

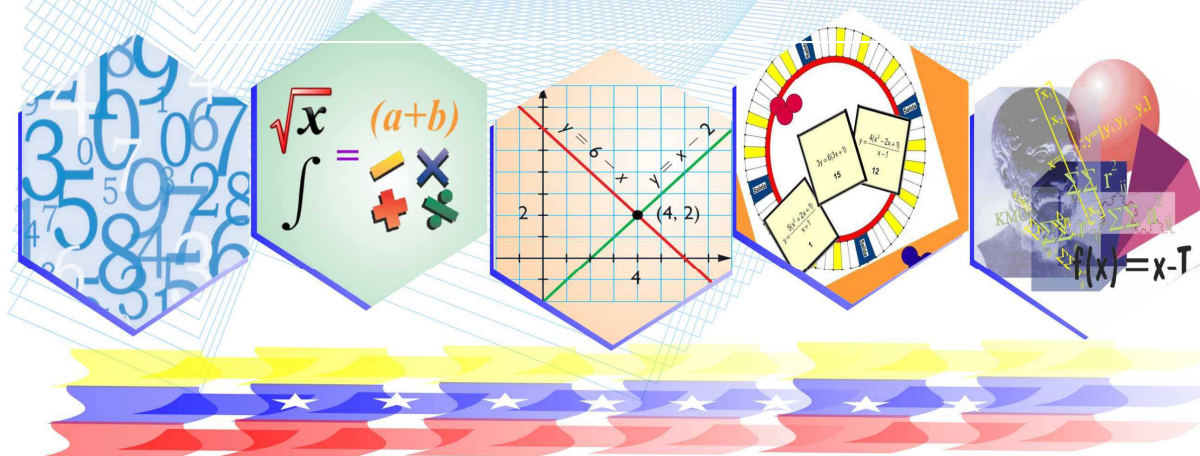
REPÚBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA
MINISTERIO DEL PODER POPULAR PARA LA DEFENSA
UNIVERSIDAD NACIONAL EXPERIMENTAL POLITÉCNICA
DE LA FUERZA ARMADA NACIONAL BOLIVARIANA
VICERRECTORADO ACADÉMICO
DIRECCIÓN DE TECNOLOGÍA EDUCATIVA



**Lecturas de apoyo didáctico
de la unidad curricular:**

Matemática

Unidad 2: Radicación



**UNIVERSIDAD NACIONAL EXPERIMENTAL POLITÉCNICA DE LA FUERZA
ARMADA NACIONAL BOLIVARIANA
(UNEFA)**

**VICERRECTORADO ACADÉMICO
DIRECCIÓN DE TECNOLOGÍA EDUCATIVA**



EL PRESENTE MATERIAL SE ENCUENTRA EN PROCESO DE EVALUACIÓN FORMATIVA, AGRADECEMOS
ENVIAR COMENTARIOS U OBSERVACIONES QUE PERMITAN LA OPTIMIZACIÓN DEL MISMO

Av. La Estancia con Av. Caracas y Calle Holanda frente al Edificio Banaven (Cubo Negro), Chuao.
Código Postal 1061 Caracas, Venezuela
unefa.vac.tecnologiaeducativa@gmail.com



2.- RADICACIÓN

Aplicar las propiedades de radicación en la resolución de ejercicios y problemas.

2.1 Radicación: Definición, Propiedades y Operaciones con radicales.	2
2.2 Extracción de factores de un radical.	18
2.3 Expresiones Conjugadas y Racionalización.	21

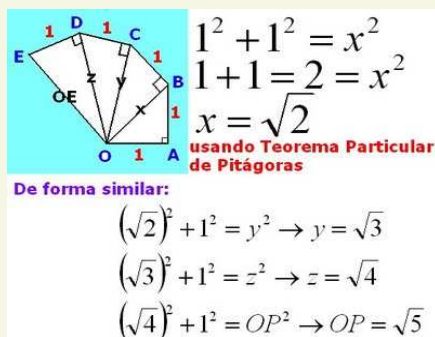
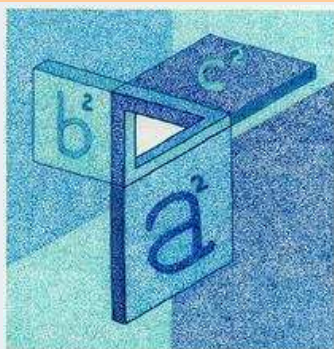


Programa de Apoyo Didáctico

Matemáticas

RADICACIÓN

MOTIVACIÓN



La visión del universo que tenían el sabio Pitágoras de Samos y sus discípulos, estaba dominada por sus ideas filosóficas acerca del número. Decían que:

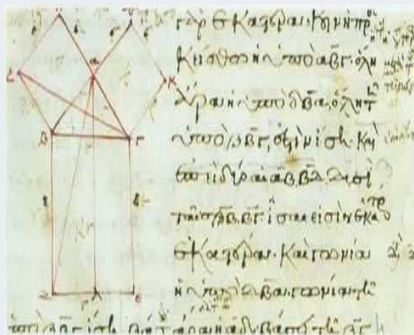
“el número natural y las proporciones entre números naturales gobernaban todo cuanto existía”

Un descubrimiento hecho por los mismos pitagóricos, a través del Teorema de Pitágoras, demostró que esta afirmación **era falsa**, ya que ellos mismos se dieron cuenta de la existencia de un número que no era natural y tampoco se podía expresar como fracción alguna. El triángulo cuyos catetos son ambos de medida 1, fue el que originó el derrumbe de dicha teoría filosófica.

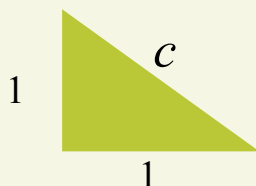


Teorema de Pitágoras

El cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo viene dado por la suma de los cuadrados de los catetos.



El triángulo en cuestión es el siguiente:



$$\text{donde : } c^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

$$c = \sqrt{2}$$

Es decir, el número que representa la longitud de la hipotenusa **C**, de un triángulo rectángulo isósceles con lados de medida **1**, se representa como $\sqrt{2}$, se lee “raíz cuadrada de 2” y nos indica aquel número que elevado al cuadrado es igual 2. Como ya sabemos $\sqrt{2}$ no es un número entero ni un número racional, este número es considerado dentro de los números reales como un irracional.

En la radicación también se presentan los siguientes casos:

a) Cuando multiplicamos $2 \times 2 = 2^2 = 4$ decimos entonces que 2 es la raíz cuadrada de 4 y se indica $2 = \sqrt{4}$.

b) Cuando multiplicamos $5 \times 5 \times 5 = 5^3 = 125$ decimos entonces que 5 es la raíz cúbica de 125 y se indica $5 = \sqrt[3]{125}$.

Resolver problemas como estos:

c) Vas a construir una cerca alrededor del jardín cuyo terreno es cuadrado. Se sabe que el jardín tiene 12 m^2 . El problema es determinar cuantos metros de cerca tienes que comprar para cercar todo el jardín. Si **l** es la longitud del lado del cuadrado, entonces, la ecuación que nos queda resolver es

$$l^2 = 12.$$

En base a esto, podemos decir, que encontrar la raíz n –ésima de un número h , es encontrar un número r , tales que $r^n = h$ y a esta operación se le llama *radicación*, la cual trataremos en esta unidad.

Con el dominio de las propiedades de la radicación, podemos manejar eficientemente las relaciones entre elementos de un problema, donde estén involucrados expresiones radicales.

Objetivo

Aplicar correctamente las propiedades de radicación en la resolución de ejercicios y problemas

Para el logro de este objetivo se contemplan los siguientes temas:

Contenido

Radicación:

Conocimientos Previos

Definición, Propiedades y Ejemplos.

Extracción e introducción de factores en un radical.

Expresiones conjugadas, Racionalización.

