بسم الله الرحمن الرحیم

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه
گاوازنگ - زنجان

بررسی روش پایه‌ی کاهیده برای حل مسئله‌ی قیمت گذاری اختیار معامله

پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد

الیاس پورایران

استاد راهنما: **دکتر علی فروش باستانی**

بهمن ۱۳۹۲

به بهشت نمی‌روم

اگر

پدر و مادرم آنجا نباشند.

چکیده

با توجه به اهمیت مشتقات مالی به خصوص اختیار معامله در بازارهای مالی، قیمت‌گذاری این‌گونه قراردادها به یک مسئله‌ی چالش‌برانگیز در ریاضیات مالی تبدیل شده است. با توجه به دینامیک قیمت دارایی پایه‌ی اختیار مسئله‌ی قیمت‌گذاری اختیار را می‌توان به صورت یک معادله یا دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی یا انتگرال-دیفرانسیل جزئی فرمول‌بندی کرد. بدست آوردن یک جواب تحلیلی برای این‌چنین معادلات قیمت‌گذاری اغلب کار دشواری است از این رو از روش‌های عددی برای تقریب جواب این معادلات استفاده می‌کنیم. روش‌های مختلفی برای حل این‌چنین معادلاتی از قبیل روش تفاضلات متناهی، روش عناصر متناهی و ... وجود دارد. یک ایده‌ی کلی برای اکثر روش‌های عددی ارائه‌شده برای حل این‌گونه معادلات قیمت‌گذاری این است که جواب معادله را روی یک دنباله از توابع پایه‌ای تصویر کنیم، به چنین روش‌هایی روش‌های تصویری گویند. در روش‌های تصویری انتخاب توابع پایه‌ای اهمیت زیادی در کارایی عددی روش دارد. در این پایان‌نامه ما به معرفی روش پایه‌ی کاهیده می‌پردازیم و یک روش پایه‌ی کاهیده برای حل مسئله‌ی قیمت‌گذاری اختیار مبتنی بر جواب‌های معادله‌ی بلک-شولز را مورد بررسی قرار می‌دهیم. چگونگی پیاده‌سازی، همگرایی و دقت این روش پایه‌ی کاهیده را برای مدل‌های پخش و پرش-پخش مورد بررسی قرار می‌دهیم. در نهایت این روش را برای مدل‌های با رژیم متغیر تعمیم می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی: *قیمت‌گذاری اختیار، معادلات انتگرال-دیفرانسیل جزئی، روش پایه‌ی کاهیده، مدل‌های با رژیم متغیر، مدل‌های پخش، مدل‌های پرش-پخش، مدل مرتون، مدل کو.*

فهرست

فهرست تصاویر

فهرست جداول

پیش‌گفتار

با توجه به کاربرد گسترده‌ی مشتقات مالی به ویژه قراردادهای اختیار معامله در کنترل و مدیریت ریسک در بازارهای مالی، قیمت‌گذاری و پوشش ریسک این‌گونه قراردادها به یک مسئله‌ی چالش‌برانگیز و با اهمیت در ریاضیات مالی تبدیل شده است. در ابتدا قیمت‌گذاری و پوشش ریسک قراردادهای اختیار معامله تحت مدل بلک-شولز [۱] انجام می‌گرفت. در این مدل قیمت دارایی پایه اختیار از یک حرکت براونی هندسی[۱] با تلاطم ثابت پیروی می‌کند. اما بررسی داده‌های تاریخی بازار نشان می‌دهد که دینامیک دارایی در بازار واقعی خیلی پیچیده‌تر از یک حرکت براونی هندسی استاندارد با تلاطم ثابت است. بنابراین مدل بلک-شولز در مدل کردن قیمت دارایی‌ها خوب عمل نمی‌کند و مدل قابل قبولی در قیمت‌گذاری اختیارات نیست. از این رو تلاش‌های زیادی برای تعمیم و بهبود مدل بلک-شولز به منظور سازگاری بیشتر با داده‌های بازار واقعی صورت گرفته است. از جمله‌ی این بهبودها می‌توان به مدل‌های تلاطم تصادفی[۲] و تلاطم موضعی[۳]، نرخ بهره‌ی تصادفی[۴] و مدل‌های پرش-پخش[۵] اشاره کرد. به عنوان مثال هستون [۲] و هال و وایت [۳] به طور جداگانه یک مدل پخش با تلاطم تصادفی برای دینامیک دارایی معرفی کردند. مرتون [۴] و کو [۵] برای اصلاح دینامیک دارایی از پرش استفاده نموده‌اند. پرش‌ها در دینامیک دارایی با اضافه کردن یک فرآیند پوآسن مرکب[۶] به مدل بلک-شولز تولید

[۱] Geometric Brownian Motion

[۲] Stochastic Volatility

[۳] Local Volatility

[۴] Stochastic Interest Rate

[۵] Jump-Diffusion

[۶] Compound Poisson Process

می‌شوند.

