.$$

Avem egalitate?

Problema 3. [14, Text dupa Problema 1.67] *In cazul particular in care $I \subset R$ este ideal monomial, avem $\operatorname{sdepth}(R \oplus I) = \operatorname{sdepth} I$?*

2. In articolul [24], publicat in Springer Proceed. in Math. and Statistics, studiem Conjectura Stanley [34] pentru factori de ideale libere de patrate.

Fie $S = K[x_1,\dots,x_n]$ algebra polinoamelor peste corpul K si $J \subset I \subset S$ doua ideale monomiale libere de patrate. Presupunem ca I este generat de monoamele libere de patrate $f_1,\dots,f_r$ de grad d si o multime de monoame libere de patrate E de grade $\ge d+1$. Fie B multimea monoamelor libere de patrate din $I \setminus J$. O observatie simpla spune ca daca $d = 1$, si orice monom din $B \setminus E$ este un cel mai mic multiplu comun a doua monoame f_i, atunci $\operatorname{depth}_S I/J = 1$. Lucrarea contine un exemplu care arata ca acest rezultat nu are loc pentru $d = 2$. Mai precis desi orice monom din $B \setminus E$ este un cel mai mic multiplu comun a doua monoame f_i are loc $\operatorname{depth}_S I/J = 3$. Se da totusi o forma mai slaba a rezultatului de mai sus pentru $d > 1$.

Rezultatul principal al lucrarii spune ca daca $r \leq 3$ atunci o forma slaba a Conjecturii Stanley are loc, si anume daca Stanley depth al lui I/J este $\leq d+1$ atunci $\operatorname{depth}_S I/J \leq d+1$. Metoda folosita este inspirata de [27] si foloseste rezultate importante din [25],[26] and [32]. In final se stabileste forma slaba de mai sus si intr-un caz special cand $r = 4$.

3. Lucrarea [29], acceptata la publicare in Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie (IF=0.452), extinde rezultatele privind valabilitatea unei forme slabe a Conjecturii Stanley [34] de la cazul idealelor monomiale libere de patrate (vezi [25], [28]) la cazul monomial general folosind in in mod esential o teorema recenta din [15].

Fie $S = K[x_1, \ldots, x_n]$ algebra polinoamelor peste corpul K si $J \subset I \subset S$ doua ideale monommiale. Este cunoscut faptul ca daca I, J sunt libere de patrate si I este generat de monoame de grad $\geq d$ atunci $\operatorname{depth}_S I/J \geq d$. Lucrarea de fata extinde acest rezultat pentru monoame care nu sunt libere de patrate.

Marginea inferioara a depth-ului gasita in acest caz se obtine aplicand polarizarea unei asa numite forme canonice asociata lui I/J in [5]. Desigur dupa polarizare se obtine un factor de ideale monomiale libere de patrate pentru care se poate aplica marginea uzuala data de grad.

Folosind acceasta margine inferioara se obtin in cadrul idealelor monomiale care nu sunt libere de patrate cazuri cand o forma mai slaba a Conjecturii Stanley are loc extinzand cazurile cunoscute in cadrul idealelor monomiale libere de patrate [25], [28]. Aici este esential rezultatul din [15] privind comportamentul lui Stanley depth la polarizare.

In incheierea lucrarii se stabileste o forma slaba a Conjecturii Stanley in cazul cand I este generat de 6 variabile iar J este ideal monomial liber de patrate.

4. In articolul [20], publicat in Proceedings of the Third Conference of Mathematical Society of Moldova IMCS-50, se face o scurta prezentare a programului [21].

5. Lucrarea "The behavior of Stanley depth under polarization" e scrisa in colaborare de Bogdan Ichim, Lukas Katthän si Julio Moyano-Fernández, vezi [15], si a fost trimisa spre publicare.

In aceasta lucrare demonstram ca conjectura Garsia–Stanley [35, Conjecture 2.7] despre complexele simpliciale Cohen–Macaulay implica cel mai important caz al conjecturii Stanley [34]. Mai exact, aratam ca conjectura Garsia–Stanley despre complexele simpliciale Cohen–Macaulay este echivalenta cu [2, Conjecture 1].

6. Lucrarea "Stanley depth and the lcm-lattice" e scrisa in colaborare de Bogdan Ichim, Lukas Katthän si Julio Moyano-Fernández, vezi [16], si a fost trimisa spre publicare.