Tener en cuenta:

- Leer los contenidos previos que debes conocer, antes de iniciar el estudio de este módulo.
- En la columna izquierda encontrarás algunas ayudas y comentarios que te serán de utilidad, a medida que vayas leyendo el material.
- Resuelve nuevamente cada ejemplo por tu cuenta y compara los resultados.
- A medida que estés resolviendo los ejemplos, analiza el procedimiento aplicado en cada paso.
- Sigue los procedimientos sugeridos en los ejemplos presentados.
- Intercambia ideas, procedimientos y soluciones con otros compañeros.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Pre requisitos

Números Racionales

Operaciones con números fraccionarios:

- Adición y sustracción con igual o diferente denominador,
- Multiplicación y división de un número entero por un número fraccionado.

Potenciación:

Leyes de la Potenciación:
Con números positivos y negativos:

- Potencia de un producto.
- Potencia de un cociente.
- Potencia de una potencia.

Expresiones Algebraicas:

- Términos semejantes
- Agrupación de términos semejantes, para sumar y restar.

Comprobación

1) Para resolver las siguientes expresiones :

i. $\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^5$ aplicamos la ley de potenciación : Potencia de una potencia, que consiste en multiplicar los exponentes : $\left(\frac{1}{3}\right) \cdot 5$ y colocarlo como un único exponente, es

$$\text{decir } \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^5 = a^{\frac{5}{3}}$$

ii. $x^{\frac{3}{5}} \cdot y^{\frac{3}{5}} = (x \cdot y)^{\frac{3}{5}}$, aplicamos la ley de potenciación: el producto de las bases con un mismo exponente.

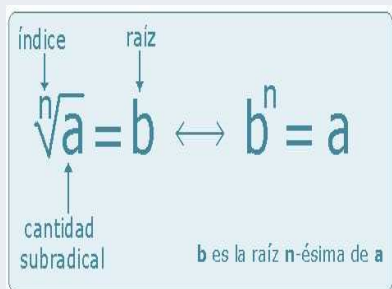
iii. $x^{\frac{3}{7}} \cdot x^{\frac{5}{7}} = x^{\frac{3}{7} + \frac{5}{7}} = x^{\frac{8}{7}}$, en este caso, en el producto

de potencias de igual base, se suman los exponentes.

iv. Para el caso de la división de potencias de igual base, los exponentes se restan:

$$\frac{x^{\frac{7}{5}}}{x^{\frac{3}{2}}} = x^{\frac{7}{5} - \frac{3}{2}} = x^{-\frac{1}{10}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{10}}}$$

DESARROLLO



RADICACIÓN:

Si se desea encontrar los valores de x que satisfacen la igualdad $x^2 = 4$, estos son los números 2 y -2 .

Para comprobar este hecho, elevamos al cuadrado cualquiera de los valores dados y da como resultado 4 .

A los valores de una incógnita, en este caso (x) , que satisfacen una igualdad se les denominan **raíces**, entonces en el caso particular que se trató se puede decir que, x es igual a la raíz cuadrada de 4 , y se denota así:

$$x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4}.$$

Se utiliza el símbolo $\sqrt{}$ para indicar un radical.

La expresión $\sqrt[n]{x^m}$ se lee :

raíz n -ésima(n) de x a la m -ésima(m) y sus partes son:

$\sqrt{}$ es el signo radical

x^m es la cantidad sub-radical

(n) es el índice del radical. Este debe ser un número entero positivo mayor que uno.

Las raíces surgen como una forma alterna de expresar y resolver potencias, tal como se mostró en el ejemplo anterior.

Las raíces más utilizadas son las que se leen como:

Raíz cuadrada ($\sqrt{\quad}$), cuando en el índice no se escribe ningún valor, se sobreentiende que es dos(2)

Raíz cúbica $\sqrt[3]{\quad}$

Raíz cuarta $\sqrt[4]{\quad}$

Raíz quinta $\sqrt[5]{\quad}$

Y así sucesivamente, observe que la lectura de la raíz depende del número que se encuentre en el índice.

Una potencia **de exponente fraccionario** se puede

escribir como raíz, es decir, si tenemos $x^{\frac{m}{n}}$, esto es igual a $\sqrt[n]{x^m}$.

De aquí se puede generalizar que la expresión sub-radical consta de una base y un exponente. Para convertirlo en potencia con exponente fraccionario consideramos:

- La base de la potencia es la base de la expresión sub-radical (x).
- El numerador del exponente fraccionario es el exponente de la base en la cantidad sub-radical (m) y su denominador es el índice del radical (n)

Se considera el caso particular cuando $m = 1$, podemos definir la siguiente equivalencia:

$$\sqrt[n]{x} = r \text{ sí y solo si } x = r^n \quad \text{EQ. 1}$$

Criterio de existencia de la raíz n -ésima de un número, $\sqrt[n]{x}$:

- (a) Si el índice n es par y x **es positivo**, existen dos raíces n -ésimas reales de x , una positiva y otra negativa. Pero la expresión $\sqrt[n]{x}$ sólo está referida a la positiva. Es decir, las dos raíces n -ésimas de x son $\sqrt[n]{x}$ y $-\sqrt[n]{x}$. Sin embargo, los **números reales negati-**

vos no tienen una raíz real cuando el índice es par.

Por ejemplo,

- **81 tiene dos raíces cuadradas, 9 y -9**,
pues $9^2 = 81$ y $(-9)^2 = 81$.
- **23 tiene dos raíces cuartas $\sqrt[4]{23}$ y $-\sqrt[4]{23}$.**

Sin embargo,

- **-36 no tiene raíz cuadrada** porque ningún número real elevado al cuadrado da -36, es decir $\sqrt{-36}$ **no existe**, no es un número real.

Por lo mismo, **-23 no tiene raíz cuarta.**

(b) Si el índice **n es impar**, cualquiera sea el número real, X, positivo o negativo, tiene una única raíz **n**-ésima.

Por ejemplo,

la raíz cúbica de 8 es 2, $\sqrt[3]{8} = 2$,

y la raíz cúbica de -27 es -3, $\sqrt[3]{-27} = -3$



Propiedades de los Radicales:

El producto de las raíces con igual índice es la raíz del producto.

Esta propiedad nos indica que resolver el producto de dos o más raíces con igual índice es igual a la raíz del producto de las cantidades sub-radicales con el mismo índice, en términos generales:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

Ejemplo 1: Escriba el siguiente producto de raíces $\sqrt[5]{2x} \cdot \sqrt[5]{3y}$ como la raíz de un producto. Como es un producto de radicales con igual índice, se escribe la raíz una sola vez, manteniendo el mismo índice y se expresan las cantidades sub-radicales como un producto.

$$\sqrt[5]{2x} \cdot \sqrt[5]{3y} = \sqrt[5]{2x \cdot 3y} = \sqrt[5]{6xy}$$

Respuesta: $\sqrt[5]{2x} \cdot \sqrt[5]{3y} = \sqrt[5]{6xy}$

El cociente de las raíces con igual índice es la raíz del cociente.

Esta propiedad nos indica que resolver el cociente de dos o más raíces con igual índice, es igual a la raíz del cociente de las cantidades sub-radicales con el mismo índice, en términos generales:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Cuando hablamos de potencia de radicales simplemente nos referimos a potencias que tienen como base un radical. Estas potencias cumplen con todas las propiedades de la potenciación.