در سال‌های اخیر به منظور مدل‌سازی بهتر و کاراتر قیمت دارایی‌ها از یک مجموعه از مدل‌های قیمت دارایی استفاده می‌کنند. این مدل‌ها تحت عنوان مدل‌های با رژیم متغیر[۱] شناخته می‌شوند که این مدل‌ها برای اولین بار توسط همیلتون [۶] و در چهارچوب سری‌های زمانی معرفی شدند. در مدل‌های با رژیم متغیر برای دینامیک دارایی یک مجموعه‌ی متناهی از حالت‌ها را در نظر می‌گیرند بطوریکه در هر حالت قیمت دارایی از یک مدل خاص پیروی می‌کند و همچنین هر حالت به طور تصادفی با یک احتمال انتقال به حالت دیگر تغییر می‌کند. در مدل‌های با رژیم متغیر معمول‌ترین راه برای نشان دادن تغییرات تصادفی میان حالت‌های مختلف استفاده از زنجیره‌های مارکوف[۲] است [۷].

متناسب با اینکه دینامیک قیمت دارایی از چه مدلی پیروی می‌کند، مسئله‌ی قیمت‌گذاری اختیار را می‌توان به صورت یک معادله دیفرانسیل جزئی (PDE) یا انتگرال-دیفرانسیل جزئی[۳] (PIDE) و یا دستگاهی از این معادلات با شرایط مرزی مناسب فرمول‌بندی کرد. وقتی قیمت دارایی از یک مدل پخش پیروی می‌کند، مسئله‌ی قیمت‌گذاری اختیار به صورت یک معادله‌ی دیفرانسیل جزئی مرتبه‌ی دوم خواهد بود [۸، ۹]. این معادله تحت مدل‌های پرش-پخش به صورت یک معادله‌ی انتگرال-دیفرانسیل جزئی مرتبه‌ی دوم تبدیل می‌شود. مسئله‌ی قیمت‌گذاری اختیار در مدل‌های با رژیم متغیر به صورت یک دستگاه از معادلات دیفرانسیل یا انتگرال-دیفرانسیل جزئی جفت شده است [۱۰، ۱۱].

غیر از مدل پخش بلک-شولز با تلاطم ثابت، پیدا کردن یک جواب تحلیلی برای معادله‌ی قیمت‌گذاری در حالت کلی کاری بس دشوار و غیر ممکن است، بنابراین نیازمند روش‌های عددی برای تقریب جواب این چنین معادلاتی هستیم. روش‌های زیادی برای حل این معادلات به منظور قیمت‌گذاری ابزارهای

---

[۱] Regime Switching

[۲] Markov Chain

[۳] Partial Differential or Integro-Differential Equation

مشتقه ارائه شده است. در موارد خاص با ضرایب ثابت، روش‌های تبدیل فوریه را می‌توان به طور کارا بکار برد [۱۳،۱۲]. عموماً، روش‌های تفاضلات متناهی[۱] و عناصر متناهی[۲] برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی و انتگرال-دیفرانسیل جزئی قیمت‌گذاری استفاده می‌شوند [۱۴،۹]. در مدل‌های دارای پرش، عبارت انتگرال غیر موضعی موجب می‌شود بعد از گسسته سازی به ماتریس‌های چگال برسیم [۱۴]، بنابراین نیازمند روش‌های عددی کارا برای قیمت‌گذاری قراردادهای پیچیده هستیم. برای معادلات انتگرال-دیفرانسیل جزئی که دارای عبارات غیر موضعی هستند، می‌توان با ترکیب روش‌های فوریه و تفاضلات متناهی [۱۵] عملگر معادله را به دو بخش دیفرانسیل و انتگرال تجزیه کرد و با بکاربردن یک روش گام‌به‌گام ضمنی-صریح روی زمان[۳] [۱۴] جواب معادله را به طور تقریبی محاسبه کرد. از جمله روش‌های دیگر که برای سرعت بخشیدن به حل عددی معادلات قیمت‌گذاری معرفی شده‌اند می‌توان به روش توابع پایه‌ای شعاعی[۴] [۱۶] و روش[۵](FST) [۱۸،۱۷] اشاره کرد.

