1. MECÁNICA GENERAL

1.2. CINEMÁTICA DEL PUNTO MATERIAL

La Cinemática es la parte de la Mecánica que estudia el movimiento de los cuerpos desentendiéndose de las causas que lo producen. La Cinemática describe cómo varían la velocidad y aceleración de un cuerpo con el tiempo y con sus cambios de posición. La buena comprensión de la Cinemática no solo constituye un fundamento necesario para el posterior estudio de la Dinámica sino que es en sí mismo un importante campo de estudio. El proyecto de muchas piezas de maquinaria que deban crear movimientos concretos se basa, casi exclusivamente en la Cinemática. También se basa en ella el estudio del movimiento de proyectiles, naves espaciales y satélites artificiales. Para el estudio de la Cinemática son necesarias dos herramientas matemáticas: el cálculo vectorial y el cálculo diferencial e integral.

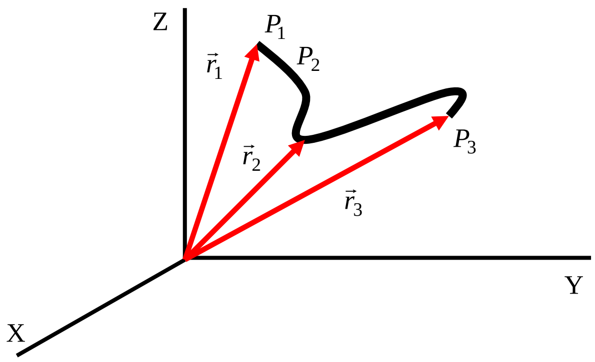
Comenzaremos estudiando el movimiento de un ***punto material*** y posteriormente de cuerpos cualesquiera tratándolos como conjuntos de puntos materiales donde las distancias entre dos cualesquiera de ellos son invariables, el ***sólido rígido***. Una partícula o punto material es un cuerpo cuyo tamaño puede ignorarse al estudiar su movimiento. Tan solo hay que considerar su centro de masa. La orientación del cuerpo o su rotación no desempeñan ningún papel en la descripción de su movimiento. Los sistemas pueden ser muy grandes o muy pequeños. Su pequeñez no garantiza que un cuerpo pueda modelarse por una partícula, y un gran tamaño no siempre impide que el cuerpo se pueda modelar mediante una partícula. El que un cuerpo sea grande o pequeño está relacionado con la longitud del camino que sigue, con la separación entre cuerpos o con ambas cosas. En estudio de la Cinemática del sólido rígido si que será importante considerar su orientación y rotación.

Si la Cinemática es la parte de la Mecánica que nos ayuda a describir el movimiento. La primera pregunta que debemos hacer es ***¿qué es el movimiento?*** Decimos que un objeto se encuentra en movimiento relativo con respecto a otro cuando su posición, medida relativa al segundo cuerpo, está cambiando con el tiempo. Por otra parte, si esta posición relativa no cambia con el tiempo, el objeto se encuentra en reposo relativo. Tanto el movimiento como el reposo son conceptos relativos; esto es, dependen de la condición del objeto con relación al cuerpo que se usa como referencia. Por ello, para expresar el concepto de reposo o de movimiento previamente ha de determinarse un sistema de referencia, que vamos a considerar fijo y referir a él la posición del sistema en movimiento. Si el sistema de referencia es un ***sistema cartesiano***, la posición de un sistema vendrá dada por el vector de posición (del punto material o puntos materiales), si existe un cambio en el vector de posición, ***que puede ser en módulo, en dirección o en ambos,*** habrá movimiento; si el vector posición no varía, el punto estará en reposo.

Las magnitudes que se utilizan en la descripción del movimiento en un punto son el tiempo, la posición, la velocidad y la aceleración. Las diversas magnitudes cinemáticas están relacionadas a través de ecuaciones diferenciales. Los problemas de Cinemática consisten en determinar una o más de las magnitudes anteriores a partir de las que se dan como datos del problema.