Ejemplo 2: Escriba el siguiente cociente de raíces

$$\frac{\sqrt[5]{6x}}{\sqrt[5]{3y}} \text{ como una raíz de un cociente.}$$

Como es un cociente de radicales con igual índice, se escribe la raíz una sola vez manteniendo el mismo índice, y se expresan las cantidades sub-radicales como un cociente.

$$\frac{\sqrt[5]{6x}}{\sqrt[5]{3y}} = \sqrt[5]{\frac{6x}{3y}} = \sqrt[5]{\frac{2x}{y}} = \sqrt[5]{2xy^{-1}}$$

Respuesta: $\frac{\sqrt[5]{6x}}{\sqrt[5]{3y}} = \sqrt[5]{2xy^{-1}}$

Potencia de una raíz:

Escribir una raíz elevada a una expresión, es igual a escribir bajo el signo radical la cantidad sub-radical elevada a esa misma expresión, es decir:

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

Ejemplo 3: Resolver $(\sqrt[3]{x^2})^3$

$$(\sqrt[3]{x^2})^3 = \sqrt[3]{(x^2)^3} = \sqrt[3]{x^6}$$

Respuesta: $(\sqrt[3]{x^2})^3 = \sqrt[3]{x^6}$

Vamos a explicar el procedimiento para el caso donde la base es un producto de factores, con el siguiente ejemplo:

Esta propiedad se refiere a que bajo un signo radical puede existir otro signo radical, como por ejemplo

$$\sqrt{\sqrt{y}} \text{ o varios como } \sqrt[5]{\sqrt[4]{2z}}.$$

Ejemplo 4: Resolver $(\sqrt[4]{y^3 x})^5$

$$(\sqrt[4]{y^3 x})^5 = \sqrt[4]{(y^3 x)^5} = \sqrt[4]{y^{15} x^5}$$

Respuesta: $(\sqrt[4]{y^3 x})^5 = \sqrt[4]{y^{15} x^5}$

Raíz de una raíz:

Resolver esto es muy fácil, sólo se deben multiplicar los índices de los radicales y escribir un nuevo radical con este resultado como índice y se conservan las cantidades sub-radicales. Esta regla o propiedad se enuncia de la siguiente forma:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

Ejemplo 5: Resolver $\sqrt[3]{\sqrt{a^5 b^3}}$

Para la expresión $\sqrt[3]{\sqrt{a^5 b^3}}$, multiplicamos los índices de los radicales dados ($3 \cdot 2 = 6$) y este será el nuevo índice del radical resultante y la cantidad sub-radical se conserva.

Respuesta: $\sqrt[3]{\sqrt{a^5 b^3}} = \sqrt[6]{a^5 b^3}$

NOTA: No existe ninguna propiedad que distribuya la suma o la resta en un radical.

Errores como $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2} + \sqrt{b^2}$ o $\sqrt{x + y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$, son comúnmente vistos en la resolución de ejercicios en matemáticas y preocupan a los profesores, y continúan despistando a los estudiantes.

Considero que para enfrentar este problema académico se tiene que prevenir que se cometa el error e implica preguntarse en qué momento se enfrenta el estudiante por primera vez con expresiones similares.

Entre ellas están:

- las relaciones entre los conceptos matemáticos nuevos y los conceptos trabajados previamente,
- las diferencias entre la dimensión cuadrada (área) y la dimensión lineal (longitud).

Dado que la raíz no se puede distribuir, entonces

$$\sqrt{a^2 + b^2} \neq \sqrt{a^2} + \sqrt{b^2} \text{ o } \sqrt{x + y} \neq \sqrt{x} + \sqrt{y}.$$

Y para resolver estas expresiones: $\sqrt{a^2 + b^2}$ o $\sqrt{x + y}$, tenemos primero que resolver lo que hay dentro de la raíz.

Operaciones con radicales

Para sumar y restar radicales se debe tener en cuenta que los radicales han de ser semejantes.

Definición: Dos o más radicales son **semejantes** cuando poseen el mismo índice y la misma cantidad sub-radical.

Por ejemplo:

$$\begin{array}{c} 3 \sqrt[4]{x} \\ y \\ - 7 \sqrt[4]{x} \end{array}$$

Son radicales semejantes: ya que en ambos el índice de la raíz es 4 y la cantidad sub-radical es x .

$$\begin{array}{c} 5 \sqrt[3]{x} \\ y \\ 2 \sqrt[6]{x} \end{array}$$

No son radicales semejantes: porque los índices de los radicales son distintos, aunque la cantidad sub-radical es la misma.

$$\begin{array}{c} 2 \sqrt[7]{x} \\ y \\ 2 \sqrt[7]{y} \end{array}$$

No son radicales semejantes: porque las cantidades sub-radicales son distintas, aunque los índices de los radicales son iguales.

$$\begin{array}{c} 4 \cdot \sqrt[12]{3x^2} \\ y \\ 5 \cdot \sqrt[12]{3x^2} \end{array}$$

Son radicales semejantes: observe que los coeficientes pueden ser diferentes, pero la cantidad sub-radical y el índice de cada una de las raíces son iguales.

Adición y Sustracción de Radicales:

Una vez que hayas aprendido los conceptos de radicales semejantes, puedes seguir los pasos para sumar o restar radicales:

Paso 1: Verifica que los radicales sean semejantes. Si a simple vista no lo son, trata de extraer factores o realizar algunas operaciones indicadas hasta comprobarlo, si es posible.

Paso 2: Conserva igual la parte radical de las expresiones a sumar (o restar). Luego suma (o resta) los coeficientes, al hacer esto sólo estás factorizando la expresión por factor común.

Ejemplo 6: Resolver $5\sqrt[3]{x} + 7\sqrt[3]{x}$

$$5\sqrt[3]{x} + 7\sqrt[3]{x} = (5 + 7)\sqrt[3]{x} = 12\sqrt[3]{x}$$

Respuesta: $5\sqrt[3]{x} + 7\sqrt[3]{x} = 12\sqrt[3]{x}$

Ejemplo 7: Resuelve $\frac{6}{4}\sqrt{y} - \frac{2}{3}\sqrt{y} + \frac{4}{5}\sqrt{y}$

$$\begin{aligned}\frac{6}{4}\sqrt{y} - \frac{2}{3}\sqrt{y} + \frac{4}{5}\sqrt{y} &= \left(\frac{6}{4} - \frac{2}{3} + \frac{4}{5}\right)\sqrt{y} \\ &= \left(\frac{90 - 40 + 48}{60}\right)\sqrt{y} = \frac{98}{60}\sqrt{y} = \frac{49}{30}\sqrt{y}\end{aligned}$$

Respuesta: $\frac{6}{4}\sqrt{y} - \frac{2}{3}\sqrt{y} + \frac{4}{5}\sqrt{y} = \frac{49}{30}\sqrt{y}$

Ejemplo 8: Resuelve $10\sqrt[5]{y} + 6\sqrt[3]{2} - 4\sqrt[5]{y} - 2\sqrt[3]{2}$

Nota:

En estos ejercicios, podrás aplicar el proceso de factorización obviando su escritura, y sumar los coeficientes directamente, es decir: $5\sqrt[3]{x} + 7\sqrt[3]{x} = 12\sqrt[3]{x}$.

Observamos que los tres términos tienen en común el radical $\sqrt{y}$, por lo tanto son términos semejantes y sacamos factor común $\sqrt{y}$:

Identificamos cuales son términos semejantes y luego los agrupamos.

$$10 \sqrt[5]{y} + 6 \sqrt[3]{2} - 4 \sqrt[5]{y} - 2 \sqrt[3]{2}$$

$$= (10 \sqrt[5]{y} - 4 \sqrt[5]{y}) + (6 \sqrt[3]{2} - 2 \sqrt[3]{2})$$

Extraemos el factor común de cada agrupación y sumamos (o restamos) los coeficientes.

$$= (10 - 4) \sqrt[5]{y} + (6 - 2) \sqrt[3]{2} = 6 \sqrt[5]{y} + 4 \sqrt[3]{2}$$

Respuesta: $10 \sqrt[5]{y} + 6 \sqrt[3]{2} - 4 \sqrt[5]{y} - 2 \sqrt[3]{2} = 6 \sqrt[5]{y} + 4 \sqrt[3]{2}$

Multiplicación y división de radicales con índices iguales

Cuando los índices de los radicales son iguales , procedemos a utilizar la propiedad:

El producto (el cociente) de raíces con igual índice es la raíz del producto o cociente .

