等間隔に並ぶ素数を追い求めて

関 真一朗

平成 29 年 10 月 29 日

まえがき

等差数列を高校数学で学んだときには初項と公差に注目することが多かったのではないかと思われるが, この本では長さに着目する. 等差数列の長さとは高校数学の言葉で述べれば項数のことである. 例えば,

$$3, 5, 7$$

は長さ 3 の等差数列である. ところで, この長さ 3 の等差数列は全て素数で構成されている. このように素数のみで構成される等差数列 =「等間隔に並ぶ素数」が本書の主役である. 少し探してみると,

$$
\begin{aligned}
&5, 11, 17, 23, 29 \quad (\text{長さ } 5)\\
&7, 37, 67, 97, 127, 157 \quad (\text{長さ } 6)\\
&7, 157, 307, 457, 607, 757, 907 \quad (\text{長さ } 7)\\
&199, 409, 619, 829, 1039, 1249, 1459, 1669, 1879, 2089 \quad (\text{長さ } 10)
\end{aligned}
$$

などが見つかる. 2015 年には, Bryan Little がコンピュータを用いて長さ 26 の素数等差数列

$$161004359399459161 + 10644900609172830k, \quad k = 0, 1, \ldots, 25$$

を発見している. それでは, どれだけ大きい長さを持つ素数等差数列が存在するだろうか. 実は驚くべきことに, 任意の長さの素数のみで構成される等差数列が存在することが Ben Green と Terence Tao によって証明されている. この定理の証明を解説することが本書の目的である.

本書の特徴の一つとして, 必要となる前提知識の少なさがあげられる. 実際, 大学の学部一, 二年生で学ぶ微分積分学, 線形代数学, 位相空間論, 複素解析の知識があれば本書を最後まで読み通すことができるであろう. また, 第 2 章はこれらの知識がなくても読むことができる初等的な内容である (が, 簡単というわけではない).

目 次

記号

$\#S \cdots$ 集合 S の濃度.
$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C} \cdots$ それぞれ正整数, 整数, 実数, 複素数全体のなす集合.
$[N] \cdots$ 正整数 N に対して, $[N] := \{1, 2, \ldots, N\}$.
$S + x \cdots S$ の x-シフト. 集合 $S \subset \mathbb{C}$ と複素数 x に対して, $S + x := \{y + x \mid y \in S\}$.
$\lfloor x \rfloor \cdots$ 実数 x の整数部分.

漸近挙動の記号について

第1章　あらすじ

この本では次の定理を証明する.

定理 1.1 (Green–Tao [5]). 素数のみから構成される任意の長さの等差数列が存在する.

素数定理のような素数分布に関する命題はしばしばRiemannゼータ函数に代表される特別な函数の解析的性質から解析学の手法を用いて導かれる (解析的整数論). Green–Taoの定理も素数の分布に関する問題の一つと考えることができるし, 実際にその証明にはRiemannゼータ函数の解析が必要となる. しかしながら, 解析的整数論の手法によって全てが解決されるわけではなく, 自然数からなる集合が等差数列を含むための十分条件を与える一般論を構築することが重要となる (Szemerédiの定理とその拡張). そのような一般論の研究はErdős–Turánに遡るが, それ以前にRamsey理論の範疇にある等差数列に関する現象が発見されたことから物語は始まる.

1.1　Baudet–Schurの予想

集合Sの部分集合族$\mathcal{F}$について, $S = \bigsqcup_{A\in\mathcal{F}} A$と$S$を非交差和で表すことができるとき$\mathcal{F}$は$S$の類別を与えるといい, $\mathcal{F}$の元を類と呼ぶ.

予想 1.2 (Baudet–Schur). 正整数全体のなす集合$\mathbb{N}$の有限個の類からなる類別を任意にとる. このとき, それらの類の少なくとも一つは任意の長さの等差数列を含む.

この予想はvan der Waerdenによって1927年に証明された ([13]). 対象の任意の類別に対して類の一つが必ず構造を持ち, それがどの類なのかについては知ることができないという特徴を持ったRamsey理論における典型例となっている. 鳩の巣原理がRamsey理論的な現象の一つの原型であるが, それは予想1.2の証明にも利用される. $\mathbb{N}$を素数全体のなす集合とそれ以外 (1または合成数) の集合に類別することができるので予想1.2はどちらかの類が任意の長さの等差数列を含むことを主張するが, その類を決定できないため定理1.1を帰結することはできない[1]. このように予想1.2はRamsey理論の典型例ではあるが, 実は構造が現れる類は本質的に決定できない運命にあるのではなく, その類を特定できる十分条件がその後明らかにされてきた. その歴史を簡単に俯瞰したい.

[1]もし, 1または合成数のなす集合が任意の長さの等差数列を含むという性質を満たさないのであれば予想1.2から定理1.1が従うが, 例えば偶数列を考えればこの集合が任意の長さの等差数列を含むことは明らかである.

1.2 Erdős–Turán の研究

定義 1.3. 集合 $A \subset \mathbb{N}$ の上漸近密度 $\overline{d}(A)$ を

$$\overline{d}(A) := \limsup_{N\to\infty} \frac{\#\{A \cap [N]\}}{N}$$

と定義する.

