



وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه
گاوزنگ - زنجان



بررسی روش پایه‌ی کاهیده برای حل مسئله‌ی قیمت‌گذاری اختیار معامله

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

الیاس پورایران

استاد راهنما: دکتر علی فروش باستانی

بهمن ۱۳۹۲

به بهشت نمی روم

اگر

پدر و مادرم آنجا نباشند.

چکیده

با توجه به اهمیت مشتقات مالی به خصوص اختیار معامله در بازارهای مالی، قیمت گذاری این گونه قراردادها به یک مسئله چالش برانگیز در ریاضیات مالی تبدیل شده است. با توجه به دینامیک قیمت دارایی پایه‌ی اختیار مسئله قیمت گذاری اختیار را می‌توان به صورت یک معادله یا دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی یا انتگرال-دیفرانسیل جزئی فرمول بندی کرد. بدست آوردن یک جواب تحلیلی برای این چنین معادلات قیمت گذاری اغلب کار دشواری است از این رو از روش های عددی برای تقریب جواب این معادلات استفاده می‌کنیم. روش های مختلفی برای حل این چنین معادلاتی از قبیل روش تفاضلات متناهی، روش عناصر متناهی و ... وجود دارد. یک ایده کلی برای اکثر روش های عددی ارائه شده برای حل این گونه معادلات قیمت گذاری این است که جواب معادله را روی یک دنباله از توابع پایه ای تصویر کنیم، به چنین روش هایی روش های تصویری گویند. در روش های تصویری انتخاب توابع پایه ای اهمیت زیادی در کارایی عددی روش دارد. در این پایان نامه ما به معرفی روش پایه ای کاهیده می‌پردازیم و یک روش پایه ای کاهیده برای حل مسئله قیمت گذاری اختیار مبتنی بر جواب های معادله ای بلک-شولز را مورد بررسی قرار می‌دهیم. چگونگی پیاده سازی، همگرایی و دقت این روش پایه ای کاهیده را برای مدل های پخش و پرش-پخش مورد بررسی قرار می‌دهیم. در نهایت این روش را برای مدل های با رژیم متغیر تعمیم می‌دهیم.

واژه های کلیدی: قیمت گذاری اختیار، معادلات انتگرال-دیفرانسیل جزئی، روش پایه ای کاهیده، مدل های با رژیم متغیر، مدل های پخش، مدل های پرش-پخش، مدل مرتون، مدل کو.

فهرست

چهار	چکیده
۱	پیش‌گفتار
۵	۱ تعاریف و مفاهیم مقدماتی
۵	۱.۱ مفاهیم و مقدمات مالی
۹	۲.۱ مقدمات ریاضی
۹	۱.۲.۱ معادلات دیفرانسیل و انتگرال-دیفرانسیل جزئی
۱۰	۲.۲.۱ روش گالرکین
۱۳	۳.۱ روش پایه‌ی کاهیده
۱۵	۲ یک روش پایه‌ی کاهیده برای قیمت‌گذاری اختیار اروپایی در مدل‌های پخش
۱۶	۱.۲ مدل‌های پخش
۱۶	۱.۱.۲ مثال‌ها
۱۸	۲.۲ معادله‌ی قیمت‌گذاری اختیار اروپایی در مدل‌های پخش
۱۹	۱.۲.۲ تغییر متغیر
۲۰	۲.۲.۲ تحویل مسئله به شرایط اولیه همگن

۲۱	تعریف پایه‌ی کاهشده	۳.۲
۲۴	مثال	۱.۳.۲
۲۵	خاصیت نمایش تنک	۲.۳.۲
۲۷	خواص پایه	۴.۲
۲۷	همگرایی	۱.۴.۲
۳۴	پایه در مدل CEV	۲.۴.۲
۳۵	پیااده‌سازی عددی	۵.۲
۳۷	نتایج عددی	۱.۵.۲
۴۵	یک روش پایه‌ی کاهشده برای قیمت‌گذاری اختیار اروپایی در مدل‌های پرش-پخش	۳
۴۶	مدل‌های پرش-پخش	۱.۳
۴۷	مدل پرش-پخش مرتون	۱.۱.۳
۴۸	مدل پرش-پخش کو	۲.۱.۳
۴۹	معادله‌ی قیمت‌گذاری اختیار اروپایی در مدل‌های پرش-پخش	۲.۳
۵۱	تعریف پایه‌ی کاهشده	۳.۳
۵۴	خاصیت نمایش تنک	۱.۳.۳
۵۵	پیااده‌سازی عددی	۴.۳
۵۷	نتایج عددی	۱.۴.۳
۶۵	یک روش پایه‌ی کاهشده برای قیمت‌گذاری اختیار اروپایی در مدل‌های با رژیم متغیر	۴
۶۶	مدل‌های با رژیم متغیر	۱.۴
۶۷	معادله‌ی قیمت‌گذاری اختیار اروپایی در مدل‌های با رژیم متغیر	۲.۴