Un important aspect particular al conjecturii este Stanley este ca face legatura intre doi invarianti numerici proveniti din domenii diferite. Pe de o parte avem depth, care este un invariant algebraic invariant foarte important in geometria algebrica geometry; iar pe de alta parte avem Stanley depth, care este un invariant pur combinatorial . In acest articol propunem *laticea-lcm* ca o baza comuna pentru studiul ambilor invarianti.

7. Lucrarea "Lcm-lattices and Stanley depth: a first computational approach" e scrisa in colaborare de Bogdan Ichim, Lukas Katthän si Julio Moyano-Fernández, vezi [17], si a fost trimisa spre publicare.

Fie $S = K[x_1, \ldots, x_n]$ algebra polinoamelor peste corpul K. In aceasta lucrare demonstram ca Conjectura Stanley [34] este adevarata pentru I si S/I in cazul cand I este generat de $g \leq 5$ monoame. De asemenea, prezentam suport computational pentru o conjectura formulata de Herzog in [14].

8. Lucrarea ”The power of pyramid decomposition in Normaliz” e scrisa in colaborare de Winfried Bruns, Bogdan Ichim si Christof Söger, vezi [9], si a fost trimisa spre publicare.

De la bun început programul Normaliz a folosit triangulari lexicografice (a se vedea [11] si [8]). Calculul triangularilor lexicografice asa cum este descris in [11] si [8] are doua mari neajunsuri legate de: (i) stocarea datelor (utilizarea memoriei poate depasi rapid capacitatea calculatoarelor actuale); (ii) procesarea paralela a datelor.

Descompunerea in piramide este ideea de baza care a permis Normaliz calculul de triangulari in dimensiune 24 de marime aproximativ $5 \cdot 10^{11}$, într-un timp acceptabil pe sisteme multiprocesor standard (cum ar fi SUN XFire 4450 sau Dell PowerEdge R910).

Mentionam faptul ca descompunerea in piramide in forma pura este extrem de prietenoasa cu memoria si ca pentru calculul seriilor Hilbert Normaliz foloseste descompuneri Stanley [34]. Calculul eficient al acestor descompuneri se bazeaza pe o idee din Köppe si Verdoolaege [23].

Pentru calculul bazelor Hilbert descompunerea in piramide are un alt avantaj care este uneori imens: se poate evita triangularea acelor piramide pentru care este a priori clar ca nu vor furniza noi candidati pentru baza Hilbert. Aceasta observatie, pe care se bazeaza contributia autorilor Normaliz la lucrarea [7], a declansat utilizarea descompunerii in piramide ca un principiu general.

Un alt aspect important al descompunerii in piramide este faptul ca paralelizarea devine naturala: piramidele pot fi tratate independent una de celalalta. Precizam faptul ca triangulari de marimea mentionata mai sus pot fi foarte greu obtinute prin calcul serial.

Domeniul de aplicare al calculelor Normaliz este documentat în sectiunea ”Computational results”. Exemplele principale provin din teoria combinatorica a voturilor pe care le-am gasit în lucrarea lui Schürmann [31]. Dorinta de a efectua calculele de serii Hilbert cerute in [31] a fost un stimul important în dezvoltarea recenta a programului Normaliz.

Recent, Normaliz a fost comparat cu alte software-uri de top disponibile. Prezentam datelele obtinute pentru cateva exemple clasice bine cunoscute propuse de autori independenti din domenii stiintifice diferite, pe care le enumeram mai jos.

(1) `CondPar`, `CEffPl` si `PlVsCut` provin din Teoria selectiei sociale si teoria votului: paradoxul lui Condorcet, eficienta Condorcet a votului plural si votul plural versus votul plural cu al doilea tur de scrutin (a se vedea [31]).
(2) `4x4`, `5x5` si `6x6` reprezinta patrate magice 4x4, 5x5, 6x6 (a se vedea [13], [3], [33]).
(3) `bo5` si `lo6` apartin ariei rangului statistic; a se vedea Sturmfels si Welker [36].
(4) `small` si `big` sunt exemple test folosite in dezvoltare Normaliz. `small` a fost deja discutat in [8].
(5) `cyclo36`, `cyclo38`, `cyclo42` si `cyclo60` reprezinta monoizii ciclotomici de ordin 36, 38, 42 and 60. Acesti monoizi au fost analizati de Beck si Hoşten [6].
(6) `A443` si `A553` reprezinta monoizi definiti de tabelele de contingenta de marime $4 \times 4 \times 3$ si $5 \times 5 \times 3$. Au fost cazuri deschise in clasificarea facuta de Ohsugi si Hibi [30] care a fost finalizata in [7].
(7) `cross10`, `cross15` si `cross20` sunt monoizii definiti de politoapele de intersectie de dimensiune 10, 15 and 20 continute in distributia Latte [22].