1.2.1. Ecuación de movimiento: trayectoria

La posición de una partícula o punto material P se especifica mediante su vector de posición $\vec{r}$ respecto al origen del sistema de referencia elegido. Si el punto material P se mueve con respecto al sistema de referencia el extremo del vector de posición variará con el tiempo t describiendo una curva que pasa por las sucesivas posiciones del punto material y que constituye su ***trayectoria.***



Un movimiento es ***rectilíneo*** cuando su trayectoria es una recta, ***circular*** si es una circunferencia y, en general, ***curvilíneo*** si es una curva cualquiera. Si puede encontrarse un sistema de referencia para el cual una de las componentes del vector de posición sea nula en todo instante se dice que se trata de un movimiento ***plano.***

Un movimiento queda definido cuando se conoce una expresión matemática que permite determinar la posición del punto material en cada instante. El vector de posición $\vec{r}$ puede ser expresado en función de sus componentes cartesianas:

$$\vec{r} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$$

de modo que para saber la posición del móvil en un instante bastará conocer las ecuaciones:

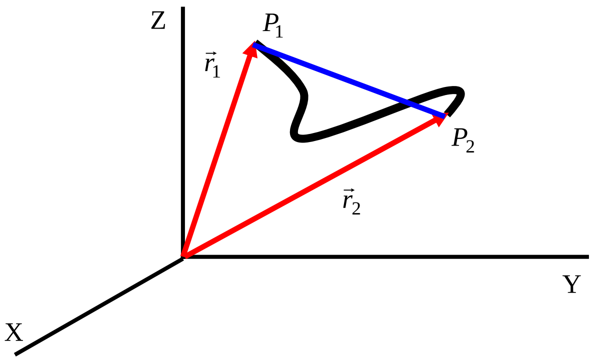
$$X = X(t)\ ; \qquad Y = Y(t)\ ; \qquad Z = Z(t)$$

que definen el valor de las coordenadas en función del tiempo. Estas relaciones constituyen la *ecuación intrínseca de la trayectoria o ley horaria.*

1.2.2. Velocidad

Sea un punto móvil que en el instante t_1 está en la posición P_1, definida por el vector de posición $\vec{r}_1$, y en el instante t_2 en la posición P_2 definida por el vector de posición $\vec{r}_2$. Se llama velocidad media del punto material durante el intervalo $t_2 - t_1$ a la magnitud vectorial:

$$\vec{v}_m = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$



El vector velocidad media tiene la misma dirección y sentido que el vector $\Delta\vec{r}$. Al vector $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, diferencia entre los vectores posición se le llama vector desplazamiento o simplemente desplazamiento. Es fácil observar que el valor de la trayectoria o longitud recorrida (Δs) por el punto material puede o no coincidir con el módulo del vector desplazamiento. ***Coincidirán si el movimiento es rectilíneo y no existe retroceso, o si se supone un desplazamiento infinitesimal.***

La velocidad en el instante t_1 es el límite hacia el cual tiende la velocidad media cuando t_2 tiende a t_1 es un concepto de mayor contenido matemático pero se puede llegar a él a partir de la definición de velocidad media de la siguiente manera:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

donde $\vec{r}$ es el vector de posición del punto material en un instante cualquiera t_1, en general t. La velocidad instantánea es una magnitud vectorial que tienen la dirección de la tangente en el punto P_1 a la trayectoria y el sentido del movimiento. Como ya se ha explicado, para desplazamientos infinitesimales la cuerda tiende a confundirse con el arco y, en consecuencia si $dr = ds$ el módulo de la velocidad instantánea puede escribirse como $v = \frac{ds}{dt}$. Teniendo esto en cuenta, el vector velocidad instantánea puede escribirse de la siguiente manera:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v \cdot \vec{u}_t$$

siendo $\vec{u}_t = \frac{d\vec{r}}{ds} = (\frac{dx}{ds}\vec{i} + \frac{dy}{ds}\vec{j} + \frac{dz}{ds}\vec{k})$ un vector unitario tangente a la trayectoria en dicho punto. Por tanto, ***la velocidad es evidentemente un vector ligado*** a un punto.