定理 1.4 (Erdős–Turán [1])**.** $A \subset \mathbb{N}$ の上漸近密度が 3/8 より大きければ, A は長さ 3 の等差数列を含む.

1.3 Roth の定理

定理 1.5 (Roth [7])**.** $A \subset \mathbb{N}$ の上漸近密度が正であれば, A は長さ 3 の等差数列を含む.

定理 1.6 (Szemerédi [9])**.** $A \subset \mathbb{N}$ の上漸近密度が正であれば, A は長さ 4 の等差数列を含む.

1.4 Szemerédi の定理

定理 1.7 (Szemerédi [10])**.** $A \subset \mathbb{N}$ の上漸近密度が正であれば, A は任意の長さの等差数列を含む.

1.5 定理 1.1 の根拠

1.6 Szemerédi の定理の拡張

第2章　van der Waerdenの定理

この章では予想 1.2 を証明する.

2.1　同値な言い換え

予想 1.2 は van der Waerden によって, 次のように主張を言い換えて解決された.

定理 2.1 (van der Waerden [13])**.** 任意の正の整数 k, m に対して, 正の整数 $N_{\mathrm{vdW}}(k, m)$ が存在して次が成り立つ : $N \geq N_{\mathrm{vdW}}(k, m)$ を満たす任意の整数 N に対して, $[N]$ をどのように m 色に塗り分けたとしても, $[N]$ は必ず同じ色で塗られた長さ k の等差数列を含む.

$[N]$ を m 色に塗り分けるとは写像 $c\colon [N] \to [m]$ を与えることである (全射でなくても m 色に塗り分けると表現することにする). すなわち, $i \in [N]$ に対して $c(i)$ が i の色である. また, $m = 1$ のときは定理は自明に成り立つ.

定理 2.1 $\Longrightarrow$ 予想 1.2 の証明. 定理 2.1 が成立すると仮定し, $\mathbb{N}$ の m 個の類への類別であって, どの類についても任意の長さの等差数列を含むという性質が満たされないようなものが存在すると仮定する ($m \geq 2$). 或る長さの等差数列を含む類はそれより小さい任意の長さの等差数列も含むという事実に注意すれば, 或る正整数 k が存在してどの類も長さ k の等差数列を含まないことがわかる. このとき, $[N_{\mathrm{vdW}}(k, m)]$ をこの類別によって塗り分ければ或る類が長さ k の等差数列を含むはずなので矛盾する. □

Khinchin の本 [6](蟹江幸博訳) において「実際の所, ファン・デル・ヴェルデンは要求より少し強いことを証明しました.」とあり, 定理 2.1 の方が予想 1.2 より強く見えるが, 実は同値である.

予想 1.2 $\Longrightarrow$ 定理 2.1 の証明. 予想 1.2 を仮定した上で, 定理 2.1 を背理法で証明する. すなわち, 或る正整数 k, m, 狭義単調増大正整数列 $\{N_n\}_{n=1}^{\infty}$, 各 $[N_n]$ の m 色塗り分け $c_n\colon [N_n] \to [m]$ が存在して, 各 $[N_n]$ は c_n に対する長さ k の同色等差数列[2]を含まないと仮定する. 鳩の巣原理によって, 狭義単調増大正整数列 $\{n_{1j}\}_{j=1}^{\infty}$ が存在して $c_{n_{11}}(1) = c_{n_{12}}(1) = \cdots$ が成り立つことがわかる. 再び鳩の巣原理によって, $\{n_{1j}\}_{j=1}^{\infty}$ の部分狭義単調増大正整数列 $\{n_{2j}\}_{j=1}^{\infty}$ が存在して $c_{n_{21}}(1) = c_{n_{22}}(1) = \cdots$ が成り立つことがわかる. これを繰り返して, 狭義単調増大正整数列の列

$$\{n_{1j}\}_{j=1}^{\infty} \supset \{n_{2j}\}_{j=1}^{\infty} \supset \{n_{3j}\}_{j=1}^{\infty} \supset \cdots$$

[2]同じ色で塗られた数からなる等差数列のことをこのように呼ぶことにする.

であって, 任意の正整数 i に対して $c_{n_{i1}}(i) = c_{n_{i2}}(i) = \cdots$ が成り立つようなものが存在することがわかる. ここで, 狭義単調増大正整数列 $\{n_{ii}\}_{i=1}^{\infty}$ を考えて, 写像 $c\colon \mathbb{N} \to [m]$ を $c(i) := c_{n_{ii}}(i), i \in \mathbb{N}$ で定義する. 写像 c によって $\mathbb{N}$ を類別することができるので, 予想 1.2 より或る長さ k の等差数列 $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{N}$ が存在して $c(a_1) = \cdots = c(a_k)$ が成り立つ. 構成から制限写像を考えると任意の $i \in \mathbb{N}$ に対して $c_{n_{ii}}|_{[i]} = c|_{[i]}$ なので, $I := \max\{a_1, \ldots, a_k\}$ とすれば

$$c_{n_{II}}(a_1) = c_{n_{II}}(a_2) = \cdots = c_{n_{II}}(a_k)$$

となって, $[N_{n_{II}}]$ が長さ k の同色等差数列を含まないという仮定に矛盾する. □

2.2 定理 2.1 の証明

van der Waerden の定理を証明する. 先ほども引用した Khinchin の本 [6] に載っている証明とは別の, Tao[11] の arXiv 版の付録に掲載されている証明を元にした証明を紹介する. なお, どの証明であっても二重帰納的, 色の塗り分けの変更, 対角線論法, 鳩の巣原理など共通の考え方に基づいている.

