

Theoretische Physik 1b: Mechanik

Übungsblatt 12

Prof. Dr. Frank Wilhelm-Mauch

Dr. Michael Marthaler

Andrii Sokolov, M.Sc.

SS 2018

Abgabe 02.07.2018

Info: Bitte schreiben Sie Name und Ihre Übungsgruppe auf das Übungsblatt und tackern Sie dieses. Sie dürfen in Gruppen von bis zu drei Personen abgeben.

Aufgabe 1: Der angestoßene harmonische Oszillator (10 Punkte)

Wir betrachten einen getriebenen Harmonischen Oszillator der durch folgende Bewegungsgleichung beschrieben wird,

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + \Omega^2 x(t) = f(t).$$

- (a) Lösen Sie die Bewegungsgleichung im Frequenzraum mit dem komplexen Ansatz $z(t)$ mit $x(t) = \text{Re}(z(t))$. Zeigen Sie, dass die allgemeine Lösung im Frequenzraum gegeben ist durch,

$$\tilde{z}(\omega) = \frac{\tilde{f}(\omega)}{\Omega^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}.$$

(3 Punkte)

- (b) Die treibend Kraft $f(t)$ ist gegeben durch

$$f(t) = \frac{f_0 t}{t_0} \Theta(t) \Theta(t_0 - t) \cos(\omega_0 t). \quad (1)$$

Berechnen Sie $\tilde{f}(\omega)$ und zeigen Sie, dass die Funktion bei $\omega = \omega_0$ nicht divergiert. (3 Punkte)

- (c) Finden Sie nun für die antreibend Kraft (1) die Lösung $z(t)$ für $\omega_0 = 0$ und $t_0 > t > 0$. Sie können dabei folgenden Zusammenhang verwenden:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{i\omega t}}{\Omega^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} = 2\pi \frac{\sin \Omega t}{\Omega} e^{-\gamma t} \Theta(t)$$

(4 Punkte)

Hinweis: Eine Funktion $f(t)$ wird durch die Fouriertransformation in den Frequenzraum transformiert,

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega t} \tilde{f}(\omega). \quad (2)$$

Aufgabe 2: Lineare Kette mit 3 Teilchen (15 Punkte)

Wir betrachten 3 Teilchen mit derselben Masse m , die mit masselosen Federn verbunden sind (alle mit gleicher Federkonstante k). Wie in Abb. 1 dargestellt sind die Federn mit den Enden fest verbunden. Zur Beschreibung verwenden wir die Koordinaten $x_i(t)$, die den Unterschied zwischen der tatsächlichen Position des i -ten Teilchens $y_i(t)$ und seiner Gleichgewichtslage y_{i0} bezeichnen, also gilt $x_i(t) = y_i(t) - y_{i0}$. Die Lagrangefunktion des Systems ist gegeben durch:

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) - \frac{k}{2} [x_1^2 + (x_2 - x_1)^2 + (x_3 - x_2)^2 + x_3^2].$$

- (a) Was beschreiben die Terme $-\frac{k}{2}x_1^2$ und $-\frac{k}{2}x_3^2$, die in der Lagrangefunktion auftauchen? (1 Punkt)

(b) Die Lagrangefunktion kann in folgender Form geschrieben werden:

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 (T_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j - V_{ij} x_i x_j).$$

Wie sehen die zugehörigen Matrizen T und V aus? (2 Punkte)

(c) Berechnen Sie die Frequenzen der drei Eigenmoden des Systems. (4.5 Punkte)

(d) Bestimmen Sie die zugehörigen Eigenvektoren. (4.5 Punkte)

(e) Skizzieren Sie für jede Eigenmode ein einfaches Diagramm, welches die zugehörige Bewegung beschreibt. (3 Punkte)

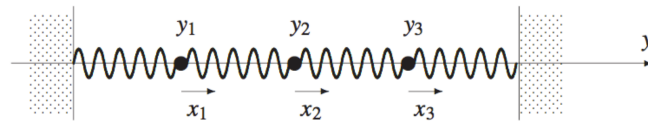


Abbildung 1: Hilfsskizzen zu Aufgabe 2

Aufgabe 3: Doppelpendel

(15 Punkte)

(a) Stellen Sie die Zwangsbedingungen für das Doppelpendel aus Abb.2 auf und konstruieren Sie daraus die Lagrangefunktion des Systems. (3 Punkte)

(b) Wählen Sie nun die Koordinaten $x_i = l_i \varphi_i$ und entwickeln Sie die Lagrangefunktion bis zur quadratischen Ordnung in den kleinen Auslenkungen. (3 Punkte)

(c) Geben Sie die Matrizen T und V an, mit denen sich die Lagrangefunktion in der Form

$$\mathcal{L} = (\dot{x}^T T \dot{x} - x^T V x)/2 + \text{const}$$

schreiben lässt. (4 Punkte)

(d) Geben Sie durch Lösen der Eigenwertgleichung

$$(V - \omega^2 T)A = 0$$

Eigenwerte und zugehörige Eigenvektoren des Systems für den Fall $m_1 = m_2$ und $l_1 = l_2$ an. (5 Punkte)

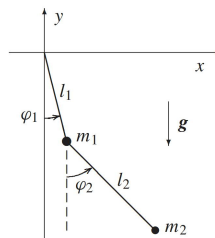


Abbildung 2: Doppelpendel in der x - y -Ebene.