Lógicamente si $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z) = (\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt})$ las componentes del vector de posición pueden determinarse a partir de las componentes de la velocidad mediante las siguientes expresiones:

$$v_x = \frac{dx}{dt} \Rightarrow x = \int v_x dt$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} \Rightarrow y = \int v_y dt$$

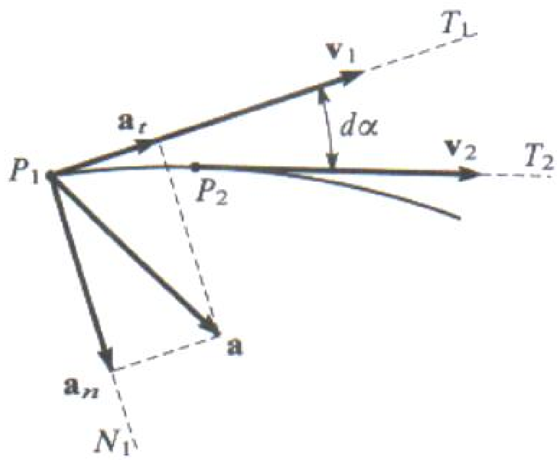
$$v_x = \frac{dx}{dt} \Rightarrow z = \int v_z dt$$

1.3.2. Aceleración

En general son muy pocos los movimientos que tienen lugar a velocidad constante, normalmente se produce siempre un cambio en el vector velocidad, pudiendo variar su módulo y su dirección. Para medir la rapidez de esta variación se define la ***aceleración.*** Se denomina aceleración de un punto material o móvil en el instante *t* a la derivada respecto al tiempo de la velocidad del punto material en ese instante. Es decir:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = (\frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k})$$

El vector aceleración en un punto es un vector ligado a dicho punto. El vector aceleración se puede descomponer en dos componentes rectangulares, una paralela a la dirección tangente a la trayectoria y la otra según la normal a esta dirección.



Estas componentes se llaman, respectivamente, ***aceleración tangencial a_t*** y ***aceleración normal a_n.*** Su expresión matemática se obtiene derivando la expresión de la aceleración escrita de la siguiente manera:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\cdot \vec{u}_t\right) = \frac{d^2 s}{dt^2}\cdot \vec{u}_t + \frac{ds}{dt}\cdot \frac{d\vec{u}_t}{dt}$$

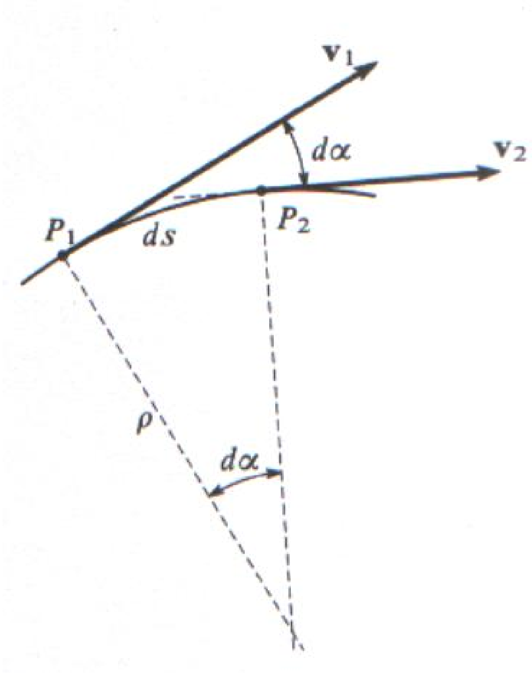
Los dos términos de esta expresión representan las componentes de la aceleración:

Aceleración tangencial: $\vec{a}_t = \frac{dv}{dt}\cdot \vec{u}_t = \frac{d^2 s}{dt^2}\cdot \vec{u}_t$

