Α Λυκείου Άλγεβρα
Επαναληπτικό Διαγώνισμα 1-Εκφώνηση-Απάντηση

Θέμα Α

Α1. Να αποδείξετε ότι ο $\nu^{o\varsigma}$ όρος μιας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω είναι: $\alpha_\nu=\alpha_1+(\nu-1)\omega$

Μονάδες 10

Α2. Να δώσετε τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας ενός ενδεχομένου Α κάποιου δειγματικού χώρου Ω

Μονάδες 5

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) η Λάθος (Λ).

α. Ισχύει: $\alpha \cdot \beta \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$

β. Για την απόσταση των αριθμών α και β ισχύει: $d(\alpha,\beta)=|\beta-\alpha|$

γ. Τρεις μη μηδενικοί αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν ισχύει: $\beta^2=\alpha+\gamma$

δ. Το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha \neq 0$ γίνεται ετερόσημο του α, μόνο όταν είναι $\Delta>0$ και για τις τιμές του που βρίσκονται εκτός των ριζών

ε. Αν Α, Β ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω, τότε ισχύει

$$P(A\cap B)-P(A)=P(B)-P(A\cup B)$$

Μονάδες 10

Θέμα Β

Δίνονται οι παραστάσεις: $A=\frac{\sqrt{x^2}}{x}-\frac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}$ και $B=\sqrt[3]{\sqrt{31}-2}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{31}+2}$

Β1. Να απλοποιήσετε την παράσταση $A=\frac{\sqrt{x^2}}{x}-\frac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}$,αν $0<x<3$

Μονάδες 8

Β2. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $B=\sqrt[3]{\sqrt{31}-2}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{31}+2}$

Μονάδες 8

Β3. Αν Α=2 , Β=3 να λύσετε την ανίσωση: $\frac{|\omega-1|-4}{A}+\frac{5}{B}<\frac{|1-\omega|}{B}$

Μονάδες 9

Θέμα Γ

Δίνεται η εξίσωση $\mu(\mu-1)x=\mu^2-1$, $\mu\in R$

Γ1. Να λυθεί η εξίσωση για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού μ.

Μονάδες 8

Γ2. Αν η εξίσωση είναι ταυτότητα να βρεθεί η τιμή του πραγματικού αριθμού κ ώστε να ισχύει: $|(\kappa+1)^{3\mu}|=8$

Μονάδες 8

Γ3. Αν κ=1 να βρεθεί ο όρος της γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο $\alpha_1=\dfrac{\kappa}{4}$ και λόγο λ=2 ο οποίος ισούται με 256.

Μονάδες 9

Θέμα Δ

Δίνονται:

- Αριθμητική πρόοδος (α_ν) για την οποία ισχύουν: $S_5=5$ και $\alpha_2+\alpha_7+\alpha_{12}=15$
- Η εξίσωση $x^2-(\lambda+3)x+\lambda+2=0$, $\lambda\in R$ (1)
- Ο δειγματικός χώρος $\Omega=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ που αποτελείται από απλά ισοπίθανα ενδεχόμενα.

Δ1. Να αποδείξετε ότι ο πρώτος όρος της παραπάνω αριθμητικής προόδου είναι $\alpha_1=-1$ και η διαφορά ω=1

Μονάδες 5

Δ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda\in R$

Μονάδες 5

Δ3. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

$A=\{\mu\in\Omega/\ |\alpha_{3\mu+3}-\alpha_\mu|>15$, όπου α_μ ο μ-οστός όρος της παραπάνω αριθμητικής προόδου$\}$

$B=\{\lambda\in\Omega/\ \dfrac{S-6}{P-11}<0$, όπου S το άθροισμα και P το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης (1)$\}$

α. Να αποδείξετε ότι $P(A)=\dfrac{2}{5}$ και $P(B)=\dfrac{1}{2}$

Μονάδες 5

β. Να βρείτε την πιθανότητα να μην πραγματοποιείται κανένα από τα Α και Β

Μονάδες 5

γ. Να βρείτε την πιθανότητα να πραγματοποιείται μόνο ένα από τα Α και Β

Μονάδες 5

Απαντήσεις

Θέμα Α

Α1. Σχολικό βιβλίο. Σελίδα 126
Α2. Σχολικό βιβλίο. Σελίδα 31
Α3. **Λ-Σ-Λ-Λ-Σ**

Θέμα Β

Β1. $A=\frac{\sqrt{x^2}}{x}-\frac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}=\frac{|x|}{x}-\frac{\sqrt{(x-3)^2}}{x-3}\overset{x>0}{=}\frac{x}{x}-\frac{|x-3|}{x-3}\overset{x-3<0}{=}1-\frac{-(x-3)}{x-3}=2$

Β2. $B=\sqrt[3]{\sqrt{31}-2}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{31}+2}=\sqrt[3]{(\sqrt{31}-2)(\sqrt{31}+2)}=\sqrt[3]{31-4}=\sqrt[3]{27}=3$