初項, 公差, 長さがそれぞれ $a, r, k \in \mathbb{N}$ であるような等差数列を $[a, r, k]$ と表すことにする. $m, h, N \in \mathbb{N}$ に対して, $[N]$ の h-シフト $[N] + h = \{h+1, h+2, \ldots, h+N\}$ の m 色塗り分けは写像 $c\colon [N] + h \to [m]$ のことである.

補題 2.2 (平行移動の原理)**.** h を任意の正整数とする. 定理 2.1 における $N_{\mathrm{vdW}}(k, m)$ が存在するならば, $[N_{\mathrm{vdW}}(k, m)]$ の h-シフトはその任意の m 色塗り分けに対して, 長さ k の同色等差数列を含む.

証明. 定理 2.1 が成り立つと仮定する. $[N_{\mathrm{vdW}}(k, m)]$ の h-シフトの m 色塗り分け c が任意に与えられたとき, $[N_{\mathrm{vdW}}(k, m)]$ の m 色塗り分け c' を $c'(i) := c(i + h)$ で定義する ($i \in [N_{\mathrm{vdW}}(k, m)]$). すると, 仮定より $[N_{\mathrm{vdW}}(k, m)]$ に含まれる c' に対する長さ k の同色等差数列 $[a, r, k]$ が存在する. このとき, 長さ k の等差数列 $[a + h, r, k]$ は $[N_{\mathrm{vdW}}(k, m)]$ の h-シフトに含まれるような c に対する長さ k の同色等差数列である. □

この平行移動の原理は他の状況でも今後何度か現れる (証明は同じ). この節で紹介する証明における二重帰納的な構造を作るために, 車輪という用語を導入する.

定義 2.3. $k, d, a \in \mathbb{N}$ とする. 半径 k, スポーク数 d, ハブ a の車輪とは, d 個の長さ k の等差数列の組み $([a, r_1, k], \ldots, [a, r_d, k])$ のことをいう ($r_1, \ldots, r_d \in \mathbb{N}$). 各 $i = 1, \ldots, d$ に対して長さ $k - 1$ の等差数列 $[a + r_i, r_i, k - 1]$ のことを車輪のスポークと呼ぶ ($k = 1$ のときはスポークはない). ある集合の m 色塗り分け c が与えられているとする ($m \in \mathbb{N}$). このとき, 車輪 $([a, r_1, k], \ldots, [a, r_d, k])$ が c に関してカラフルであるとは, 相異なる色 $c_0, c_1, \ldots, c_d \in [m]$ が存在して, $c(a) = c_0, c(a + jr_i) = c_i$ が任意の $1 \le i \le d$ および $1 \le j \le k - 1$ に対して成り立つときにいう.

定理 2.1 を示すには次の命題を示せば十分である. 集合が車輪を含むとは, その車輪を構成する全ての整数を含むときにいう.

命題 2.4. 任意の正の整数 k, d, m に対して, 正の整数 $N_{\circledast}(k, d, m)$ が存在して次が成り立つ : $[N_{\circledast}(k, d, m)]$ の任意の m 色塗り分けに対して, $[N_{\circledast}(k, d, m)]$ は長さ k の同色等差数列または半径 k, スポーク数 d のカラフルな車輪を含む.

k, d を固定したときに, 任意の m に対する定理 2.4 の主張を $W(k, d)$ と表すことにする. 任意の k, d に対して $W(k, d)$ が成立することを二重帰納法で証明する.

命題 2.4 $\Longrightarrow$ 定理 2.1 の証明. $W(k, m)$ が成り立つとき, $N_{\mathrm{dvW}}(k, m) := N_{\circledast}(k, m, m)$ とすることができる. 実際, $[N_{\circledast}(k, m, m)]$ の m 色塗り分けに対して半径 k, スポーク数 m のカラフルな車輪は存在しないので[3], $[N_{\circledast}(k, m, m)]$ は長さ k の同色等差数列を含む. □

命題 2.4 の証明. 任意の d に対して $W(1, d)$ が成立することは自明. k を固定する. 以下, 任意の d に対して $W(k, d)$ が成り立つと仮定する. m を任意にとって, $N_{\mathrm{vdW}}(k, m) := N_{\circledast}(k, m, m)$ とおく (仮定より, 上述の通り k, m に対する定理 2.1 の主張が成立する). このとき, $N_{\circledast}(k+1, 1, m) := 2N_{\mathrm{vdW}}(k, m)$ とおける. 実際, $[2N_{\mathrm{vdW}}(k, m)]$ の任意の m 色塗り分けをとるとき, 仮定と平行移動の原理より $[N_{\mathrm{vdW}}(k, m)] + N_{\mathrm{vdW}}(k, m)$ は長さ k の同色等差数列を含む ($[N_{\mathrm{vdW}}(k, m)] + N_{\mathrm{vdW}}(k, m)$ は制限写像によって塗り分ける). それをスポークとしてハブとなる数を一つ付け加えれば半径 $k+1$, スポーク数 1 の車輪が $[2N_{\mathrm{vdW}}(k, m)]$ 内に得られる. ハブの色がスポークの色と同じであれば長さ $k+1$ の同色等差数列が得られ, 異なればカラフルな車輪が得られるので, $W(k+1, 1)$ が成立することが示された.

