Theoretische Physik 1b: Mechanik
Übungsblatt 2

Prof. Dr. Frank Wilhelm-Mauch
Dr. Michael Marthaler
Andrii Sokolov, M.Sc.

SS 2018 **Abgabe 23.04.2018**

Info: *Bitte schreiben Sie Name und Ihre Übungsgruppe auf das Übungsblatt und tackern Sie dieses. Sie dürfen in Gruppen von bis zu drei Personen abgeben.*

Aufgabe 1: Krummlinige Koordinaten (*7 Punkte*)

Betrachten Sie folgende Parametrisierung von Koordinaten in der xy-Ebene: $x = se^u$ und $y = se^{-u}$ mit $s > 0$.

(a) Skizzieren Sie die Koordinatenlinien, also die Linien, für die entweder s oder u konstant ist. (*1 Punkt*)

(b) Berechnen Sie die Einheitsvektoren $\hat{u}$ und $\hat{s}$ dieses Koordinatensystems. (*2 Punkte*)

(c) Überprüfen Sie, ob $\hat{u}$ und $\hat{s}$ orthogonal zueinander sind. (*1 Punkt*)

(d) Berechnen Sie die kinetische Energie in den gegebenen Koordinaten. (*3 Punkte*)

Aufgabe 2: Bahnkurve eines Massepunktes (*12 Punkte*)

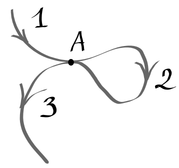
Ein Massenpunkt bewegt sich auf folgender Trajektorie:

$$\vec{r}(t) = \left(r_0 \cos\omega t, r_0 \sin\omega t, at^2/2\right) \quad \text{mit } r_0, a > 0.$$

(a) Skizzieren Sie die Bahnkurve. (*2 Punkte*)

(b) Benutzen Sie das zweite Newtonsche Axiom um das Potenzial, unter dessen Einfluss sich der Massenpunkt bewegt, auszurechen. (*4 Punkte*)
Hinweis: Für konservative Systeme gilt: $-\nabla U(\boldsymbol{r}) = \vec{F}(\boldsymbol{r})$

(c) Bestimmen Sie die Gesamtenergie des Teilchens und zeigen Sie, dass diese eine Erhaltungsgröße beschreibt. (*3 Punkte*)



(d) Auf dem Bild ist eine Trajektorie eines Massepunktes dargestellt. Die Kurve berührt sich bei Punkt A. Könnte es durch die Wirkung eines konservativen Feldes produziert werden? Begründen Sie! (*3 Punkte*)

Aufgabe 3: Linienintegrale (*8 Punkte*)

Berechnen Sie $\int_L d\vec{r} \cdot \vec{V}(\vec{r})$ mit folgenden Vektorfeldern V und Wege L:

(a) $\vec{V} = y\hat{e}_x + (1 + x^2)^{-1}\hat{e}_y$ und L ist eine Linie von $(0, 1)$ bis $(2, 2)$. (*2 Punkte*)

(b) $\vec{V} = 10(2x + y)^4\hat{e}_x + 5(2x + y)^4\hat{e}_y$ und L ist ein Kreis mit dem Radius 42 um den Koordinatenursprung. (*3 Punkte*)

Betrachten Sie das Vektorfeld

$$\vec{V} = \frac{-y}{x^2+y^2}\hat{e}_x + \frac{x}{x^2+y^2}\hat{e}_y$$

(c) Berechnen Sie $\nabla \times \vec{V}$. (*1 Punkt*)

(d) Berechnen Sie $\int_L \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{V}(\vec{r})$, wobei L der Einheitskreis um den Koordinatenursprung ist. Ist $\vec{V}$ konservativ? (*2 Punkte*)

Aufgabe 4: Periodische Bewegung innerhalb einer Falle (*13 Punkte*)

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Form der Schwingungsperiode in einem eindimensionalen zeitunabhängigen Kraftfeld. Benutzen Sie dazu die Energieerhaltung. (*1 Punkt*)

Betrachten Sie ein Teilchen innerhalb eines Fallenpotentials $U = U_0 \tan^2 \alpha x$. Die Energie E des Teilchens ist positiv.

(b) Benutzen Sie die Gleichung die Sie hergeleitet haben und die Variabletransformation $s = \sqrt{U_0/E}\tan x$ in der Integration. Zeigen Sie, dass die Periode der Oszillation zu folgender Größe proportional ist:

$$\int_0^1 \mathrm{d}s \, \frac{1}{1+s^2E/U_0} \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}.$$

(*2 Punkte*)

(c) Berechnen Sie den endgültigen Ausdruck für die Oszillationsperiode. Es ist dabei sinnvoll die Variablen so zu wählen, dass die Integration von 0 bis ∞ durchgeführt wird. (*5 Punkte*)

Betrachten Sie ein matematisches Pendel. Das heißt, ein Teilchen mit Koordinate ϕ innerhalb eines Fallenpotentials $U(\phi) = -mgl\cos\phi$. Hier ist m die Masse des Teilchens und $g, l > 0$. Die Amplitude der Schwingungen ist ϕ_0.

(d) Zeigen Sie, dass die Periodendauer durch das elliptische Integral

$$E(\theta, k) = \int_0^\theta d\xi \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\xi}} \tag{1}$$

ausgedrückt werden kann. (*1 Punkt*)

(e) Leiten Sie nun einen näherungsweisen Ausdruck für die Periodendauer her. Nehmen Sie dazu eine kleine Oszillationsamplitude $\phi_0^4 \ll 1$ an. Damit können Sie nun den Wurzelausdruck und den Term $\sin\phi_0/2$ in dem Integral in Gleichung (1) entwickeln. Vernachlässigen Sie dabei Terme der Ordnung ϕ_0^4 und höher. Führen Sie anschließend die Integration aus.

(*4 Punkte*)