Esta propiedad nos indica que resolver el producto (o el cociente) de dos o más raíces con igual índice es igual a la raíz del producto (o el cociente) de las cantidades sub-radicales con el mismo índice:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} \qquad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Multiplicación y división de radicales con índices diferentes

Cuando los índices de los radicales son diferentes, procedemos a realizar los siguientes pasos:

Paso 1: Se calcula el mínimo común múltiplo entre los índices, llamado mínimo común índice (m.c.i.), el cual va ser el nuevo índice de cada raíz.

Paso 2: Se divide el m.c.i. entre los índices de cada raíz y luego el resultado es el exponente de la expresión sub-radical de cada raíz.

Paso 3: Así obtenemos un producto (o división) de raíces de igual índice y terminamos de resolver el ejercicio.

Ejemplo 9: Resuelva $\sqrt{3xy} \cdot \sqrt[5]{7x^2y^3}$

Para resolver el siguiente ejemplo, seguimos las instrucciones:

Paso 1: Se calcula el mínimo común índice, m.c.i (2,5)= 10. Este es el nuevo índice de ambas raíces, por lo tanto los radicales quedan así $\sqrt[10]{} \cdot \sqrt[10]{}$

Paso 2: Se divide el m.c.i entre los índices iniciales de cada raíz y luego el resultado es el exponente de cada cantidad sub-radical.

$$\begin{aligned} &= \sqrt[10]{(3xy)^{10/2}} \cdot \sqrt[10]{(7x^2y^3)^{10/5}} \\ &= \sqrt[10]{(3xy)^5} \cdot \sqrt[10]{(7x^2y^3)^2} \end{aligned}$$

Paso 3: Ahora tenemos una multiplicación de raíces de igual índice, terminamos de resolver el ejercicio.

$$\begin{aligned} &= \sqrt[10]{(3xy)^5} \cdot \sqrt[10]{(7x^2y^3)^2} = \sqrt[10]{3^5 x^5 y^5} \cdot \sqrt[10]{7^2 x^4 y^6} \\ &= \sqrt[10]{3^5 7^2 x^9 y^{11}} \\ &= y \sqrt[10]{3^5 7^2 x^9 y} = y \sqrt[10]{243 \times 49 x^9 y} \end{aligned}$$

Para simplificar la expresión, podemos extraer términos de la raíz, en este caso y^{11}

Sacamos el mínimo común índice m.c.i.(3,12)=12 y convertimos la expresión en un solo radical y resolvemos.

Se descompone $9=3^2$ y se aplica la propiedad de potencia de una potencia:

$$9^4=(3^2)^4=3^8$$

Se extrae el factor z^{24} de la raíz y sale como $z^{24/12}=z^2$

$$=y \sqrt[10]{11.907x^9y}$$

$$\text{Respuesta: } \sqrt{3xy} \cdot \sqrt[5]{7x^2y^3} = y \sqrt[10]{11907x^9y}$$

$$\text{Ejemplo 10: Resuelva } \frac{\sqrt[3]{9z^6}}{\sqrt[12]{3y}}$$

En la división se utiliza el mismo procedimiento que en la multiplicación.

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt[3]{9z^6}}{\sqrt[12]{3y}} &= \frac{\sqrt[12]{(9z^6)^4}}{\sqrt[12]{3y}} = \frac{\sqrt[12]{9^4z^{24}}}{\sqrt[12]{3y}} = \sqrt[12]{\frac{9^4z^{24}}{3y}} \\ &= \sqrt[12]{\frac{3^8z^{24}}{3y}} = \sqrt[12]{\frac{3^7z^{24}}{y}} = z^2 \cdot \sqrt[12]{\frac{3^7}{y}} = z^2 \cdot \sqrt[12]{\frac{2.187}{y}} \end{aligned}$$

$$\text{Respuesta: } \frac{\sqrt[3]{9z^6}}{\sqrt[12]{3y}} = z^2 \cdot \sqrt[12]{\frac{2.187}{y}}$$

$$\text{Ejemplo 11: Resolver } (2 \cdot \sqrt[4]{xy} \cdot \sqrt[3]{z^2})^3$$

$$\begin{aligned} (2 \cdot \sqrt[4]{xy} \cdot \sqrt[3]{z^2})^3 &= 2^3 (\sqrt[4]{xy})^3 \cdot (\sqrt[3]{z^2})^3 = \\ 2^3 z^2 (\sqrt[4]{xy})^3 &= 8z^2 \sqrt[4]{(xy)^3} = 8z^2 \cdot \sqrt[4]{x^3y^3} \end{aligned}$$

$$\text{Respuesta: } (2 \cdot \sqrt[4]{xy} \cdot \sqrt[3]{z^2})^3 = 8z^2 \sqrt[4]{x^3y^3}$$

EXTRACCIÓN DE FACTORES DE UN RADICAL



Extraer factores de un radical significa sacarlos de la raíz.

Para que sea posible extraer factores de un radical, es necesario que la cantidad sub-radical sea expresada como factores en forma de potencia y que los exponentes de los factores sean iguales o mayores que el índice del radical.

El proceso para extraer factores de una raíz es el siguiente:

Paso 1: se descomponen en factores primos la cantidad sub-radical.

Paso 2: se toman aquellos factores cuyo exponente es mayor o igual al índice de la raíz y se divide el exponente de cada uno de esos factores entre el índice de la raíz. El cociente de la división representa el exponente de la base que se extrae y el residuo es exponente de la base que queda dentro de la raíz.

Veamos a continuación un ejemplo:

Ejemplo 12: Extraiga del radical $\sqrt[3]{4^7}$ los factores que sean posibles:

Paso 1: Como existe un solo factor, se divide el exponente de la cantidad sub-radical entre el índice de la raíz:

$$7 \div 3 = 2 \text{ y el residuo es } 1$$

Paso 2: Esto nos indica que el factor 4 se extrae de la raíz con exponente 2 y queda dentro con exponente 1

$$4^2 \cdot \sqrt[3]{4}$$

La raíz de un producto es el producto de las raíces

Respuesta: $\sqrt[3]{4^7} = 4^2 \cdot \sqrt[3]{4}$

OTRA FORMA DE EXTRAER FACTORES DE UN RADICAL

Para resolver este tipo de ejercicios de manera alterna, debemos conocer las propiedades de los radicales.

Ejemplo 13: Extraiga del radical $\sqrt[3]{78125x^3}$ los factores que sean posibles.

Se descompone 78125 en sus factores primos y se expresa como potencia: $78125 = 5^7$

$$\sqrt[3]{78125x^3} = \sqrt[3]{5^7x^3}$$

Como $7 > 3$, se expresa 5^7 como multiplicación de potencias de igual base, tal que por lo menos uno de los exponentes sea igual al índice de la raíz.

$$\sqrt[3]{5^35^35x^3} = \sqrt[3]{5^3} \cdot \sqrt[3]{5^3} \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{x^3}$$

$$= 5^{\frac{3}{3}} \cdot 5^{\frac{3}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{3}{3}} \text{ y simplificamos los exponentes.}$$

$$= 5^1 \cdot 5^1 \cdot 5^{\frac{1}{3}} \cdot x^1 = 5^2 \cdot x \cdot \sqrt[3]{5}$$

Respuesta: $\sqrt[3]{78125x^3} = 25 \cdot x \cdot \sqrt[3]{5}$

Ejemplo 14: Extraiga del radical $\sqrt{3x^2y^6}$ los factores que sean posibles.