よって, 後は $W(k+1, d)$ が成り立つと仮定して $W(k+1, d+1)$ が成り立つことを示せばよい. m を任意にとって固定する. $N_1 := N_{\circledast}(k+1, d, m), N_2 := 2N_{\mathrm{vdW}}(k, m^{d+1}N_1^{d+1})$ とおく. このとき, $N_{\circledast}(k+1, d+1, m) = N := (k+1)N_1(N_2+1)$ ととれることを示す. N の m 色塗り分け $c\colon [N] \to [m]$ を任意にとって固定する. $[N]$ の中の N_2 個の区間 $[N_1] + h(k+1)N_1, (h = 1, \ldots, N_2)$ を考える[4]. 長さ $k+1$ の同色等差数列を含むような区間が存在すればその時点で証明が完了するため, これら N_2 個の区間はいずれも長さ $k+1$ の同色等差数列を含まないと仮定してよい. このように仮定すると, 定理 2.4 についても平行移動の原理が成り立つので, N_1 の定義から各 $[N_1] + h(k+1)N_1$ は半径 $k+1$, スポーク数 d の c に関するカラフルな車輪を含むことがわかる. すなわち, 任意の $h \in [N_2]$ に対して或る $a(h), r_1(h), \ldots, r_d(h) \in [N_1]$ および相異なる $d+1$ 色 $c_0(h), c_1(h), \ldots, c_d(h) \in [m]$ が存在して

$$\begin{cases} c(h(k+1)N_1 + a(h)) = c_0(h), \\ c(h(k+1)N_1 + a(h) + jr_i(h)) = c_i(h) \quad 1 \le j \le k,\ 1 \le i \le d \end{cases} \tag{2.1}$$

が成り立つ (車輪 $([a(h) + h(k+1)N_1, r_i(h), k+1])_{i=1}^{d}$ を考えていて, ハブの色が $c_0(h)$ で各スポークの色が $c_i(h)$). ここで, 別の塗り分け写像

$$\begin{aligned} c_{\circledast}\colon [N_2] &\to [N_1]^{d+1} \times [m]^{d+1} \\ h &\mapsto (a(h), r_1(h), \ldots, r_d(h), c_0(h), \ldots, c_d(h)) \end{aligned}$$

[3] m 個のスポークが相異なる m 色に塗り分けられていたとしても, 鳩の巣原理によってハブはいずれかのスポークの色に一致しなければならない.

[4] 一番大きい数は $(k+1)N_1N_2 + N_1$ で, これは N 以下. また, $h(k+1)N_1 + N_1 < (h+1)(k+1)N_1 + 1$ なので各区間に交わりはない.

を考える．全単射 $[N_1]^{d+1} \times [m]^{d+1} \simeq [m^{d+1}N_1^{d+1}]$ があるので，これは $m^{d+1}N_1^{d+1}$ 色塗り分けである．よって，N_2 の定義より区間 $[N_2/2] + N_2/2$ は $c_{\circledast}$ に関する長さ k の同色等差数列を含む．それを $[b, s, k]$ とし，色が $(a, r_1, \ldots, r_d, c_0, \ldots, c_d)$ であったとする．このとき，$[b, s, k]$ の各元に対応する k 個の半径 $k+1$, スポーク数 d の c に関するカラフルな車輪は同じデータ $(a, r_1, \ldots, r_d, c_0, \ldots, c_d)$ を持つことがわかるが，それらを用いて $[N]$ に含まれる半径 $k+1$, スポーク数 $d+1$ の c に関するカラフルな車輪 $\mathcal{W}$ の候補を構成する．$\mathcal{W}$ のハブは $b_0 := (b-s)(k+1)N_1 + a$ とし，k 個のカラフルな車輪のハブ達から $\mathcal{W}$ のスポーク $[b_0 + s(k+1)N_1, s(k+1)N_1, k]$ を一つ構成する．また，k 個のカラフルな車輪の同じ色のスポーク達を対角に結ぶことによって $\mathcal{W}$ の d 個のスポーク $[b_0 + s(k+1)N_1 + r_i, s(k+1)N_1 + r_i, k], (1 \le i \le d)$ を作る．以上をまとめると，$\mathcal{W}$ は車輪

$$([b_0, s(k+1)N_1, k+1], [b_0, s(k+1)N_1 + r_1, k+1], \ldots, [b_0, s(k+1)N_1 + r_d, k+1])$$

である．$b \ge N_2/2$ であり，$s < N_2/2$ なので $b - s > 0$. また，$b_0 < (k+1)N_1N_2 + N_1$ である．スポークを構成する数についても，$1 \le j \le k$ に対して

$$b_0 + j(s(k+1)N_1 + r_i) = (b + (j-1)s)(k+1)N_1 + a + jr_i \le (k+1)N_1N_2 + N_1 + kN_1$$