یک ایده‌ی کلی برای اکثر روش‌های عددی ارائه شده برای حل این‌گونه معادلات قیمت‌گذاری این است که جواب معادله را روی یک دنباله از توابع پایه‌ای تصویر کنیم که به چنین روش‌هایی روش‌های تصویری[۶] گویند. در روش‌های تصویری انتخاب توابع پایه‌ای اهمیت زیادی در کارایی عددی روش دارد. یک خاصیت مهم روش‌های تصویری این است که می‌توان جواب مسئله را به طور کارا با استفاده از تعداد کمی از توابع پایه‌ای نمایش داد، که سبب می‌شود به یک دستگاه خطی کوچک برسیم، به این

---

۱ Finite Difference

۲ Finite Element

۳ Implicit-Explicit Time Stepping

۴ Radial Basis Functions Method

۵ Fourier space time-stepping

۶ Projection Methods

ویژگی خاصیت نمایش تنک[1] گویند.

در اکثر روش‌های تصویری موجود از قبیل عناصر متناهی و توابع پایه‌ای شعاعی بعد فضا بزرگ است که این موضوع موجب می‌شود به دستگاه‌های خطی با بعد بزرگ برسیم. هدف روش‌های پایه‌ی کاهیده[2] [۱۹] این است از روی جواب‌های حالت خاص معادله‌ی مورد نظر، فضاهایی با بعد کوچک برای جواب معادله تولید نمائیم.

در این پایان‌نامه، ابتدا به طور خلاصه روش پایه‌ی کاهیده را معرفی می‌کنیم، سپس به معرفی و بررسی یک روش پایه‌ی کاهیده‌ی خاص مبتنی بر جواب‌های معادله بلک-شولز که در مقاله [۲۰] برای مسئله‌ی قیمت‌گذاری اختیار تحت مدل‌های پخش و پرش-پخش بیان شده است می‌پردازیم. سپس با استفاده از روش گالرکین[3] مبتنی بر این پایه‌ی کاهیده، قیمت اختیار اروپایی را تحت مدل‌های پخش بلک-شولز [۱] و واریانس کشسان ثابت[4] (CEV) [۲۱، ۲۲] و مدل‌های پرش-پخش مرتون [۴] و کو [۵] محاسبه می‌کنیم و دقت و سرعت همگرایی این روش را بررسی می‌کنیم. در نهایت برای اولین بار به بررسی چگونگی تعمیم و پیاده‌سازی این روش پایه‌ی کاهیده خاص برای مسئله‌ی قیمت‌گذاری اختیار اروپایی تحت مدل‌های با رژیم متغیر می‌پردازیم و به منظور بررسی دقت این روش، قیمت اختیار اروپایی را تحت مدل‌های پخش بلک-شولز و پرش-پخش مرتون و کو با رژیم متغیر محاسبه می‌کنیم.

---

۱ Sparse Representation Property

۲ Reduced Basis Methods

۳ Galerkin Method

۴ Constant Elasticity Variance

فصل اول

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

در این فصل به معرفی برخی مفاهیم مقدماتی مورد نیاز در این پایان‌نامه می‌پردازیم. این فصل شامل سه قسمت است: بخش اول به مفاهیم و مقدمات مالی، بخش دوم به مقدمات ریاضی و بخش سوم به معرفی روش پایه‌ی کاهیده به طور خلاصه اختصاص یافته است.

۱.۱ مفاهیم و مقدمات مالی

مشتقات مالی به منظور پوشش و مدیریت ریسک در بازارهای مالی نقش بسیار مهمی ایفا می‌کنند. مشتقات مالی نوعی از ابزارهای مالی هستند که ارزش آن‌ها وابسته به متغیر اقتصادی دیگر، به نام دارایی پایه[۱] است. دارایی پایه می‌تواند نفت خام، طلا، ارز، سهام، شاخص سهام[۲]، نرخ بهره، ... و

[۱] Underlying Asset

[۲] Stock Indexs

حتی یک مشتقه مالی دیگر باشد. به طور کلی مشتقات مالی به چهار دسته تقسیم می‌شوند: قراردادهای سلف[۱]، قراردادهای آتی[۲]، قراردادهای اختیار معامله[۳] و قراردادهای تاخت[۴]. در میان مشتقات مالی قراردادهای اختیار معامله دارای اهمیت بیشتری هستند و در بازارهای مالی بیشتر بکار میروند، بنابراین قیمت‌گذاری این قراردادها یکی از مسائل اساسی در ریاضیات مالی است.

تعریف ۱.۱.۱. اختیار معامله: اختیار معامله قراردادی است که به دارنده خود این حق را می‌دهد تا حجم مشخصی از دارایی پایه را در زمانی در آینده با قیمت مشخص مبادله کند.

آخرین زمان اجرای اختیار و قیمت مشخص شده در آن را به ترتیب **سررسید**[۵] و **قیمت توافقی**[۶] می‌نامیم. حق داده شده به دارنده‌ی اختیار به معنی گرفتن تعهد نیست، بنابراین دارنده‌ی اختیار می‌تواند اختیار را اجرا کند یا نکند.