Observe en este ejercicio, el factor “3” no se puede descomponer en factores primos (ya que es un número primo), mientras que para los otros factores, el exponente de la variable x es 2 y el de la variable y es 6, ambos exponentes pueden ser divididos de forma exacta entre el índice de la raíz, 2.

$$\sqrt{3x^2y^6} = xy^3 \cdot \sqrt{3}$$

Ejemplo 15: Extraiga del radical $\sqrt[3]{8x^3y^4}$ los factores que sean posibles.

Cuando la **cantidad sub-radical es una suma algebraica** no se puede extraer factores, pues no están expresados como factores sino como sumandos. En caso de ser posible, aplicamos algunas reglas algebraicas para expresarlo como factores o potencias.

$$\sqrt[3]{8x^3y^4} = \sqrt[3]{2^3x^3y^4} = 2xy\sqrt[3]{y}$$

Respuesta: $\sqrt[3]{8x^3y^4} = 2xy\sqrt[3]{y}$

Ejemplo 16: Extraiga del radical $\sqrt{a^2 + 4ab + 4b^2}$ los factores que sean posibles.

$$\sqrt{a^2 + 4ab + 4b^2}$$

Observamos que en la cantidad sub-radical se tiene una suma algebraica y no un producto. Pero podemos factorizar la expresión sub-radical y nos queda:

$$\sqrt{a^2 + 4ab + 4b^2} = \sqrt{(a + 2b)^2} = \sqrt{(a + 2b)^2} = a + 2b$$

Respuesta: $\sqrt{a^2 + 4ab + 4b^2} = a + 2b$

Introducir factores a un radical significa meterlos dentro de la raíz.

Introducción de factores en un radical:

Para introducir un factor en un radical:

Se escribe este factor dentro de la raíz elevado al índice del radical, manteniendo en el resultado el mismo índice.

Ejemplo 17: Dada la expresión $2a \cdot \sqrt[5]{ab}$, introduzca el factor en la raíz.

Se introduce el factor dentro del radical: $2a \cdot \sqrt[5]{ab} = \sqrt[5]{(2a)^5 ab}$

Se resuelven las potencias: $\sqrt[5]{32a^5 ab} = \sqrt[5]{32a^6 b}$

Respuesta: $2a \cdot \sqrt[5]{ab} = \sqrt[5]{32a^6 b}$

Importante: Sólo se puede introducir factores en una raíz, no sumandos, es decir si tenemos $\sqrt[5]{4x^3 + \sqrt{2x^2y^6}}$, $4x^3$ no es

un factor, es un sumando (un término), por lo tanto no se puede introducir dentro del radical $\sqrt{2x^2y^6}$.

Expresiones Conjugadas y Racionalización



Expresiones Conjugadas

La conjugada de una expresión con presencia de radicales es aquella que permite extraer los términos de una raíz, la misma va a depender de si la expresión es un monomio o un binomio, veamos a continuación cada uno de estos casos:

Caso A. La conjugada de un monomio:



La conjugada de una expresión radical monómica es un radical con el mismo índice y los mismos factores de la expresión sub-radical, de tal manera que los exponentes de estos factores son:

- La diferencia entre el exponente del factor y el índice en caso de ser este último mayor; o
- La diferencia entre el múltiplo del índice que sea inmediatamente mayor al exponente del factor y este último, en caso de ser el índice menor.

Aclaremos esto con algunos ejemplos:

Ejemplo 1: Hallar la conjugada de $\sqrt[4]{x^3y^2}$

Observa que en la expresión $\sqrt[4]{x^3y^2}$ los exponentes de “ x ” y “ y ” son 3 y 2 respectivamente (menores que el índice de la raíz) y en la conjugada se eligen como exponentes de “ x ” y “ y ” a 1 y 2 respectivamente, es decir el exponente de “ x ” es igual a $4 - 3 = 1$ y el exponente de “ y ” es igual a $4 - 2 = 2$.

Multiplicación de radicales

Extracción de factores de un radical

El exponente de x es 5, menor que el índice de la raíz, que es 6.

El factor, “ y ”, tiene un exponente igual a 7, mayor que el índice de la raíz, que es 6.

En el ejemplo 3, se presenta una alternativa para hallar la conjugada de un monomio, cuando el exponente de uno de los factores es mayor que el índice de la raíz, será extraer de la raíz los factores posibles y luego aplicar el caso (i) para hallar la expresión conjugada del radical resultante.

Luego la conjugada de $\sqrt[4]{x^3y^2}$ es $\sqrt[4]{xy^2}$, ya que al multiplicar las dos expresiones se elimina la raíz:

$$\begin{array}{l} \sqrt[4]{x^3y^2} \cdot \sqrt[4]{xy^2} \\ \quad \quad \quad \rightarrow \text{Expresión conjugada} \\ \quad \quad \quad \rightarrow \text{Expresión original} \\ = \sqrt[4]{x^4y^4} = xy \end{array}$$

Respuesta: La expresión conjugada de $\sqrt[4]{x^3y^2}$ es $\sqrt[4]{xy^2}$

Ejemplo 2: Hallar la conjugada de $\sqrt[6]{x^5y^7}$

Aplicamos el caso (i), en la conjugada para el primer factor “ x ”, que tendrá un exponente igual a la diferencia del índice de la raíz y el exponente de x , es decir, $6 - 5 = 1$.

El exponente del segundo factor “ y ” caso (ii) en la expresión conjugada, será la diferencia de un múltiplo de 6 (inmediatamente mayor a 7) y el exponente del factor “ y ”, es decir, $12 - 7 = 5$.

Respuesta: Luego la expresión conjugada de $\sqrt[6]{x^5y^7}$ es $\sqrt[6]{xy^5}$.

Ejemplo 3: Hallar la expresión conjugada para $\sqrt[3]{x^4y^{13}}$

Primero extraemos los factores de la raíz $\sqrt[3]{x^4y^{13}}$

$$\sqrt[3]{x^4y^{13}} = \sqrt[3]{x^3x y^{12}y} = x \cdot y^4 \sqrt[3]{xy};$$

ahora hallamos la conjugada de $\sqrt[3]{xy}$, que es $\sqrt[3]{x^2y^2}$

Respuesta: La conjugada del monomio $\sqrt[3]{x^4y^{13}}$ es

Observa que sólo la cantidad sub-radical es un binomio, la expresión como tal $\sqrt[5]{(x-5)^2}$ es un monomio.

NOTA: En general, cuando tenemos un solo radical, la conjugada de dicha expresión se trata como un monomio, independiente de la característica de la cantidad sub-radical.

Cuando el índice de la raíz es 2 y es la raíz cuadrada de una expresión (monómica, binómica o polinómica), su conjugada es ella misma.

Para hallar la conjugada de $\sqrt[5]{(x+1+h)^2}$ observamos que tenemos como cantidad sub-radical, un trinomio con exponente 2, por lo tanto la conjugada será la raíz quinta del trinomio elevado al exponente resultante de la resta del índice de la raíz y el exponente del trinomio

$$\sqrt[3]{x^2 y^2}$$

Ejemplo 4: Hallar la conjugada de la expresión

$$\sqrt[5]{(x-5)^2}.$$

La conjugada de la expresión $\sqrt[5]{(x-5)^2}$ es $\sqrt[5]{(x-5)^3}$

Ejemplo 5: Hallar la conjugada de la expresión

$$\sqrt[4]{t+4}$$

Como estamos ante un monomio (aunque la cantidad sub-radical es un binomio) para hallar la conjugada tomamos la cantidad sub-radical como un solo elemento, que en este caso es $t+4$ con exponente 1, por lo tanto su conjugada sería: $\sqrt[4]{(t+4)^3}$

Respuesta: La conjugada de $\sqrt[4]{(t+4)}$ es $\sqrt[4]{(t+4)^3}$

Ejemplo 6: Hallar la conjugada de la expresión

$$\sqrt{x^2+h}$$

La conjugada de $\sqrt{x^2+h}$ es ella misma. Por lo tanto:

Respuesta: la conjugada de $\sqrt{x^2+h}$ es $\sqrt{x^2+h}$.