なので $(b+(j-1)s$ は $[b, s, k]$ を構成する数なので $[N_2]$ の元であることに注意), $\mathcal{W}$ は $[N]$ 内に存在することが確認できた．(2.1) を用いて $\mathcal{W}$ の各スポークの色を確認する．$1 \le j \le k$ に対して

$$c(b_0 + js(k+1)N_1) = c((b + (j-1)s)(k+1)N_1 + a) = c_0(b + (j-1)s) = c_0$$

であり，$1 \le i \le d,\ 1 \le j \le k$ に対して

$$c(b_0 + j(s(k+1)N_1 + r_i)) = c((b + (j-1)s)(k+1)N_1 + a + jr_i) = c_i(b + (j-1)s) = c_i$$

なので，各スポークは一つずつ同色で塗られており，$c_0, c_1, \ldots, c_d$ は相異なる色であったので $\mathcal{W}$ のスポーク同士の色は相異なることがわかった．$\mathcal{W}$ のハブの色について，もし $c(b_0) = c_i$ なる $0 \le i \le d$ が存在すれば $[b_0, s(k+1)N_1 + r_i, k+1]$ は $[N]$ に含まれる c に関する長さ $k+1$ の同色等差数列である．また，$c(b_0)$ がどの c_i とも相異なるのであれば，$\mathcal{W}$ は c に関するカラフルな車輪である．以上で，$W(k+1, d+1)$ が成立することが示された． □

2.3 Graham–Rothschild の定理

前節では車輪 (等差数列を束ねたもの) を考えることによって二重帰納的な構造を作ったが，Graham–Rothschild は等差数列の高次元化を考えることによって別の二重帰納的構造を作って定理 2.1 を証明した．

定義 2.5. $k \in \mathbb{N}$ をとる．$[k]_0 := \{0\} \cup [k]$ として，$[k]_0^d$(直積集合) に同値関係を次のように入れる: $[k]_0^d$ の二元が k 同値であるとは最後に k が現れる成分までの値が一致していると

きにいう. すなわち, $[k-1]_0^d$ は一つの同値類とし, $(a_1,\dots,a_d),(a'_1,\dots,a'_d)\in[k]_0^d\setminus[k-1]_0^d$ が k 同値であるとは或る $1\le j\le d$ が存在して

$$a_1=a'_1,\ \dots,\ a_{j-1}=a'_{j-1},\ a_j=a'_j=k,\quad (a_{j+1},\dots,a_d),(a'_{j+1},\dots,a'_d)\in[k-1]_0^{d-j}$$

が成り立つことである.

定理 2.6 (Graham–Rothschild)**.** 任意の正の整数 k,d,m に対して, 正の整数 $N_{\mathrm{GR}}(k,d,m)$ が存在して次が成り立つ : 任意の m 色塗り分け $c\colon[N_{\mathrm{GR}}(k,d,m)]\to[m]$ に対して $b+\sum_{i=1}^d kr_i\le N_{\mathrm{GR}}(k,d,m)$ を満たすような $b,r_1,\dots,r_d\in\mathbb{N}$ が存在して, $[k]_0^d$ の k 同値に関する任意の同値類 A に対して

$$b+\sum_{i=1}^d a_ir_i,\quad (a_1,\dots,a_d)\in A$$

は c に関して同じ色で塗られている.

k,d を固定したときに, 任意の m に対する定理 2.6 の主張を $\mathrm{GR}(k,d)$ と表すことにする. 任意の k,d に対して $\mathrm{GR}(k,d)$ が成立することを二重帰納法で証明する.

定理 2.6 $\Longrightarrow$ 定理 2.1 の証明. $\mathrm{GR}(k,1)$ が成り立つとき, $N_{\mathrm{vdW}}(k,m):=N_{\mathrm{GR}}(k,1,m)$ とすることができる. 実際, $[k-1]_0$ が k 同値に関する一つの同値類をなしていることから, 定理 2.6 によって存在する $b+jr_1,(0\le j\le k-1)$ は長さ k の同色等差数列をなしている. □

定理 2.6 の証明. 任意の d に対して $\mathrm{GR}(1,d)$ が成立することは $[1]_0^d$ の任意の元が互いに 1 同値でないことからわかる. k を固定する. 以下, 任意の d に対して $\mathrm{GR}(k,d)$ が成り立つと仮定する. m を任意にとる. このとき, $N_{\mathrm{GR}}(k+1,1,m):=2N_{\mathrm{GR}}(k,m,m)$ とおける. 実際, m 色塗り分け $c\colon[2N_{\mathrm{GR}}(k,m,m)]\to[m]$ をとるとき, $\mathrm{GR}(k,m)$ より $b+\sum_{i=1}^m kr_i\le N_{\mathrm{GR}}(k,m,m)$ を満たすような $b,r_1,\dots,r_m\in\mathbb{N}$ が存在して, $[k]_0^m$ の k 同値に関する任意の同値類 A に対して

$$b+\sum_{i=1}^m a_ir_i,\quad (a_1,\dots,a_m)\in A \tag{2.2}$$

は c に関して同色である. ここで, 鳩の巣原理により

$$c\left(b+\sum_{i=1}^u kr_i\right)=c\left(b+\sum_{i=1}^v kr_i\right) \tag{2.3}$$