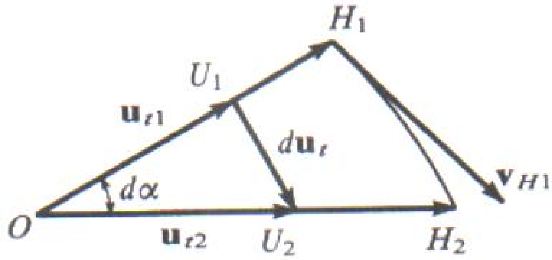
La aceleración tangencial es consecuencia de la variación del módulo de la velocidad y su dirección es la de la tangente a la trayectoria.

Aceleración normal: $\vec{a}_n = \frac{ds}{dt}\cdot \frac{d\vec{u}_t}{dt} = v\cdot \frac{d\vec{u}_t}{dt}$

En la expresión de la aceleración aparece el término $d\vec{u}_t$, esto es el cambio que sufre el vector unitario tangente a la trayectoria en un punto de la trayectoria. Para ello hacemos uso del siguiente gráfico. Calculamos $d\vec{u}_t$ para el punto P_1 y para ello consideramos también el vector unitario tangente en el punto P_2 infinitamente próximo, de esta manera tenemos que $d\vec{u}_t = \vec{u}_{2t} - \vec{u}_{1t}$:



Y gráficamente $d\vec{u}_t = \vec{u}_{2t} - \vec{u}_{1t}$ se calcula de la siguiente manera:



De ambas figuras se deducen las siguientes relaciones:

$$d\vec{u}_t = \vec{u}_{2t} - \vec{u}_{1t} = du_t \cdot \vec{u}_n = d\alpha \cdot \vec{u}_n \Rightarrow d\vec{u}_t = d\alpha \cdot \vec{u}_n = \frac{ds}{\rho} \cdot \vec{u}_n$$

$sen(d\alpha) = \dfrac{du_t}{u_{t2}} = du_t$; si $d\alpha$ es muy pequeño $\Rightarrow sen(d\alpha) = d\alpha = du_t$

Si trazamos la normal a los vectores velocidad en cada punto (líneas discontinuas en la figura) el ángulo $d\alpha$ formado por los vectores $\vec{u}_{1t}$ y $\vec{u}_{2t}$ es el mismo que el formado por sus líneas normales, esto nos permite escribir el vector $d\vec{u}_t$ de la siguiente manera:

$$sen(d\alpha) = d\alpha = \frac{ds}{\rho} \Rightarrow d\vec{u}_t = \frac{ds}{\rho} \cdot \vec{u}_n$$

donde el parámetro ρ recibe el nombre de ***radio de curvatura*** de la trayectoria en cada punto.

De acuerdo con este desarrollo la aceleración normal puede escribirse de la siguiente manera:

$$\vec{a}_n = \frac{ds}{dt} \cdot \frac{d\vec{u}_t}{dt} = \frac{ds}{dt} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \frac{ds}{dt} \cdot \vec{u}_n = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \vec{u}_n = v^2 \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \vec{u}_n$$

Por tanto, la componente de la aceleración según la normal en cada punto a la trayectoria es:

$$\vec{a}_n = v^2 \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \vec{u}_n$$

siendo $\vec{u}_n$ un vector unitario dirigido según la normal de la trayectoria en cada punto. La aceleración normal es consecuencia de un cambio en la dirección de la velocidad.

La aceleración tangencial y normal reciben el nombre de ***componentes intrínsecas*** del vector aceleración, al ser perpendiculares entre sí definen el módulo de $\vec{a}$ según la expresión:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

En resumen, la aceleración tiene dos componentes, la primera según la tangente a la trayectoria, está dirigida en el sentido del movimiento o en sentido contrario según que el módulo de la velocidad crezca o descrezca; la segunda, según la normal, está dirigida hacia la concavidad de la trayectoria. Estas dos componentes tienen un sentido físico bien definido: mientras la variación del módulo de la velocidad está determinada por la aceleración tangencial ,la variación de la dirección de la velocidad está determinada por la aceleración normal.