Pentru calculul bazelor Hilbert s-a folosit pachetul de programe 4ti2 [1] dezvoltat de catre o echipa de la Universitatea Tehnica din München (locul 53 în clasamentul Academic al Universitatilor Mondiale 2012). Tabelul de mai jos prezinta datele obtinute in aceste teste.

Input	4ti2	Nmz -d -x=1	Nmz -d -x=20	Nmz -N -x=1	Nmz -N -x=20
CondPar	0.025 s	0.018 s	0.031 s	5.628 s	1.775 s
PlVsCut	6.697 s	1.967 s	0.567 s	–	–
CEffPl	6:09 m	2:15 m	15.75 s	–	–
4x4	0.008 s	0.003 s	0.011 s	0.004 s	0.010 s
5x5	3.835 s	1.684 s	0.382 s	4:27 m	1:40 m
6x6	123:18:24 h	20:07:14 h	1:21:11 h	–	–
bo5	T	–	–	0.588 s	0.377 s
lo6	31:32 m	16:18 m	1:19 m	60:16 m	11:54 m
small	48:48 m	38:02 m	3:33 m	3.098 s	3.861 s
big	T	–	–	3:05 m	43.758 s
cyclo36	T	–	–	1.477 s	1.092 s
cyclo38	R	–	–	36:55:53 h	2:02:32 h
cyclo60	R	–	–	7:06 m	2:17 m
A443	T	–	–	1.080 s	0.438 s
A553	R	–	–	3:15:15 h	15:59 m

TABELA 1. Computation times for Hilbert bases

Am oprit calculele atunci cand timpul a depasit 150 ore (T) sau memoria folosita a depasit 100 GB (R).

Pentru calculul seriilor Hilbert, s-a folosit pachetul de programe Latte [22] dezvoltat de catre o echipa de la Universitatea din California la Davis (locul 47 în clasamentul Academic al Universitatilor Mondiale 2012). Tabelul de mai jos prezinta datele obtinute in aceste teste.

Input	LattE ES	LattE+M ES	LattE EP	Nmz -x=1	Nmz -x=20
CondPar	O	S	-	28.352 s	8.388 s
PlVsCut	O	O	-	–	175:11:26 h
CEffPl	O	S	-	–	218:13:55 h
4x4	0.579 s	3.465 s	-	0.004 s	0.010 s
5x5	O	72:39:23 h	-	5:20 m	2:47 m
bo5	T	T	T	90:05:43 h	7:20:50 h
lo6	R	R	T	14:17:09 h	2:18:14 h
small	57.890 s	39:36 m	41.337 s	0.370 s	0.274 s
big	R	R	9:15 m	1.513 s	0.334 s
cyclo36	R	R	28:55 m	1.591 s	1.653 s
cyclo38	R	R	R	40.099 s	33.220 s
cyclo42	R	R	2:14:06 h	4.784 s	4.547 s
cyclo60	R	R	R	7:47 m	5:36 m
A443	R	R	R	54.758 s	16.515 s
A553	R	R	T	112:59:33 h	7:37:04 h
cross10	T	T	11.712 s	0.016 s	0.021 s
cross15	R	R	49:06 m	0.675 s	0.487 s
cross20	R	R	R	32.820 s	23.207 s

TABELA 2. Computation times for Ehrhart series and Ehrhart polynomials

Am oprit calculele atunci cand timpul a depasit 150 ore (T), memoria folosita a depasit 100 GB (R) sau programul a produs fisiere mai mari de 400 GB (O). In doua situatii a fost depasita limita stivei sistemului (S).

2. Rezultate stiintifice obtinute in paralel

In luna iunie a anului 2013 a fost lansata versiunea 2.10 a programului Normaliz (vezi [10]) impreuna cu interfata grafica jNormaliz 1.4 (vezi [4]). De asemenea in luna noiembrie a anului 2013 a fost lansata prima versiune a programului Hdepth [21], acesta fiind primul program disponibil pentru calculul Hilbert depth multigraduata. In luna aprilie a anului 2014 a fost lansata versiunea 2.11 a programului Normaliz (vezi [10]) impreuna cu interfata grafica jNormaliz 1.5 (vezi [4]). In luna octombrie a anului 2014 a fost lansata versiunea 2.12 a programului Normaliz (vezi [10]) impreuna cu interfata grafica jNormaliz 1.6 (vezi [4]).