۶۹	۱.۲.۴	تحویل مسئله به شرایط اولیه همگن
۷۰	۳.۴	تعریف پایه‌ی کاهیده
۷۱	۴.۴	پیا‌ده‌سازی عددی
۷۲	۱.۴.۴	نتایج عددی
۷۵	۵.۴	نتیجه‌گیری
۷۷	آ	مقدمه‌ای بر مفاهیم آنالیز تابعی
۷۷	۱.آ	فضاهای ضرب داخلی
۷۹	۲.آ	فضاهای حاصل ضرب دکارتی
۸۰	۳.آ	فرم‌های خطی و دوخطی
۸۲	۴.آ	فرم‌های خطی و دوخطی پارامتری
۸۴	۵.آ	کلاس توابع
۸۴	۱.۵.آ	توابع عددی و برداری
۸۵	۲.۵.آ	فضای توابع
۸۹	۶.آ	قضیه‌ی استون-وایرشراس
۹۰	۷.آ	قضیه‌ی گرین
۹۱		مراجع
۹۷		واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

فهرست تصاویر

۱.۲	توابع ω_i^{BS} برای حالت اختیار خرید نسبت به متغیر LFM برای σ_i های تعریف شده	۲۴
	در (۳۰.۲)	
۲.۲	توابع ω_i^{CEV} برای حالت اختیار خرید نسبت به متغیر LFM برای σ_i های تعریف	۲۵
	شده در (۳۰.۲)	
۳.۲	خطای تصویری $\varepsilon_p(T)$ بر حسب درصد در مقیاس لگاریتمی برای اختیار خرید	۲۶
	تحت مدل بلک-شولز و مدل CEV نسبت به n در دامنه Ω_ε	
۴.۲	خطای تصویری $\varepsilon_p(T)$ بر حسب درصد در مقیاس لگاریتمی برای اختیار خرید	۳۳
	تحت مدل بلک-شولز و مدل CEV نسبت به n در دامنه Ω_ε برای پایه‌ی کاهیده	
	تعریف شده در (۴۰.۲)	
۵.۲	خطای نسبی ارزش اختیار خرید بر حسب درصد نسبت به دارایی پایه روی بازه‌ی	۳۸
	Ω_ε برای مقادیر مختلف n در مدل بلک-شولز.	
۶.۲	خطای نسبی تلاطم ضمنی بر حسب درصد نسبت به دارایی پایه روی بازه‌ی Ω_ε برای	۳۹
	مقادیر مختلف n در مدل بلک-شولز.	
۷.۲	منحنی تلاطم ضمنی نسبت به دارایی پایه روی بازه‌ی Ω_ε برای مقادیر مختلف n در	۳۹
	مدل بلک-شولز.	

۴۱	۸.۲ خطای نسبی ارزش اختیار خرید بر حسب درصد نسبت به دارایی پایه روی بازه‌ی Ω_ε برای مقادیر مختلف n در مدل CEV.
۴۲	۹.۲ خطای نسبی تلاطم ضمنی بر حسب درصد نسبت به دارایی پایه روی بازه‌ی Ω_ε برای مقادیر مختلف n در مدل CEV.
۴۲	۱۰.۲ منحنی تلاطم ضمنی نسبت به دارایی پایه روی بازه‌ی Ω_ε برای مقادیر مختلف n در مدل CEV.
۴۴	۱۱.۲ تغییرات لگاریتم خطای نسبی قیمت بر حسب تغییرات n و N_τ برای مدل بلک-شولز: (آ) برای مقادیر مختلف n و تعداد گام زمانی ثابت $N_\tau = 200$ ، (ب) برای گام‌های زمانی مختلف و $n = 33$
۴۴	۱۲.۲ تغییرات لگاریتم خطای نسبی قیمت بر حسب تغییرات n و N_τ برای مدل CEV: (آ) برای مقادیر مختلف n و تعداد گام زمانی ثابت $N_\tau = 200$ ، (ب) برای گام‌های زمانی مختلف و $n = 33$
۵۴	۱.۳ توابع w_i^{JM} برای حالت اختیار خرید نسبت به متغیر LFM برای σ_i های تعریف شده در (۳۰.۲).
۵۵	۲.۳ توابع w_i^{JK} برای حالت اختیار خرید نسبت به متغیر LFM برای σ_i های تعریف شده در (۳۰.۲).
۵۶	۳.۳ خطای تصویری $\varepsilon_p(T)$ بر حسب درصد در مقیاس لگاریتمی برای اختیار خرید تحت مدل پرش-پخش مرتون نسبت به n در دامنه Ω_ε
۵۹	۴.۳ خطای نسبی ارزش اختیار خرید بر حسب درصد نسبت به دارایی پایه روی بازه‌ی Ω_ε برای مقادیر مختلف n در مدل مرتون.