تعریف ۲.۱.۱. پرداخت نهایی[۷]: پرداخت نهایی تابعی است که ارزش اختیار را در زمان سررسید مشخص می‌کند.

با توجه به پرداخت نهایی اختیارات می‌توان آن‌ها را به دو دسته‌ی کلی زیر دسته‌بندی کرد:

۱. **اختیار خرید**[۸]: اختیاری است که به دارنده‌ی آن این حق را می‌دهد که حجم مشخصی از دارایی پایه را در زمان آینده به قیمت مشخص خریداری کند. ارزش اختیار خرید در سررسید برابر است

[۱] Forwards Contracts

[۲] Futures Contracts

[۳] Options Contracts

[۴] Swaps Contracts

[۵] Maturity

[۶] Strike Price

[۷] Payoff

[۸] Call Option

با:

$$C(T) = (S_T - K)^+ = \max(S_T - K, ۰),$$

که در آن K قیمت توافقی‌ی اختیار، T زمان سررسید و S_T ارزش دارایی پایه در سررسید است.

۲. **اختیار فروش**[۱]**:** اختیاری است که به دارنده‌ی آن حق فروش حجم مشخصی از دارایی پایه را در زمان آینده به قیمت مشخص می‌دهد. ارزش اختیار فروش در سررسید برابر است با:

$$P(T) = (K - S_T)^+ = \max(K - S_T, ۰).$$

در دسته‌بندی دیگر، با توجه به زمان اجرا اختیارات به دو دسته‌ی کلی زیر تقسیم می‌شوند:

۱. **اختیار اروپایی**[۲]**:** اختیاری را که فقط در سررسید می‌توان اجرا کرد، اختیار اروپایی می‌نامیم.

۲. **اختیار آمریکایی**[۳]**:** اختیاری را که در هر زمانی قبل از سررسید یا در خود سررسید می‌توان اجرا کرد، اختیار آمریکایی می‌نامیم.

علاوه بر دو دسته‌بندی که در بالا برای اختیارات معرفی شد دسته‌بندی‌های دیگری وجود دارد که انواع دیگر اختیارات از قبیل اختیار آسیایی[۴]، اختیار نوسانی[۵]، اختیار بامانع[۶] و ... را معرفی می‌کنند. جهت آشنایی بیشتر با انواع مختلف اختیارات می‌توانید به کتاب‌ها و مقالات مالی مراجعه کنید.

---

۱ Put Option

۲ European Option

۳ American Option

۴ Asian Option

۵ Swing Option

۶ Barrier Option

تعریف ۳.۱.۱. آربیتراژ[۱]: موقعیتی که در آن سرمایه‌گذار بدون سرمایه اولیه و بدون قرار گرفتن در معرض ریسک بتواند سود کند را موقعیت آربیتراژ می‌گوییم.

فرض اساسی در قیمت‌گذاری مشتقات مالی، اصل عدم آربیتراژ در بازار است. ارزش اختیار با توجه به نوع اختیار به دینامیک دارایی پایه بستگی دارد. روش‌های گوناگونی برای محاسبه ارزش اختیارات وجود دارند که می‌توان به روش دوجمله‌ای[۲]، شبیه‌سازی مونت-کارلو[۳]، روش‌های PDE و ... اشاره کرد.

با توجه به نوع اختیار و دینامیک دارایی پایه مسئله‌ی قیمت‌گذاری اختیار را می‌توان به صورت یک معادله یا نامعادله‌ی دیفرانسیل جزئی یا انتگرال-دیفرانسیل جزئی و یا به صورت یک دستگاه معادلات یا نامعادلات با شرایط مرزی مناسب فرمول‌بندی کرد. روش‌های PDE دسته‌ای از روش‌ها هستند که جواب این چنین معالات قیمت‌گذاری را به طور تقریبی محاسبه می‌کنند که از جمله‌ی این روش‌ها می‌توان به روش تفاضلات متناهی، روش عناصر متناهی، روش توابع پایه‌ای شعاعی و ... اشاره کرد. در این پایان‌نامه روش پایه‌ی کاهیده را برای تقریب جواب معادله قیمت‌گذاری اختیار اروپایی معرفی می‌کنیم. برای این منظور در ادامه‌ی به معرفی صورت کلی معادلات دیفرانسیل و انتگرال-دیفرانسیل جزئی مرتبه دوم و مقدمات ریاضی مورد نیاز می‌پردازیم.

[۱] Arbitrage

[۲] Binomial Method

[۳] Monte-Carlo Simulation