Β3.
$\frac{|\omega-1|-4}{A}+\frac{5}{B}<\frac{|1-\omega|}{B}\underset{B=3}{\overset{A=2}{\Leftrightarrow}}\frac{|\omega-1|-4}{2}+\frac{5}{3}<\frac{|1-\omega|}{3}\Leftrightarrow 3|\omega-1|-12+10<2|\omega-1|$
$\Leftrightarrow 3|\omega-1|-2<2|\omega-1|\Leftrightarrow|\omega-1|<2\Leftrightarrow -2<\omega-1<2\Leftrightarrow -1<\omega<3$
ή $\omega\in(-1,3)$

Θέμα Γ

Γ1. $\underbrace{\mu(\mu-1)}_{\alpha}\cdot x=\underbrace{\mu^2-1}_{\beta}\quad(1)$

- Αν $\mu\neq 0$ και $\mu\neq 1$ η (1) έχει μοναδική λύση $x=\frac{(\mu-1)(\mu+1)}{\mu(\mu-1)}=\frac{\mu+1}{\mu}$
- Αν μ(μ-1)=0 είναι μ=0 ή μ=1
  Για μ=0 η (1)γίνεται: 0x=-1 αδύνατη
  Για μ=1 η (1) γίνεται 0x=0 ταυτότητα.

Γ2. Η εξίσωση είναι ταυτότητα για μ=1 άρα:
$|(\kappa+1)^{3\mu}|=8\Leftrightarrow|(\kappa+1)^3|=8\Leftrightarrow(\kappa+1)^3=8$ ή $(\kappa+1)^3=-8$
Τότε: $(\kappa+1)^3=8\Leftrightarrow\kappa+1=\sqrt[3]{8}\Leftrightarrow\kappa+1=2\Leftrightarrow\kappa=1$
$(\kappa+1)^3=-8\Leftrightarrow\kappa+1=-\sqrt[3]{|-8|}\Leftrightarrow\kappa+1=-2\Leftrightarrow\kappa=-3$

Γ3. Για κ=1 έχουμε: $\alpha_1 = \frac{1}{4}$ Τότε

$$\alpha_\nu = 256 \Leftrightarrow \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-1} = 256 \overset{\lambda=2}{\Leftrightarrow} \frac{1}{4} \cdot 2^{\nu-1} = 256 \Leftrightarrow 2^{-2} \cdot 2^{\nu-1} = 256 \Leftrightarrow 2^{\nu-3} = 2^8$$
$$\Leftrightarrow \nu - 3 = 8 \Leftrightarrow \nu = 11$$

Θέμα Δ
Δ1.

- $S_5 = 5 \Leftrightarrow \frac{5}{2}[2\alpha_1 + (5-1)\omega] = 5 \Leftrightarrow 5(2\alpha_1 + 4\omega) = 10 \Leftrightarrow 2\alpha_1 + 4\omega = 2$
  $\Leftrightarrow \alpha_1 + 2\omega = 1 \quad (1)$

- $\alpha_2 + \alpha_7 + \alpha_{12} = 15 \Leftrightarrow \alpha_1 + \omega + \alpha_1 + 6\omega + \alpha_1 + 11\omega = 15 \Leftrightarrow 3\alpha_1 + 18\omega = 15 \Leftrightarrow$
  $\alpha_1 + 6\omega = 5 \quad (2)$

- Από το σύστημα των εξισώσεων (1),(2) έχουμε α_1=-1 , ω=1

Δ2. x^2-(λ+3)x+λ+2=0
$\Delta = [-(\lambda+3)]^2 - 4(\lambda+2) = \lambda^2 + 6\lambda + 9 - 4\lambda - 8 = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda+1)^2 \geq 0$
Άρα ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in R$

Δ3.

- $|\alpha_{3\mu+3} - \alpha_\mu| > 15 \Leftrightarrow |\alpha_1 + (3\mu+3-1)\omega - [\alpha_1 + (\mu-1)\omega]| > 15 \Leftrightarrow$
  $|\alpha_1 + (3\mu+2) \cdot 1 - \alpha_1 - (\mu-1) \cdot 1| > 15 \Leftrightarrow |3\mu + 2 - \mu + 1| > 15 \Leftrightarrow |2\mu + 3| > 15 \Leftrightarrow$
  $2\mu + 3 > 15 \quad$ ή $\quad 2\mu + 3 < -15 \Leftrightarrow \mu > 6 \quad$ ή $\quad \mu < -9$
  Όμως $\mu \in \Omega$ άρα μ=7,8,9,10

- $\frac{S-6}{P-11} < 0 \Leftrightarrow (S-6)(P-11) < 0 \underset{P=\lambda+2}{\overset{S=\lambda+3}{\Leftrightarrow}} (\lambda + 3 - 6)(\lambda + 2 - 11) < 0 \Leftrightarrow$
  $(\lambda - 3)(\lambda - 9) < 0 \Leftrightarrow 3 < \lambda < 9$
  Όμως $\lambda \in \Omega$ άρα λ=4,5,6,7,8

α. Είναι $A = \{7,8,9,10\}$ $\quad B = \{4,5,6,7,8\}$ τότε

$$P(A) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \qquad P(B) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

β. Είναι $A \cap B = \{7,8\}$ άρα $P(A \cap B) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

$P[(A \cup B)'] = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) =$

$1 - (\frac{2}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5}) = \frac{3}{10}$

γ. $P[(A - B) \cup (B - A)] = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = \ldots = \frac{1}{2}$