

Theoretische Physik IV: Statistische Physik und Thermodynamik

Übungsblatt 8

Prof. Dr. Frank Wilhelm-Mauch

Michael Kaicher, M.Sc.

Andrii Sokolov, M.Sc.

WS 2018/2019

Abgabe 12.12.18

Info: Bitte schreiben Sie Name und Ihre Übungsgruppe auf das Übungsblatt und tackern Sie dieses. Sie dürfen in Gruppen von bis zu drei Personen abgeben.

Aufgabe 1: Surface physics

(15 Punkte)

Consider a system with variable number of particles N . Its free energy is $F(T, V, N)$.

- a) Write out dF and express chemical potential μ in terms of F . (1 Punkt)

Consider a monatomic gas of temperature T in contact with surface of a solid. There are N_s absorption sites on the surface; each site can be either empty or occupied with a gas atom. The atoms absorbed by the surface are called adatoms.

First consider the gas subsystem.

- b) Can one use the canonical distribution instead of the grand canonical to find average values of thermodynamical quantities for the gas? Why? (1 Punkt)
- c) Show that the chemical potential of the gas is

$$\mu_g = k_B T \ln \frac{N_g \lambda_{\text{th}}^3}{V},$$

where N_g is the number of particles in the gas. (2 Punkte)

Now consider the adatom subsystem. We assume that adatoms do not interact with each other.

- d) Calculate the grand partition function of the adatom subsystem in terms of partition function z_1 of a single adatom. Consider how all possible numbers of adatoms N_a can be distributed over the sites. Use that $(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$. (4 Punkte)
- e) Calculate the grand thermodynamical potential. (1 Punkt)
- f) Show that the mean occupation of an absorption site is

$$\bar{n} = \overline{N_a} / N_s = x / (1+x),$$

where $x = z_1 \exp \mu_a / k_B T$ with μ_a the chemical potential of an adatom and N_a is the number of adatoms. (1 Punkt)

Suppose that adatoms are in equilibrium with the gas.

- g) Show that

$$\mu_g = \mu_a. \quad (1)$$

It might be helpful to use the following facts. Firstly, the entropy is additive. Secondly, in equilibrium the combined system entropy S is maximum with respect to N_a . And finally, for the internal energies U_g and U_a of the gas and the adatom subsystems, the identities $dU_g = TdS_g - pdV + \mu_g dN_g$ and $dU_a = TdS_a + \mu_a dN_a$ hold. (3 Punkte)

- h) Using Eq. (1), express \bar{n} in terms of the pressure $p_0 = k_B T / z_1 \lambda_{\text{th}}^3$ and the gas pressure p . The expression for \bar{n} is quite simple. (2 Punkte)

Aufgabe 2: Planck'sches Strahlungsgesetz (12 Punkte)

Zunächst erhalten wir das Planck'sches Strahlungsgesetz aus der Bose-Einstein-Verteilung. Betrachten Sie ein System mit unendlich vielen Photonen im Gleichgewicht mit einem Körper mit Temperatur T .

- a) Zeigen Sie, dass die freie Energie F in einem Nichtgleichgewichtsprozess mit der Zeit t abnimmt $dF/dt < 0$ für $T, V = \text{const.}$ Verwenden Sie den ersten und zweiten Hauptsatz der Thermodynamik. Was können Sie über F im Gleichgewicht sagen? (1 Punkt)
- b) Zeigen Sie, dass das chemische Potential der Photonen $\mu = 0$ ist. Nehmen Sie an, dass F des Gesamtsystems näherungsweise F des Photon-Subsystems entspricht. Wieso ist diese Annahme zulässig? (2 Punkte)
- c) Berechnen Sie die Zustandsdichte dn/dk der folgenden elektromagnetischen Felder:
 - i) eindimensionales Feld der Länge L , (1 Punkt)
 - ii) dreidimensionales Feld mit dem Volumen V . (2 Punkte)

Dabei ist k der Betrag des Wellenvektors \vec{k} . Beachten Sie, dass es Zustände mit gleichem k und unterschiedlichen Polarisierungen geben kann. Verwenden Sie die Periodische Randbedingung!

- d) Geben Sie die Verteilung n_ω der Photonen bezüglich ihrer Häufigkeit ω für die eindimensionalen und dreidimensionalen elektromagnetischen Felder aus Aufgabenteil c) an. (1 Punkt)

Die Oberflächentemperatur eines Objekts lässt sich über die Frequenz abschätzen, bei der das Maximum der vom Objekt emittierten Strahlungsenergie liegt.

- e) Berechnen Sie die Wellenlänge λ_{max} , bei der sich das Maximum der spektralen Energiedichte befindet. (2 Punkte)
- f) Berechnen Sie aus den experimentell ermittelten Wellenlängen für bestimmte kosmische Objekte die zugehörigen Temperaturen. Die folgenden Wellenlängen gehören zum Maximum der Frequenzverteilung:
 - i) Grundstrahlung des Weltalls: $\lambda_{\text{max}} = 1.6 \text{ mm}$ (1 Punkt)
 - ii) Erdoberfläche: $\lambda_{\text{max}} = 16 \mu\text{m}$ (1 Punkt)
 - iii) Sonnenoberfläche: $\lambda_{\text{max}} = 0.8 \mu\text{m}$ (1 Punkt)