が成り立つような $0\le u<v\le m$ が存在する. このとき,

$$b+\sum_{i=1}^u kr_i+j\sum_{i=u+1}^v r_i,\quad 0\le j\le k$$

は c に関して同色である. というのも, $0\le j\le k-1$ のときは

$$(\underbrace{k,\dots,k}_{u},\underbrace{j,\dots,j}_{v-u+1},0,\dots,0),\quad 0\le j\le k-1$$

という元達が互いに k 同値であることから (2.2) より同色であることが従い,

$$a+\sum_{i=1}^{u} kr_i + k\sum_{i=u+1}^{v} r_i$$

も同じ色であることは (2.3) から従う.

$$b+\sum_{i=1}^{u} kr_i + (k+1)\sum_{i=u+1}^{v} r_i \le 2N_{\mathrm{GR}}(k,m,m)$$

なので, $\mathrm{GR}(k+1,1)$ が成立することが示された.

よって, 後は $\mathrm{GR}(k+1,d)$ が成り立つと仮定して $\mathrm{GR}(k+1,d+1)$ が成り立つことを示せばよい. $N_1 := N_{\mathrm{GR}}(k+1,d,m)$, $N_2 := N_{\mathrm{GR}}(k+1,1,m^{N_1})$ とおく. このとき, $N_{\mathrm{GR}}(k+1,d+1,m) = N := N_1N_2$ ととれることを示す. N の m 色塗り分け $c\colon [N]\to[m]$ を任意にとって固定する. $[N]$ を N_2 個の区間 $[N_1]+(h-1)N_1, (h=1,\dots,N_2)$ に分割する. 別の塗り分け写像

$$\begin{aligned} c'\colon [N_2] &\to [m]^{N_1} \\ h &\mapsto (c(1+(h-1)N_1), c(2+(h-1)N_1), \dots, c(N_1+(h-1)N_1)) \end{aligned}$$

を考える. 全単射 $[m]^{N_1}\simeq[m^{N_1}]$ があるので, これは m^{N_1} 色塗り分けである. よって, N_2 の定義から $a'+(k+1)r'\le N_2$ であるような $a',r'\in\mathbb{N}$ が存在して, $a'+jr', (0\le j\le k)$ は c' に関して同色である. つまり, $1\le l\le N_1$ を固定すると,

$$l+(a'+jr'-1)N_1 = (a'-1)N_1 + l + jr'N_1, \quad 0\le j\le k \tag{2.4}$$

は c に関して同色である. また, 定理 2.6 も平行移動の原理を満たすので, N_1 の定義より区間 $[N_1]+(a'-1)N_1$ に対して $\mathrm{GR}(k+1,d)$ を適用することによって,

$$(a'-1)N_1+1 \le b+\sum_{i=1}^{d} a_ir_i \le a'N_1, \quad (a_1,\dots,a_d)\in[k+1]_0^d \tag{2.5}$$

を満たすような $b,r_1,\dots,r_d\in\mathbb{N}$ が存在して, $[k+1]_0^d$ の $k+1$ 同値に関する任意の同値類 A に対して

$$b+\sum_{i=1}^{d} a_ir_i, \quad (a_1,\dots,a_d)\in A \tag{2.6}$$

は c に関して同色である. このとき,

$$b+\sum_{i=1}^{d}(k+1)r_i + (k+1)r'N_1 \le a'N_1 + (k+1)r'N_1 \le N_1N_2 = N$$

であることに注意して, $[k+1]_0^{d+1}$ の $k+1$ 同値に関する任意の同値類 A' に対して

$$b+\sum_{i=1}^{d} a_ir_i + a_{d+1}r'N_1, \quad (a_1,\dots,a_d,a_{d+1})\in A'$$

が c に関して同色であることを確認する．A' は $[k+1]_0^d$ の $k+1$ 同値に関する同値類 A を用いて $A' = A \times [k]_0$ と表されるか, $d+1$ 成分が $k+1$ であるような一元集合である．後者の場合は自明なので, 前者の場合を考える．$(a_1, \ldots, a_d) \in A$ を固定するとき, (2.4) と (2.5) より

$$b + \sum_{i=1}^{d} a_i r_i + a_{d+1} r' N_1, \quad 0 \leq a_{d+1} \leq k$$

は c に関して同色である．これと, (2.6) を合わせると, $(a_1, \ldots, a_d) \in A$ を動かしても同色であることがわかる．以上により $\mathrm{GR}(k+1, d+1)$ が成立することが示された． □

定理 2.1 の証明を二通り解説したが, どちらの証明も非常に似た構造をしていることが読み取れたことと思う．どちらかと言えば命題 2.4 は定理 2.1 を証明するために拵えられたものであって, それ自体が (論文の主定理となるような) 味わい深い主張というわけではない[5]．一方で, 定理 2.6 は定理 2.1 の高次元化を与えていて, それ自体が興味深い定理である．つまり, §2.2 の証明は定理 2.1 の直接的証明を与えており, §2.3 は定理 2.1 の一般化を与えていると言える．にも関わらず, §2.3 の証明が従来知られていた証明に比べてむしろ短くなっているが, 一般化すると証明が簡単になるという数学でしばしば見られる現象の例の一つになっている．これは, 定理 2.1 が二重帰納的な方法を用いなければ証明できないことに起因しているのではないかと思う．

[5]鳩の巣原理の議論によって数学的には定理 2.1 と同値であるが, 一見すると主張は定理 2.1 より弱く見える．ただし, この命題の論法 (ダイコトミーによる証明) は §5.10 以降で重要な役割を果たすことになる．

第3章　Rothの定理

3.1　k-Erdős–Turán数列

定義 3.1. $k, N \in \mathbb{N}$ とする. 長さ k の等差数列を含まないような $[N]$ に含まれる狭義単調増加数列のことを N に関する k-Erdős–Turán 数列 (k-ET 数列) と呼ぶ. N に関する k-ET 数列として取り得る最大項数を $r_k(N)$ と定義する.