3. Diseminarea rezultatelor

In scopul diseminarii rezultatelor s-au tinut 20 de prezentari de catre echipa grantului in cadrul seminariul de algebra al Institutului de Matematica ”Simion Stoilow”. De asemenea s-au tinut patru prezentari in cadrul Scolii Nationale de Algebra ”Algebraic Methods in Combinatorics”, Bucuresti, 01–07 Septembrie 2013 si doua prezentari in cadrul Scolii Nationale de Algebra ”Algebraic and Combinatorial Applications of Toric Ideals”, Bucuresti, 31 August – 06 Septembrie 2014 de catre Marius Vladoiu si Andrei Zarojanu (dintre organizatori facand parte Marius Vladoiu si Andrei Zarojanu).

Bogdan Ichim a participat la conferinta ”Joint International Meeting of the American Mathematical Society and the Romanian Mathematical Society” unde a tinut o prezentare cu titlul ”How to compute the multigraded Hilbert depth of a module” la Universitatea Alba Iulia pe data de 28-06-2013.

Bogdan Ichim a participat la trei stagii de cercetare in strainatate, doua in Spania si unul in Germania, care s-au finalizat cu scrierea a patru articole in colaborare cu profesori de la universitatile gazda [9], [15], [16] si [17] care au fost submise spre publicare. De asemenea a tinut o prezentare cu titlul ”An algorithm for computing the multigraded Hilbert depth of a module” la Universitatea Osnabrück pe data de 05-11-2013 si o prezentare cu titlul ”Recent results in Computational Voting Theory” in cadrul conferintei ”Trends in Commutative Algebra” la Universitatea Jaume I pe data de 18-09-2014.

Parti preliminare din rezultatele lui Dorin Popescu au fost expuse de acesta la conferinta omagiala pentru Constantin Nastasescu (Fac. Matematica Univ. Bucuresti mai 2013), la conferinta internationala ”Experimental and Theoretical Methods in Algebra, Geometry, and Topology”, Eforie Nord, 20-24 iunie, 2013 si la conferinta aniversara de 150 ani de la Fac. de Matematica, Univ. Bucuresti, 30 august -1 septembrie, 2013.

Marius Vladoiu a tinut o prezentare cu titlul ”Markov bases of lattice ideals” in cadrul conferintei ”Meeting On Combinatorial Commutative Algebra 2014” pe data de 12-09-2014.

Andrei Zarojanu a tinut o prezentare cu titlul ”An introduction to Hilbert depth” in cadrul conferintei ”The Third Conference of Mathematical Society of the Republic of Moldova ICMS-50” pe data de 20-08-2014.

Bibliografie

[1] 4ti2 team. `4ti2`–*A software package for algebraic, geometric and combinatorial problems on linear spaces.* Available at `http://www.4ti2.de`.

[2] J. Apel, On a conjecture of R. P. Stanley. Part II-Quotients Modulo Monomial Ideals, J. Algebr. Comb., 17, 57–74 (2003)

[3] M. Ahmed, J. De Loera, R. Hemmecke. *Polyhedral Cones of Magic Cubes and Squares.* Algorithm combinat. **25**, 25–41, (2003).

[4] V. Almendra, B. Ichim, *jNormaliz. A graphical interface for Normaliz.* Available at http://www.math.uos.de/normaliz.

[5] A. Popescu, *Depth and Stanley depth of the canonical form of a factor of monomial ideals*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie, **57**(105), (2014), 207-216.

[6] M. Beck, S. Hoşten. *Cyclotomic polytopes and growth series of cyclotomic lattices.* Math. Res. Lett. **13** (2006), 607–622.

[7] W. Bruns, R. Hemmecke, B. Ichim, M. Köppe, C. Söger, *Challenging computations of Hilbert bases of cones associated with algebraic statistics*. Exp. Math. **20** (2011), 25–33.

[8] W. Bruns, B. Ichim, *Normaliz: algorithms for affine monoids and rational cones.* J. Algebra **324** (2010), 1098–1113.

[9] W. Bruns, B. Ichim, C. Söger, *The power of pyramid decomposition in Normaliz.* Preprint 2013. Available at http://arxiv.org/abs/1206.1916.

[10] W. Bruns, B. Ichim, C. Söger, *Normaliz. Algorithms for rational cones and affine monoids.* Available at `http://www.math.uos.de/normaliz`.

[11] W. Bruns and R. Koch, *Computing the integral closure of an affine semigroup.* Univ. Iagel. Acta Math. **39** 59–70 (2001).