۵۹	۵.۳	خطای نسبی تلاطم ضمنی بر حسب درصد نسبت به دارایی پایه روی بازه‌ی Ω_ε برای مقادیر مختلف n در مدل مرتون.
۶۰	۶.۳	منحنی تلاطم ضمنی نسبت به دارایی پایه روی بازه‌ی Ω_ε برای مقادیر مختلف n در مدل مرتون.
۶۰	۷.۳	خطای نسبی ارزش اختیار خرید بر حسب درصد نسبت به دارایی پایه روی بازه‌ی Ω_ε برای مقادیر مختلف n در مدل کو.
۶۱	۸.۳	خطای نسبی تلاطم ضمنی بر حسب درصد نسبت به دارایی پایه روی بازه‌ی Ω_ε برای مقادیر مختلف n در مدل کو.
۶۱	۹.۳	منحنی تلاطم ضمنی نسبت به دارایی پایه روی بازه‌ی Ω_ε برای مقادیر مختلف n در مدل کو.
۶۴	۱۰.۳	تغییرات لگاریتم خطای نسبی قیمت بر حسب تغییرات n و N_τ برای مدل مرتون: (آ) برای مقادیر مختلف n و تعداد گام زمانی ثابت $N_\tau = 100$ ، (ب) برای گام‌های زمانی مختلف و $n = 33$
۶۴	۱۱.۳	تغییرات لگاریتم خطای نسبی قیمت بر حسب تغییرات n و N_τ برای مدل کو: (آ) برای مقادیر مختلف n و تعداد گام زمانی ثابت $N_\tau = 100$ ، (ب) برای گام‌های زمانی مختلف و $n = 17$
۷۶	۱.۴	نمودار مربوط به تغییرات لگاریتم خطای نسبی ارزش اختیار بر حسب لگاریتم تغییرات اندازه پایه n : (آ) مدل ۱، (ب) مدل ۲، (ج) مدل ۳.

فهرست جداول

۲۴	پارامترهای مدل.	۱.۲
	ارزش اختیار خرید و تلاطم ضمنی و خطای نسبی مربوط به آن‌ها در مدل بلک-شولز	۲.۲
۴۰	برای مقادیر مختلف n و تعداد گام زمانی ثابت $N_T = ۲۰۰$	۳.۲
	ارزش اختیار خرید و تلاطم ضمنی و خطای نسبی مربوط به آن‌ها در مدل بلک-شولز حاصل از روش عناصر متناهی برای مقادیر مختلف n و تعداد گام زمانی ثابت	
۴۰ $N_T = ۲۰۰$	۴.۲
	ارزش اختیار خرید و تلاطم ضمنی و خطای نسبی مربوط به آن‌ها در مدل بلک-شولز	
۴۱	برای مقادیر مختلف تعداد گام زمانی N_T و $n = ۳۳$	۵.۲
	ارزش اختیار خرید و تلاطم ضمنی و خطای نسبی مربوط به آن‌ها در مدل CEV	
۴۳	برای مقادیر مختلف n و تعداد گام زمانی ثابت $N_T = ۲۰۰$	۶.۲
	ارزش اختیار خرید و تلاطم ضمنی و خطای نسبی مربوط به آن‌ها در مدل CEV	
۴۳	برای مقادیر مختلف تعداد گام زمانی N_T و $n = ۳۳$	
۵۴	پارامترهای مدل مرتون.	۱.۳
۵۴	پارامترهای مدل کو.	۲.۳