Ejemplo 7: Hallar la conjugada de la expresión

$$\sqrt[5]{(x+1+h)^2}$$

La conjugada será:

$$\sqrt[5]{(x+1+h)^{5-2}} = \sqrt[5]{(x+1+h)^3}$$

Respuesta: La conjugada de $\sqrt[5]{(x+1+h)^2}$ es $\sqrt[5]{(x+1+h)^3}$

Ejemplo 8: Hallar la conjugada de la expresión

$$\sqrt[6]{(x-h)^2-z}$$

Como sólo aparece un radical, atenderemos a la nota del Ejemplo 4. Para hallar la conjugada de

$\sqrt[6]{(x-h)^2 - z}$ observamos que tenemos como cantidad sub-radical un binomio, dos términos $(x-h)^2$ y z y el exponente del binomio es 1, es decir, $((x-h)^2 - z)^1$. Por lo tanto la conjugada será la raíz sexta del binomio elevado al exponente resultante de la resta del índice de la raíz y el exponente del binomio:

$$\sqrt[6]{((x-h)^2 - z)^{6-1}} = \sqrt[6]{((x-h)^2 - z)^5}$$

Respuesta: La conjugada de $\sqrt[6]{(x-h)^2 - z}$ es

$$\sqrt[6]{((x-h)^2 - z)^5}$$

Para estos casos, aplicaremos el producto notable de la suma por la diferencia para obtener la diferencia de los cuadrados de los términos
 $((x-y) \cdot (x+y) = x^2 - y^2)$ y así eliminar las raíces.

Nota: Observa que para las expresiones binómicas con radicales de índice 2, su conjugada contiene los mismos términos pero, cambiando el signo de la operación entre ellos.

Caso B. La conjugada de un binomio:

En los siguientes casos, tendremos al menos un radical como parte de un binomio en la expresión.

Para expresiones binómicas con radicales de índice dos (2), tales como $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ y $\sqrt{a} - \sqrt{b}$,

i. La conjugada de $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ es $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ ya que al multiplicar las dos expresiones,

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \cdot (\sqrt{a} - \sqrt{b}) = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = a - b$$

ii. Así mismo la conjugada de $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ es $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, al multiplicarlos:

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b}) \cdot (\sqrt{a} + \sqrt{b}) = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = a - b$$

Ejemplo 9: Hallar la expresión conjugada de $\sqrt{2x} + \sqrt{3}$ y comprobar su respuesta.

La expresión conjugada de $\sqrt{2x} + \sqrt{3}$ es $\sqrt{2x} - \sqrt{3}$

Veamos ahora el producto entre ellas:

$$(\sqrt{2x} + \sqrt{3})(\sqrt{2x} - \sqrt{3}) =$$

$$\begin{aligned}
 &= (\sqrt{2x}) \cdot (\sqrt{2x}) - (\sqrt{2x}) \cdot (\sqrt{3}) + (\sqrt{3}) \cdot (\sqrt{2x}) - (\sqrt{3}) \cdot (\sqrt{3}) \\
 &= (\sqrt{2x})^2 - \cancel{(\sqrt{2x}) \cdot (\sqrt{3})} + \cancel{(\sqrt{3}) \cdot (\sqrt{2x})} - (\sqrt{3})^2 \\
 &= \cancel{(\sqrt{2x})^2} - \cancel{(\sqrt{3})^2} = 2x - 3
 \end{aligned}$$

Respuesta: La conjugada de $\sqrt{2x} + \sqrt{3}$ es $\sqrt{2x} - \sqrt{3}$ y el producto de ellas :

$$(\sqrt{2x} + \sqrt{3})(\sqrt{2x} - \sqrt{3}) = 2x - 3.$$

Ejemplo 10: Hallar la expresión conjugada de $\sqrt{7} - \sqrt{5}$ y comprobar su respuesta.

La expresión conjugada de $\sqrt{7} - \sqrt{5}$ es $\sqrt{7} + \sqrt{5}$

Veamos ahora el producto entre ellas:

$$\begin{aligned}
 (\sqrt{7} - \sqrt{5})(\sqrt{7} + \sqrt{5}) &= \\
 &= (\sqrt{7})^2 - (\sqrt{5})^2 = 7 - 5 = 2
 \end{aligned}$$

Ejemplo 11: Hallar la expresión conjugada de $\sqrt{xy} + 3z$ y multiplicarlas entre sí.

La conjugada de $\sqrt{xy} + 3z$ es $\sqrt{xy} - 3z$.

Veamos ahora el producto entre ellas:

$$\begin{aligned}
 &(\sqrt{xy} + 3z)(\sqrt{xy} - 3z) \\
 &= (\sqrt{xy})^2 - (3z)^2 = xy - 9z^2
 \end{aligned}$$

Observa que uno de los términos del binomio es un radical, mientras que el otro término no tiene radical

Para estos casos, aplicamos los siguientes productos notables:

$$(x - y) \cdot (x^2 + xy + y^2) = x^3 - y^3 \quad \text{y}$$

$$(x + y) \cdot (x^2 - xy + y^2) = x^3 + y^3$$

Simplificamos los términos semejantes.

Simplificamos los términos semejantes.

Para expresiones binómicas con radicales de índice tres (3),

tales como $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}$ y

$$\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$$

i. La conjugada de $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}$ es

$$\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a \cdot b} + \sqrt[3]{b^2},$$

Pues al multiplicar las dos expresiones, se eliminan las raíces de la expresión, es decir :

$$(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}) \cdot (\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a \cdot b} + \sqrt[3]{b^2}) =$$

$$(\sqrt[3]{a})^3 - (\sqrt[3]{b})^3 = a - b$$

ii. Así mismo la conjugada de $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$ es

$$\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{a \cdot b} + \sqrt[3]{b^2}$$

y al multiplicarlos:

$$(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}) (\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{a \cdot b} + \sqrt[3]{b^2}) =$$

$$(\sqrt[3]{a})^3 + (\sqrt[3]{b})^3 = a + b$$

Ejemplo 12: Hallar la expresión conjugada de $\sqrt[3]{5x} - \sqrt[3]{2z}$ y multiplicarlas entre sí.

La conjugada de $\sqrt[3]{5x} - \sqrt[3]{2z}$ es

$$\sqrt[3]{(5x)^2} + \sqrt[3]{(5x) \cdot (2z)} + \sqrt[3]{(2z)^2}.$$

Veamos ahora el producto entre ellas:

$$(\sqrt[3]{5x} - \sqrt[3]{2z})$$

$$(\sqrt[3]{(5x)^2} + \sqrt[3]{(5x) \cdot (2z)} + \sqrt[3]{(2z)^2})$$

Aplicamos la propiedad distributiva del producto y

nos queda:

$$\sqrt[3]{(5x)^3} + \cancel{\sqrt[3]{(5x)^2 \cdot (2z)}} + \cancel{\sqrt[3]{(5x) \cdot (2z)^2}} - \cancel{\sqrt[3]{(5x)^2 \cdot (2z)}} - \cancel{\sqrt[3]{(5x) \cdot (2z)^2}} - \sqrt[3]{(2z)^3}$$

$$= \sqrt[3]{(5x)^3} - \sqrt[3]{(2z)^3} = 5x - 2z$$

Ejemplo 13: Hallar la expresión conjugada de $\sqrt[3]{x+a} - \sqrt[3]{x}$

La conjugada de $\sqrt[3]{x+a} - \sqrt[3]{x}$ es

$$\sqrt[3]{(x+a)^2} + \sqrt[3]{(x+a) \cdot (x)} + \sqrt[3]{(x)^2}.$$

Y el producto de una expresión por su conjugada es igual a:

$$(\sqrt[3]{x+a} - \sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{(x+a)^2} + \sqrt[3]{(x+a) \cdot (x)} + \sqrt[3]{(x)^2}) = (x+a) - x = a$$