Las leyes o expresiones que describen los movimientos conocidos se deducen a partir de las ecuaciones vistas: ***movimiento rectilíneo y uniforme, movimiento rectilíneo uniformemente acelerado y movimiento circular.***

En un ***movimiento rectilíneo*** el punto P se mueve sobre una recta fija y el arco s de la trayectoria se sustituye por la coordenada x del punto sobre la recta. En este caso el vector velocidad v estará dirigida según dicha recta y también lo estará el vector aceleración a ya que al ser nula la curvatura de la trayectoria la componente normal de la aceleración también es nula.

Si la aceleración a es nula, la velocidad v es constante y ***el movimiento rectilíneo es uniforme.*** En este caso:

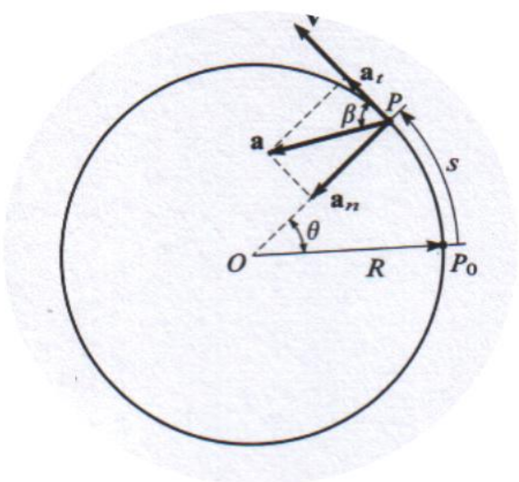
$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow x = \int vdt \Rightarrow x = x_0 + vt$$

Cuando la aceleración a es constante, ***el movimiento es uniformemente acelerado.*** En este caso:

$$a(= a_t) = \frac{dv}{dt} \Rightarrow v = \int adt \Rightarrow v = v_0 + at$$

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow x = \int vdt = \int (v_0 + at)dt \Rightarrow x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

Si un punto P se mueve sobre una circunferencia de radio R y P_0 es un punto de la circunferencia que se toma como origen, la posición del punto en el instante t puede definirse por el ángulo θ que forma el vector $\vec{OP}$ con el vector $\vec{OP_0}$:



El vector velocidad v está dirigido según la tangente a la circunferencia y su módulo es:

$$v = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} = R\omega$$

siendo $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ la ***velocidad angular*** que se mide en rad/s. Un caso sencillo de movimiento circular es el ***movimiento circular uniforme*** en el que la velocidad angular es constante. Entonces de modo análogo a las ecuaciones deducidas para el caso del movimiento rectilíneo y uniforme podemos obtener fácilmente la relación entre el ángulo girado y el tiempo:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \theta = \theta_0 + \omega t$$

En el movimiento circular uniforme la dirección y sentido del vector $\vec{v}$ cambian en cada instante, existe por tanto una aceleración normal dirigida hacia en centro *O* y su expresión es:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = R\omega^2$$

Si la velocidad angular cambia con el tiempo a un ritmo constante el movimiento se llama ***movimiento circular uniformemente acelerado*** y se define la ***aceleración angula***r cuya expresión es:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Integrando estas expresiones podemos escribir las siguientes relaciones entre velocidad angular, ángulo girado y tiempo:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

Al variar la velocidad angular con el tiempo, el módulo de la velocidad lineal varía con el tiempo por lo que además de una aceleración normal que no es constante en el tiempo aparece una aceleración tangencial dirigida según la tangente a la circunferencia y cuyo módulo viene dado por la expresión:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = R\frac{d^2\theta}{dt^2} = R\alpha$$

la expresión de la aceleración normal es la misma que en el movimiento circular uniforme y $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$ será el módulo de la aceleración total.