۳.۳	ارزش اختیار خرید و تلاطم ضمنی و خطای نسبی مربوط به آنها در مدل مرتون
۶۲	برای مقادیر مختلف n و تعداد گام زمانی ثابت $N_T = 100$
۴.۳	ارزش اختیار خرید و تلاطم ضمنی و خطای نسبی مربوط به آنها در مدل مرتون
۶۲	برای مقادیر مختلف تعداد گام زمانی N_T و $n = 33$
۵.۳	ارزش اختیار خرید و تلاطم ضمنی و خطای نسبی مربوط به آنها در مدل کو برای
۶۳	مقادیر مختلف n و تعداد گام زمانی ثابت $N_T = 100$
۶.۳	ارزش اختیار خرید و تلاطم ضمنی و خطای نسبی مربوط به آنها در مدل کو برای
۶۳	مقادیر مختلف تعداد گام زمانی N_T و $n = 17$
۱.۴	پارامترهای مدل ۱
۷۳	
۲.۴	پارامترهای مدل ۲
۷۳	
۳.۴	پارامترهای مدل ۳
۷۳	
۴.۴	نتایج عددی برای ارزش اختیار خرید اروپایی تحت مدل ۱ نسبت مقادیر مختلف n .
۷۴	
۵.۴	نتایج عددی برای ارزش اختیار خرید اروپایی تحت مدل ۲ نسبت مقادیر مختلف n .
۷۴	
۶.۴	نتایج عددی برای ارزش اختیار خرید اروپایی تحت مدل ۳ نسبت مقادیر مختلف n .
۷۵	

پیش‌گفتار

با توجه به کاربرد گسترده‌ی مشتقات مالی به ویژه قراردادهای اختیار معامله در کنترل و مدیریت ریسک در بازارهای مالی، قیمت‌گذاری و پوشش ریسک این‌گونه قراردادها به یک مسئله‌ی چالش‌برانگیز و با اهمیت در ریاضیات مالی تبدیل شده است. در ابتدا قیمت‌گذاری و پوشش ریسک قراردادهای اختیار معامله تحت مدل بلک-شولز [۱] انجام می‌گرفت. در این مدل قیمت‌داری پایه اختیار از یک حرکت براونی هندسی^۱ با تلاطم ثابت پیروی می‌کند. اما بررسی داده‌های تاریخی بازار نشان می‌دهد که دینامیک‌داری در بازار واقعی خیلی پیچیده‌تر از یک حرکت براونی هندسی استاندارد با تلاطم ثابت است. بنابراین مدل بلک-شولز در مدل کردن قیمت‌داری‌ها خوب عمل نمی‌کند و مدل قابل قبولی در قیمت‌گذاری اختیارات نیست. از این رو تلاش‌های زیادی برای تعمیم و بهبود مدل بلک-شولز به منظور سازگاری بیشتر با داده‌های بازار واقعی صورت گرفته است. از جمله‌ی این بهبودها می‌توان به مدل‌های تلاطم تصادفی^۲ و تلاطم موضعی^۳، نرخ بهره‌ی تصادفی^۴ و مدل‌های پرش-پخش^۵ اشاره کرد. به عنوان مثال هستون [۲] و هال و وایت [۳] به طور جداگانه یک مدل پخش با تلاطم تصادفی برای دینامیک‌داری معرفی کردند. مرتون [۴] و کو [۵] برای اصلاح دینامیک‌داری از پرش استفاده نموده‌اند. پرش‌ها در دینامیک‌داری با اضافه کردن یک فرآیند پواسن مرکب^۶ به مدل بلک-شولز تولید

^۱ Geometric Brownian Motion

^۲ Stochastic Volatility

^۳ Local Volatility

^۴ Stochastic Interest Rate

^۵ Jump-Diffusion

^۶ Compound Poisson Process

می‌شوند.

در سال‌های اخیر به منظور مدل‌سازی بهتر و کاراتر قیمت دارایی‌ها از یک مجموعه از مدل‌های قیمت دارایی استفاده می‌کنند. این مدل‌ها تحت عنوان مدل‌های با رژیم متغیر^۱ شناخته می‌شوند که این مدل‌ها برای اولین بار توسط همیلتون [۶] و در چهارچوب سری‌های زمانی معرفی شدند. در مدل‌های با رژیم متغیر برای دینامیک دارایی یک مجموعه‌ی متناهی از حالت‌ها را در نظر می‌گیرند بطوریکه در هر حالت قیمت دارایی از یک مدل خاص پیروی می‌کند و همچنین هر حالت به طور تصادفی با یک احتمال انتقال به حالت دیگر تغییر می‌کند. در مدل‌های با رژیم متغیر معمول‌ترین راه برای نشان دادن تغییرات تصادفی میان حالت‌های مختلف استفاده از زنجیره‌های مارکوف^۲ است [۷].