Para expresiones binómicas con radica-

les de índice cuatro (4), tales como $\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}$ y

$$\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}$$

i. La conjugada de $\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}$ es

$$\sqrt[4]{a^3} + \sqrt[4]{a^2 \cdot b} + \sqrt[4]{a \cdot b^2} + \sqrt[4]{b^3}, \text{ pues al}$$

multiplicar las dos expresiones, se eliminan las raíces de la expresión, es decir

$$(\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b})(\sqrt[4]{a^3} + \sqrt[4]{a^2 \cdot b} + \sqrt[4]{a \cdot b^2} + \sqrt[4]{b^3}) =$$

$$(\sqrt[4]{a})^4 - (\sqrt[4]{b})^4 = a - b$$

Para estos casos, aplicamos los siguiente productos notables:

$$(x-y) \cdot (x^3 + x^2y + xy^2 + y^3) = x^4 - y^4$$

$$(x+y) \cdot (x^3 - x^2y + xy^2 - y^3) = x^4 - y^4$$

ii. Así mismo la conjugada de $\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}$ es

$\sqrt[4]{a^3} - \sqrt[4]{a^2 \cdot b} + \sqrt[4]{a \cdot b^2} - \sqrt[4]{b^3}$ y al multiplicarlos:

$$(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}) \cdot (\sqrt[4]{a^3} - \sqrt[4]{a^2 \cdot b} + \sqrt[4]{a \cdot b^2} - \sqrt[4]{b^3}) =$$

$$= (\sqrt[4]{a})^4 - (\sqrt[4]{b})^4 = a - b$$

Ejemplo 14: Hallar la expresión conjugada de $\sqrt[4]{3x+1} - \sqrt[4]{3x}$.

La conjugada de $\sqrt[4]{3x+1} - \sqrt[4]{3x}$ es

$$\sqrt[4]{(3x+1)^3} + \sqrt[4]{(3x+1)^2(3x)} + \sqrt[4]{(3x+1)(3x)^2} + \sqrt[4]{(3x)^3}$$

Y el producto de una expresión por su conjugada es igual a:

$$\left(\sqrt[4]{3x+1} - \sqrt[4]{3x} \right) \cdot \left(\sqrt[4]{(3x+1)^3} + \sqrt[4]{(3x+1)^2(3x)} + \sqrt[4]{(3x+1)(3x)^2} + \sqrt[4]{(3x)^3} \right)$$

$$= (3x+1) - 3x = 1$$



Racionalización

Racionalizar significa eliminar la presencia de radicales bien sea en el numerador o en el denominador, utilizando procesos matemáticos. Este proceso (racionalización) en principio requiere que la expresión a racionalizar sea multiplicada y dividida por la conjugada del numerador o denominador (depende de cuál de estas partes se quiera racionalizar). Veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 15: Racionaliza el denominador de

$\frac{1}{\sqrt[3]{2ab}}$ y simplifica el resultado de ser posible.

Se multiplica y divide por la conjugada del denominador.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2ab}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2ab}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2^2 a^2 b^2}}{\sqrt[3]{2^2 a^2 b^2}}$$

Multiplicación de fracciones.

$$= \frac{1 \cdot \sqrt[3]{2^2 a^2 b^2}}{\sqrt[3]{2ab} \cdot \sqrt[3]{2^2 a^2 b^2}}$$

Multiplicación de radicales de igual índice en el denominador.

$$= \frac{\sqrt[3]{2^2 a^2 b^2}}{\sqrt[3]{2^3 a^3 b^3}}$$

Extracción de factores en el denominador.

$$\frac{\sqrt[3]{4a^2 b^2}}{2ab}$$

Respuesta: $\frac{1}{\sqrt[3]{2ab}} = \frac{\sqrt[3]{4a^2 b^2}}{2ab}$

Para racionalizar la expresión

$$\frac{3x^2}{\sqrt[4]{1-2x^2}}$$

tenemos que dividir y multiplicar por la conjugada del denominador, que es un monomio.

Se multiplica y se divide por la conjugada del denominador.

Extracción de factores

Ejemplo 16: Racionaliza el denominador de

$$\frac{3x^2}{\sqrt[4]{1-2x^2}} \text{ y simplifica el resultado de ser posible.}$$

$$\frac{3x^2}{\sqrt[4]{1-2x^2}} = \frac{3x^2}{\sqrt[4]{1-2x^2}} \cdot \frac{\sqrt[4]{(1-2x^2)^3}}{\sqrt[4]{(1-2x^2)^3}}$$

$$= \frac{3x^2 \sqrt[4]{(1-2x^2)^3}}{\sqrt[4]{(1-2x^2)^4}} = \frac{3x^2 \sqrt[4]{(1-2x^2)^3}}{1-2x^2}$$

Respuesta:
$$\frac{3x^2}{\sqrt[4]{1-2x^2}} = \frac{3x^2 \sqrt[4]{(1-2x^2)^3}}{1-2x^2}$$

Ejemplo 17: Racionaliza el denominador de

$$\frac{2x^2 \sqrt{xy}}{4\sqrt[5]{x^2 y^6}} \text{ y simplifica el resultado de ser posible.}$$

$$= \frac{2x^2 \sqrt{xy}}{4\sqrt[5]{x^2 y^6}} \cdot \frac{\sqrt[5]{x^3 y^4}}{\sqrt[5]{x^3 y^4}}$$

$$= \frac{2x^2 \cdot 10\sqrt{x^5 y^5 x^6 y^8}}{4 \cdot \sqrt[5]{x^5 y^8}} = \frac{2x^2 \cdot 10\sqrt{x^{11} y^{13}}}{4xy^2} =$$

$$\frac{2x^2 xy \cdot 10\sqrt{xy^3}}{4xy^2} = \frac{2x^3 y \cdot 10\sqrt{xy^3}}{4xy^2} = \frac{x^2 10\sqrt{xy^3}}{2y}$$

Respuesta:
$$\frac{2x^2 \sqrt{xy}}{4\sqrt[5]{x^2 y^6}} = \frac{x^2 \cdot 10\sqrt{xy^3}}{2y}$$

Se multiplica y se divide por la conjugada del denominador.

Ejemplo 18: Racionaliza el denominador $\frac{2}{3-\sqrt{2}}$

y simplifica si es posible.

$$\begin{aligned}\frac{2}{3-\sqrt{2}} &= \frac{2}{3-\sqrt{2}} \cdot \frac{3+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}} \\ &= \frac{2(3+\sqrt{2})}{(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})} = \frac{6+2\sqrt{2}}{3^2-\sqrt{2}^2} \Rightarrow \frac{6+2\sqrt{2}}{9-2} = \frac{6+2\sqrt{2}}{7}\end{aligned}$$

Respuesta: $\frac{2}{3-\sqrt{2}} = \frac{6+2\sqrt{2}}{7}$

Ejemplo 19: Racionaliza el denominador $\frac{3-\sqrt[3]{3}}{2+\sqrt[3]{3}}$,

simplifica si es posible.