[12] CoCoATeam, *CoCoA: a system for doing Computations in Commutative Algebra.* Available at http://cocoa.dima.unige.it

[13] E. Ehrhart. *Sur les carres magiques.* C.R. Acad.Sci. Paris 277A, 575–577, (1973).

[14] J. Herzog, *A survey on Stanley depth.* In “Monomial Ideals, Computations and Applications”, A. Bigatti, P. Giménez, E. Sáenz-de-Cabezón (Eds.), Proceedings of MONICA 2011. Springer Lecture Notes in Mathematics **2083** (2013).

[15] B. Ichim, L. Katthän and J. J. Moyano-Fernández. *The behavior of Stanley depth under polarization.* Preprint http://arxiv.org/abs/1401.4309.

[16] B. Ichim, L. Katthän and J. J. Moyano-Fernández. *Stanley depth and the lcm-lattice.* Preprint http://arxiv.org/abs/ 1405.3602.

[17] B. Ichim, L. Katthän and J. J. Moyano-Fernández. *Lcm-lattices and Stanley depth: a first computational approach.* Preprint http://arxiv.org/abs/ 1408.4255.

[18] B. Ichim and J.J. Moyano-Fernández, *How to compute the multigraded Hilbert depth of a module.* Mathematische Nachrichten **287** (2014), 1274 – 1287.

[19] B. Ichim and A. Zarojanu, *An algorithm for computing the multigraded Hilbert depth of a module.* Experimental Mathematics **23** (2014), 322 – 331.

[20] B. Ichim and A. Zarojanu, *An introduction to Hilbert depth.* Proceedings of the Third Conference of Mathematical Society of Moldova IMCS-50 (2014), 86 – 89.

[21] B. Ichim and A. Zarojanu, *Hdepth: An algorithm for computing the multigraded Hilbert depth of a module.* Implemented in CoCoA. Available from https://dl.dropboxusercontent.com/s/urhrasy5ntgbwzf/Hdepth.htm.

[22] J. De Loera, B. Dutra, M Koppe, S. Moreinis, G. Pinto and J. Wu. *A User's Guide for LattE integrale v1.5, 2011.* Available at http://www.math.ucdavis.edu/latte/.

[23] M. Köppe and S. Verdoolaege, *Computing parametric rational generating functions with a Primal Barvinok algorithm.* Electr. J. Comb. **15** (2008), R16, 1–19.

[24] A. Popescu, D. Popescu, *Four generated, squarefree, monomial ideals*, in ”Bridging Algebra, Geometry, and Topology”, Editors Denis Ibadula, Willem Veys, Springer Proceed. in Math. and Statistics, **96**, 2014, arXiv:AC/1309.4986v5.

[25] D. Popescu, *Depth of factors of square free monomial ideals*, Proceedings of AMS **142** (2014), 1965-1972,arXiv:AC/1110.1963.

[26] D. Popescu, *Upper bounds of depth of monomial ideals*, J. Commutative Algebra, **5**, 2013, 323-327, arXiv:AC/1206.3977.

[27] D. Popescu, A. Zarojanu, *Three generated, squarefree, monomial ideals*, to appear in Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie, **58(106)** (2015), no 3, arXiv:AC/1307.8292v6.

[28] D. Popescu, *Stanley depth on five generated, squarefree, monomial ideals*, 2013, arXiv:AC/1312.0923v2.

[29] D. Popescu, *Stanley depth of monomial ideals*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie, **58(106)**, (2015), no 1, arXiv:AC/1404.6010.

[30] H. Ohsugi and T. Hibi, *Toric ideals arising from contingency tables.* In: Commutative Algebra and Combinatorics. Ramanujan Mathematical Society Lecture Note Series **4** (2006), 87–111.
[31] A. Schürmann, *Exploiting polyhedral symmetries in social choice.* Social Choice and Welfare, in press.
[32] Y.H. Shen, *Lexsegment ideals of Hilbert depth 1*, (2012), arXiv:AC/1208.1822v1.
[33] R. Stanley. *Linear homogeneous diophantine equations and magic labelings of graphs.* Duke Math. J. **40**, 607–632, (1973).
[34] R. P. Stanley, *Linear Diophantine equations and local cohomology.* Invent. Math. **68**, 175–193, (1982).
[35] R. P. Stanley, *Combinatorics and Commutative Algebra.* Birkäuser, (1983).
[36] B. Sturmfels and V. Welker, *Commutative algebra of statistical ranking.* J. Algebra **361** (2012), 264–286.