متناسب با اینکه دینامیک قیمت دارایی از چه مدلی پیروی می‌کند، مسئله‌ی قیمت‌گذاری اختیار را می‌توان به صورت یک معادله دیفرانسیل جزئی (PDE) یا انتگرال-دیفرانسیل جزئی^۳ (PIDE) و یا دستگاهی از این معادلات با شرایط مرزی مناسب فرمول‌بندی کرد. وقتی قیمت دارایی از یک مدل پخش پیروی می‌کند، مسئله‌ی قیمت‌گذاری اختیار به صورت یک معادله‌ی دیفرانسیل جزئی مرتبه‌ی دوم خواهد بود [۸، ۹]. این معادله تحت مدل‌های پرش-پخش به صورت یک معادله‌ی انتگرال-دیفرانسیل جزئی مرتبه‌ی دوم تبدیل می‌شود. مسئله‌ی قیمت‌گذاری اختیار در مدل‌های با رژیم متغیر به صورت یک دستگاه از معادلات دیفرانسیل یا انتگرال-دیفرانسیل جزئی جفت شده است [۱۰، ۱۱].

غیر از مدل پخش بلک-شولز با تلاطم ثابت، پیدا کردن یک جواب تحلیلی برای معادله‌ی قیمت‌گذاری در حالت کلی کاری بس دشوار و غیر ممکن است، بنابراین نیازمند روش‌های عددی برای تقریب جواب این چنین معادلاتی هستیم. روش‌های زیادی برای حل این معادلات به منظور قیمت‌گذاری ابزارهای

^۱ Regime Switching

^۲ Markov Chain

^۳ Partial Differential or Integro-Differential Equation

مشتقه ارائه شده است. در موارد خاص با ضرایب ثابت، روش‌های تبدیل فوریه را می‌توان به طور کارا بکار برد [۱۳، ۱۲]. عموماً، روش‌های تفاضلات متناهی^۱ و عناصر متناهی^۲ برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی و انتگرال-دیفرانسیل جزئی قیمت‌گذاری استفاده می‌شوند [۱۴، ۹]. در مدل‌های دارای پرش، عبارت انتگرال غیر موضعی موجب می‌شود بعد از گسسته سازی به ماتریس‌های چگال برسیم [۱۴]، بنابراین نیازمند روش‌های عددی کارا برای قیمت‌گذاری قراردادهای پیچیده هستیم. برای معادلات انتگرال-دیفرانسیل جزئی که دارای عبارات غیر موضعی هستند، می‌توان با ترکیب روش‌های فوریه و تفاضلات متناهی [۱۵] عملگر معادله را به دو بخش دیفرانسیل و انتگرال تجزیه کرد و با بکاربردن یک روش گام‌به‌گام ضمنی-صریح روی زمان^۳ [۱۴] جواب معادله را به طور تقریبی محاسبه کرد. از جمله روش‌های دیگر که برای سرعت بخشیدن به حل عددی معادلات قیمت‌گذاری معرفی شده‌اند می‌توان به روش توابع پایه‌ای شعاعی^۴ [۱۶] و روش^۵ (FST) [۱۷، ۱۸] اشاره کرد.

یک ایده‌ی کلی برای اکثر روش‌های عددی ارائه شده برای حل این‌گونه معادلات قیمت‌گذاری این است که جواب معادله را روی یک دنباله از توابع پایه‌ای تصویر کنیم که به چنین روش‌هایی روش‌های تصویری^۶ گویند. در روش‌های تصویری انتخاب توابع پایه‌ای اهمیت زیادی در کارایی عددی روش دارد. یک خاصیت مهم روش‌های تصویری این است که می‌توان جواب مسئله را به طور کارا با استفاده از تعداد کمی از توابع پایه‌ای نمایش داد، که سبب می‌شود به یک دستگاه خطی کوچک برسیم، به این

^۱ Finite Difference

^۲ Finite Element

^۳ Implicit-Explicit Time Stepping

^۴ Radial Basis Functions Method

^۵ Fourier space time-stepping

^۶ Projection Methods

ویژگی خاصیت نمایش تنک^۱ گویند.