Primero convertimos el denominador como un binomio de raíces con el mismo índice:

Por ser $\sqrt[3]{8} = 2$

$$2 + \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{3}, \text{ entonces nos queda:}$$

Multiplicamos y dividimos por la conjugada del denominador.

$$\frac{3-\sqrt[3]{3}}{2+\sqrt[3]{3}} = \frac{3-\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{3}}$$

$$= \frac{3-\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{3}} \cdot \frac{(\sqrt[3]{8^2} - \sqrt[3]{8 \cdot 3} + \sqrt[3]{3^2})}{(\sqrt[3]{8^2} - \sqrt[3]{8 \cdot 3} + \sqrt[3]{3^2})}$$

$$= \frac{(3-\sqrt[3]{3}) \cdot (\sqrt[3]{8^2} - \sqrt[3]{8 \cdot 3} + \sqrt[3]{3^2})}{(\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{3}) \cdot (\sqrt[3]{8^2} - \sqrt[3]{8 \cdot 3} + \sqrt[3]{3^2})}$$

$$= \frac{(3 \cdot \sqrt[3]{64} - 3 \cdot \sqrt[3]{24} + 3 \cdot \sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{64} + \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{24} - \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{9})}{(\sqrt[3]{8})^3 + (\sqrt[3]{3})^3}$$

Se aplica la propiedad distributiva en el numerador y se resuelve el denominador.

Se agrupan los términos semejantes

Multiplicación de radicales y extracción de factores:

$$\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4 \quad \text{y}$$

$$\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{8 \cdot 3} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{3} = 2 \cdot \sqrt[3]{3}$$

$$= \frac{(3 \cdot 4 - 3 \cdot 2 \cdot \sqrt[3]{3} + 3 \cdot \sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3} \cdot 4 + \sqrt[3]{3 \cdot 24} - \sqrt[3]{3 \cdot 9})}{8 + 3}$$

$$= \frac{(12 - 6 \cdot \sqrt[3]{3} + 3 \cdot \sqrt[3]{9} - 4 \cdot \sqrt[3]{3} + 2 \cdot \sqrt[3]{9} - 3)}{11}$$

$$= \frac{(9 - 10 \cdot \sqrt[3]{3} + 5 \cdot \sqrt[3]{9})}{11}$$

Ejemplo 20: Racionaliza el numerador de

$$\frac{\sqrt{x+3}-3}{x}, \text{ simplifica si es posible.}$$

Multiplicamos y dividimos por la conjugada del numerador.

Observa que este es el signo que cambia, no el signo que está bajo el radical

$$= \frac{\sqrt{x+3}-3}{x} \cdot \frac{\sqrt{x+3}+3}{\sqrt{x+3}+3}$$

$$= \frac{(\sqrt{x+3}-3)(\sqrt{x+3}+3)}{x(\sqrt{x+3}+3)} = \frac{\sqrt{(x+3)^2-3^2}}{x\sqrt{x+3}+3x}$$

$$= \frac{x+3-9}{x\sqrt{x+3}+3x} = \frac{x-6}{x\sqrt{x+3}+3x}$$

Respuesta: $\frac{\sqrt{x+3}-3}{x} = \frac{x-6}{x\sqrt{x+3}+3x}$

Desarrollamos el producto
notable $(x+h)^2$ en el numerador

Factorizamos y simplificamos

Es conveniente comenzar por
descomponer en factores primos,
la cantidad sub-radical, $27 = 3^3$.

Ejemplo 21: Racionaliza el numerador

$$\frac{\sqrt{(x+h)^2+1}-\sqrt{x^2+1}}{h}, \text{ simplifica si es posible.}$$

Multiplicamos y dividimos la expresión

$$\frac{\sqrt{(x+h)^2+1}-\sqrt{x^2+1}}{h}, \text{ por la conjugada del}$$

numerador.

$$\frac{\sqrt{(x+h)^2+1}-\sqrt{x^2+1}}{h} =$$

$$\frac{\sqrt{(x+h)^2+1}-\sqrt{x^2+1}}{h} \cdot \frac{\sqrt{(x+h)^2+1}+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{(x+h)^2+1}+\sqrt{x^2+1}}$$

$$\frac{(\cancel{\sqrt{(x+h)^2+1}})-(\cancel{\sqrt{x^2+1}})}{h(\sqrt{(x+h)^2+1}+\sqrt{x^2+1})} = \frac{(x+h)^2+1-(x^2+1)}{h(\sqrt{(x+h)^2+1}+\sqrt{x^2+1})}$$

$$\frac{\cancel{x^2}+2xh+h^2+1-\cancel{x^2}-1}{h(\sqrt{(x+h)^2+1}+\sqrt{x^2+1})} = \frac{2xh+h^2}{h(\sqrt{(x+h)^2+1}+\sqrt{x^2+1})}$$

$$= \frac{\cancel{h}(2x+h)}{\cancel{h}(\sqrt{(x+h)^2+1}+\sqrt{x^2+1})} = \frac{2x+h}{\sqrt{(x+h)^2+1}+\sqrt{x^2+1}}$$

Respuesta: $\frac{\sqrt{(x+h)^2+1}-\sqrt{x^2+1}}{h} = \frac{2x+h}{\sqrt{(x+h)^2+1}+\sqrt{x^2+1}}$

Ejemplo 22: Racionaliza el numerador de $\frac{\sqrt[4]{27}}{12}$,

simplifica si es posible.

$$\frac{\sqrt[4]{27}}{12} = \frac{\sqrt[4]{3^3}}{12}$$

Se multiplica y se divide por la conjugada del numerador y se realizan las operaciones sobre los radicales.

Multiplicamos y dividimos por la conjugada del numerador de la expresión.

Se resuelve el numerador:

Simplificamos

$$= \frac{\sqrt[4]{3^3}}{12} \cdot \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{3}} = \frac{\sqrt[4]{3^4}}{12\sqrt[4]{3}} = \frac{3}{12\sqrt[4]{3}} = \frac{1}{4\sqrt[4]{3}}$$

Respuesta: $\frac{\sqrt[4]{27}}{12} = \frac{1}{4\sqrt[4]{3}}$

Ejemplo 23: Racionaliza el numerador de

$\frac{\sqrt[4]{x+5} - \sqrt[4]{3}}{x+2}$, simplifica si es posible.

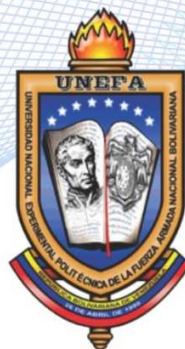
$$\frac{(\sqrt[4]{x+5} - \sqrt[4]{3}) \cdot (\sqrt[4]{(x+5)^3} + \sqrt[4]{(x+5)^2 \cdot 3} + \sqrt[4]{(x+5) \cdot 3^2} + \sqrt[4]{3^3})}{(x+2)(\sqrt[4]{(x+5)^3} + \sqrt[4]{(x+5)^2 \cdot 3} + \sqrt[4]{(x+5) \cdot 3^2} + \sqrt[4]{3^3})}$$

$$\frac{(\sqrt[4]{(x+5)^4} - \sqrt[4]{3^4})}{(x+2)(\sqrt[4]{(x+5)^3} + \sqrt[4]{(x+5)^2 \cdot 3} + \sqrt[4]{(x+5) \cdot 3^2} + \sqrt[4]{3^3})}$$

$$= \frac{(x+5) - 3}{(x+2)(\sqrt[4]{(x+5)^3} + \sqrt[4]{3 \cdot (x+5)^2} + \sqrt[4]{9 \cdot (x+5)} + \sqrt[4]{27})}$$

$$= \frac{\cancel{(x+2)}}{\cancel{(x+2)}(\sqrt[4]{(x+5)^3} + \sqrt[4]{3(x+5)^2} + \sqrt[4]{9(x+5)} + \sqrt[4]{27})}$$

$$= \frac{1}{(\sqrt[4]{(x+5)^3} + \sqrt[4]{3(x+5)^2} + \sqrt[4]{9(x+5)} + \sqrt[4]{27})}$$



Excelencia Educativa Abierta al Pueblo

Av. La Estancia con Av. Caracas y Calle Holanda frente al Edificio Banaven(Cubo Negro)
Chuao - Municipio Chacao - Edo. Miranda - Venezuela - Código Postal 1061
<http://www.unefa.edu.ve>