簡単な基本性質を幾つか述べておく.

補題 3.2. $1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_n \leq N$ なる整数列 $\{a_i\}_{i=1}^n$ が N に関する k-ET 数列であるとき, $N+1-a_n < N+1-a_{n-1} < \cdots < N+1-a_1$ の n 個の整数からなる数列も N に関する k-ET 数列である. また, $b < a_1$ なる任意の正整数 b に対して, $a_1 - b < a_2 - b < \cdots < a_n - b$ の n 個の整数からなる数列は $N-b$ に関する k-ET 数列である.

証明. 容易に分かる. □

補題 3.3. $r, b, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$ とする. このとき, $b + ra_1, \ldots, b + ra_n$ が (或る N_1 に関する)k-ET 数列であることと, $a_1, \ldots, a_n$ が (或る N_2 に関する)k-ET 数列であることは同値である.

証明. 容易に分かる. □

補題 3.4. $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ に対して, 不等式 $r_k(N_1 + N_2) \leq r_k(N_1) + r_k(N_2)$ が成り立つ.

証明. $1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_n \leq N_1 + N_2$ を満たすような $N_1 + N_2$ に関する k-ET 数列 $\{a_i\}_{i=1}^n$ を任意にとる. このとき,

$$1 \leq a_1 < \cdots < a_j \leq N_1 < a_{j+1} < \cdots < a_n \leq N_1 + N_2$$

を満たすような $j \leq n$ が一意的に定まる. すると, $\{a_i\}_{i=1}^j$ は N_1 に関する k-ET 数列なので $j \leq r_k(N_1)$ が成り立つ. また, 補題 3.2 より

$$a_{j+1} - N_1 < a_{j+2} - N_1 < \cdots < a_n - N_1 \leq N_2$$

から N_2 に関する k-ET 数列 $\{a_{j+i} - N_1\}_{i=1}^{n-j}$ が得られるので, $n - j \leq r_k(N_2)$ が成り立つ. 以上によって,

$$n = j + (n - j) \leq r_k(N_1) + r_k(N_2)$$

が得られた. 最初にとった k-ET 数列は任意であったので, これは $r_k(N_1 + N_2) \leq r_k(N_1) + r_k(N_2)$ を示している. □

$r_k(N)$ を用いて Szemerédi の定理 (定理 1.7) を言い換えることができるが, まず有限版 Szemerédi の定理を述べる[6].

定理 3.5 (有限版 Szemerédi の定理)**.** k を正整数, δ を $0 < \delta \le 1$ を満たすような実数とする. このとき, 或る正整数 $N_{\mathrm{SZ}}(k, \delta)$ が存在して次が成り立つ : $N \ge N_{\mathrm{SZ}}(k, \delta)$ なる任意の整数 N に対して, $[N]$ の部分集合 A であって $\# A \ge \delta N$ を満たすものは長さ k の等差数列を含む.

補題 3.6. 定理 1.7 と定理 3.5 は同値である.

証明. 定理 3.5 が成り立つと仮定し, $A \subset \mathbb{N}$ の上漸近密度が $\overline{d}(A) = \delta > 0$ であったとする. このとき, 任意の正整数 k に対して或る整数 $N \ge N_{\mathrm{SZ}}(k, \delta/2)$ が存在して

$$\#\{A \cap [N]\} \ge \frac{\delta}{2} N$$

が成り立つので, 定理 3.5 より $A \supset A \cap [N]$ は長さ k の等差数列を含む. k は任意であったので A は任意の長さの等差数列を含む.

次に定理 1.7 が成り立つと仮定し, 定理 3.5 を背理法で証明する. すなわち, $k \in \mathbb{N}, \delta > 0$, 狭義単調増大整数列 $\{N_i\}_{i=1}^{\infty}$, $i \in \mathbb{N}$ 毎に有限集合 $A_i \subset [N_i]$ であって $\# A_i \ge \delta N_i$ が成り立ち, A_i は長さ k の等差数列を含まないようなものが存在すると仮定する. $N_{n_i+1} \ge 3N_{n_i}$ が成り立つような番号の列 $n_1 < n_2 < \cdots$ をとる. $h_i := \sum_{j=1}^{i-1} N_{n_j} (h_1 := 0)$ とし, 集合 $A \subset \mathbb{N}$ を

$$A := \bigsqcup_{i=1}^{\infty} (A_{n_i} + h_i)$$

と定義する. h_i の定義よりこれは確かに非交差和となっている. 各 $i \ge 1$ に対して

$$\frac{\#\{A \cap [h_{i+1}]\}}{h_{i+1}} = \frac{\# A_{n_1} + \# A_{n_2} + \cdots + \# A_{n_i}}{h_{i+1}} \ge \frac{\delta N_{n_1} + \delta N_{n_2} + \cdots + \delta N_{n_i}}{h_{i+1}} = \delta$$