در اکثر روش‌های تصویری موجود از قبیل عناصر متناهی و توابع پایه‌ای شعاعی بعد فضا بزرگ است که این موضوع موجب می‌شود به دستگاه‌های خطی با بعد بزرگ برسیم. هدف روش‌های پایه‌ی کاهیده^۲ [۱۹] این است از روی جواب‌های حالت خاص معادله‌ی مورد نظر، فضاهایی با بعد کوچک برای جواب معادله تولید نمائیم.

در این پایان‌نامه، ابتدا به طور خلاصه روش پایه‌ی کاهیده را معرفی می‌کنیم، سپس به معرفی و بررسی یک روش پایه‌ی کاهیده‌ی خاص مبتنی بر جواب‌های معادله بلک-شولز که در مقاله [۲۰] برای مسئله‌ی قیمت‌گذاری اختیار تحت مدل‌های پخش و پرش-پخش بیان شده است می‌پردازیم. سپس با استفاده از روش گالرکین^۳ مبتنی بر این پایه‌ی کاهیده، قیمت اختیار اروپایی را تحت مدل‌های پخش بلک-شولز [۱] و واریانس کشسان ثابت^۴ (CEV) [۲۱، ۲۲] و مدل‌های پرش-پخش مرتون [۴] و کو [۵] محاسبه می‌کنیم و دقت و سرعت همگرایی این روش را بررسی می‌کنیم. در نهایت برای اولین بار به بررسی چگونگی تعمیم و پیاده‌سازی این روش پایه‌ی کاهیده خاص برای مسئله‌ی قیمت‌گذاری اختیار اروپایی تحت مدل‌های با رژیم متغیر می‌پردازیم و به منظور بررسی دقت این روش، قیمت اختیار اروپایی را تحت مدل‌های پخش بلک-شولز و پرش-پخش مرتون و کو با رژیم متغیر محاسبه می‌کنیم.

^۱ Sparse Representation Property

^۲ Reduced Basis Methods

^۳ Galerkin Method

^۴ Constant Elasticity Variance

فصل اول

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

در این فصل به معرفی برخی مفاهیم مقدماتی مورد نیاز در این پایان‌نامه می‌پردازیم. این فصل شامل سه قسمت است: بخش اول به مفاهیم و مقدمات مالی، بخش دوم به مقدمات ریاضی و بخش سوم به معرفی روش پایه‌ی کاهیده به طور خلاصه اختصاص یافته است.

۱.۱ مفاهیم و مقدمات مالی

مشتقات مالی به منظور پوشش و مدیریت ریسک در بازارهای مالی نقش بسیار مهمی ایفا می‌کنند. مشتقات مالی نوعی از ابزارهای مالی هستند که ارزش آن‌ها وابسته به متغیر اقتصادی دیگر، به نام دارایی پایه^۱ است. دارایی پایه می‌تواند نفت خام، طلا، ارز، سهام، شاخص سهام^۲، نرخ بهره، ... و

^۱ Underlying Asset

^۲ Stock Indexs

حتی یک مشتقه مالی دیگر باشد. به طور کلی مشتقات مالی به چهار دسته تقسیم می‌شوند: قراردادهای سلف^۱، قراردادهای آتی^۲، قراردادهای اختیار معامله^۳ و قراردادهای تاخت^۴. در میان مشتقات مالی قراردادهای اختیار معامله دارای اهمیت بیشتری هستند و در بازارهای مالی بیشتر بکار می‌روند، بنابراین قیمت‌گذاری این قراردادها یکی از مسائل اساسی در ریاضیات مالی است.

تعریف ۱.۱.۱. اختیار معامله: اختیار معامله قراردادی است که به دارنده خود این حق را می‌دهد تا حجم مشخصی از دارایی پایه را در زمانی در آینده با قیمت مشخص مبادله کند.

آخرین زمان اجرای اختیار و قیمت مشخص شده در آن را به ترتیب **سررسید**^۵ و **قیمت توافقی**^۶ می‌نامیم. حق داده شده به دارنده‌ی اختیار به معنی گرفتن تعهد نیست، بنابراین دارنده‌ی اختیار می‌تواند اختیار را اجرا کند یا نکند.

تعریف ۲.۱.۱. پرداخت نهایی^۷: پرداخت نهایی تابعی است که ارزش اختیار را در زمان سررسید مشخص می‌کند.

با توجه به پرداخت نهایی اختیارات می‌توان آن‌ها را به دو دسته‌ی کلی زیر دسته‌بندی کرد:

۱. **اختیار خرید**^۸: اختیاری است که به دارنده‌ی آن این حق را می‌دهد که حجم مشخصی از دارایی پایه را در زمان آینده به قیمت مشخص خریداری کند. ارزش اختیار خرید در سررسید برابر است

^۱ Forwards Contracts

^۲ Futures Contracts

^۳ Options Contracts

^۴ Swaps Contracts

^۵ Maturity

^۶ Strike Price

^۷ Payoff

^۸ Call Option

با:

$$C(T) = (S_T - K)^+ = \max(S_T - K, 0),$$

که در آن K قیمت توافقی اختیار، T زمان سررسید و S_T ارزش دارایی پایه در سررسید است.

۲. اختیار فروش^۱: اختیاری است که به دارنده آن حق فروش حجم مشخصی از دارایی پایه را در

زمان آینده به قیمت مشخص می‌دهد. ارزش اختیار فروش در سررسید برابر است با:

$$P(T) = (K - S_T)^+ = \max(K - S_T, 0).$$

در دسته‌بندی دیگر، با توجه به زمان اجرا اختیارات به دو دسته‌ی کلی زیر تقسیم می‌شوند:

۱. اختیار اروپایی^۲: اختیاری را که فقط در سررسید می‌توان اجرا کرد، اختیار اروپایی می‌نامیم.

۲. اختیار آمریکایی^۳: اختیاری را که در هر زمانی قبل از سررسید یا در خود سررسید می‌توان اجرا

کرد، اختیار آمریکایی می‌نامیم.

علاوه بر دو دسته‌بندی که در بالا برای اختیارات معرفی شد دسته‌بندی‌های دیگری وجود دارد که انواع

دیگر اختیارات از قبیل اختیار آسیایی^۴، اختیار نوسانی^۵، اختیار بامانع^۶ و ... را معرفی می‌کنند. جهت

آشنایی بیشتر با انواع مختلف اختیارات می‌توانید به کتاب‌ها و مقالات مالی مراجعه کنید.

^۱ Put Option

^۲ European Option

^۳ American Option

^۴ Asian Option

^۵ Swing Option

^۶ Barrier Option

تعریف ۳.۱.۱. آربیتراژ^۱: موقعیتی که در آن سرمایه‌گذار بدون سرمایه اولیه و بدون قرار گرفتن در معرض ریسک بتواند سود کند را موقعیت آربیتراژ می‌گوییم.

فرض اساسی در قیمت‌گذاری مشتقات مالی، اصل عدم آربیتراژ در بازار است. ارزش اختیار با توجه به نوع اختیار به دینامیک دارایی پایه بستگی دارد. روش‌های گوناگونی برای محاسبه ارزش اختیارات وجود دارند که می‌توان به روش دوجمله‌ای^۲، شبیه‌سازی مونت-کارلو^۳، روش‌های PDE و ... اشاره کرد.

با توجه به نوع اختیار و دینامیک دارایی پایه مسئله‌ی قیمت‌گذاری اختیار را می‌توان به صورت یک معادله یا نامعادله‌ی دیفرانسیل جزئی یا انتگرال-دیفرانسیل جزئی و یا به صورت یک دستگاه معادلات یا نامعادلات با شرایط مرزی مناسب فرمول‌بندی کرد. روش‌های PDE دسته‌ای از روش‌ها هستند که جواب این چنین معادلات قیمت‌گذاری را به طور تقریبی محاسبه می‌کنند که از جمله‌ی این روش‌ها می‌توان به روش تفاضلات متناهی، روش عناصر متناهی، روش توابع پایه‌ای شعاعی و ... اشاره کرد. در این پایان‌نامه روش پایه‌ی کاهیده را برای تقریب جواب معادله قیمت‌گذاری اختیار اروپایی معرفی می‌کنیم. برای این منظور در ادامه‌ی به معرفی صورت کلی معادلات دیفرانسیل و انتگرال-دیفرانسیل جزئی مرتبه دوم و مقدمات ریاضی مورد نیاز می‌پردازیم.

^۱ Arbitrage

^۲ Binomial Method

^۳ Monte-Carlo Simulation