となっていることから $\overline{d}(A) \ge \delta$ が分かる. 従って, 定理 1.7 より A は任意の長さの等差数列を含む. 特に長さ $3k$ の等差数列 $a + jr (0 \le j < 3k)$ を含む. ここで,

$$h_l \le a + (3k-1)r < h_{l+1}$$

であるような l をとる. $a + (3k-1)r < h_2 = N_{n_1}$ であれば A_{n_1} が長さ k の等差数列を含まないという仮定に反するので $l \ge 2$ である. もし $a + 2kr > h_l$ であれば, A の定義によって $A_{n_l} + h_l$ は

$$a + 2kr,\ a + 2kr + r,\ \ldots,\ a + 2kr + (k-1)r = a + (3k-1)r$$

を含むことになって, A_{n_l} が長さ k の等差数列を含まないという仮定に反する. よって, $a + 2kr \le h_l$ である. $\{n_i\}$ の取り方から $h_l > 3h_{l-1}$ なので

$$a + kr \ge \frac{1}{3}(a + (3k-1)r) \ge \frac{1}{3} h_l > h_{l-1}$$

[6] 予想 1.2 が定理 2.1 と同値であることの類似.

を得る．これは A の定義によって $A_{n_{l-1}} + h_{l-1}$ が

$$a+kr,\ a+kr+r,\ \ldots,\ a+kr+kr=a+2kr$$

を含むことを意味し, $A_{n_{l-1}}$ が長さ k の等差数列を含まないという仮定に矛盾する． □

Szemerédi の定理は $r_k(N)$ を用いて表される次の定理と同値である．

定理 3.7. k を正整数とする．このとき, $r_k(N) = o_k(N), \quad N \to \infty$ が成り立つ．

定理 1.7 $\Longleftrightarrow$ 定理 3.7 の証明. 定理 3.7 が成り立つと仮定し, $A \subset \mathbb{N}$ の上漸近密度が $\overline{d}(A) = \delta > 0$ であったとする．仮定より任意の正整数 k に対して k, δ に依存する正整数 $N(k,\delta)$ が存在して, $N \geq N(k,\delta)$ であれば $r_k(N) < \frac{\delta}{2}N$ が成り立つ．また, $N \geq N(k,\delta)$ なる正整数であって $\#\{A \cap [N]\} \geq \frac{\delta}{2}N$ が成り立つようなものが存在する．この N に対して $\#\{A \cap [N]\} > r_k(N)$ なので, $A \cap [N]$ の元から構成される数列は k-ET 数列ではない．すなわち, A は長さ k の等差数列を含む．

定理 1.7 が成り立つと仮定すると, 補題 3.6 より定理 3.5 が成り立つ．k を正整数とする．任意に $\varepsilon > 0$ をとる．このとき, $N \geq N_{\mathrm{SZ}}(k,\varepsilon)$ なる N に対して, $[N]$ に関する k-ET 数列から構成される集合 A は $\#A < \varepsilon N$ を満たす必要があるため, $r_k(N) \leq \varepsilon N$ である．これは $r_k(N) = o_k(N),\ N \to \infty$ を意味する． □

3.2 Erdős–Turán による評価

Erdős–Turán は [1] において $r_3(N)$ に関する評価式を幾つか証明した．この節でそれらの結果を解説する．

補題 3.8. $r_3(8) = 4$.

証明. $r_3(8) \geq 5$ であると仮定すると, 項数 5 の 8 に関する 3-ET 数列が存在する．それは 1 から 4 または 5 から 8 のいずれかの数を三つ含む．必要ならば補題 3.2 を用いることによって 1 から 4 の数を三つ含むと仮定してよい[7]．また, 1 を含むとしてもよい．$1,2,3$ の三つを含むことはないので, $1,2,4$ または $1,3,4$ を含む．$1,2,4$ を含むとき, $1,4,7$ が等差数列なので 7 を含まない．$2,4,6$ が等差数列なので 6 も含まない．よって, 考えている数列は $1,2,4,6,8$ ということになるが, $4,6,8$ は等差数列なので矛盾．$1,3,4$ を含むときも同様である．従って, $r_3(8) \leq 4$ が示されたが, $1,2,4,5$ は 3-ET 数列であるので $r_3(8) = 4$ が確定する． □

補題 3.9. $r_3(10) = 5$.

証明. $r_3(10) \geq 6$ であると仮定すると, 項数 6 の 10 に関する 3-ET 数列が存在する．$r_3(8) = 4$ であることを考慮すると, そのような数列は必ず $9, 10$ を含む．よって, 補題 3.2 より $1, 2$ を含むと仮定してよい．つまり, $1,2,9,10$ を含む．すると, $3,5,6,8$ を含むことはできない

[7] この言い回しはそのような項数 5 の 8 に関する 3-ET 数列が存在し, 以後その数列を考察するという意味．以下同様．

ので, 考えている 3-ET 数列は $1, 2, 4, 7, 9, 10$ ということになるが, $1, 4, 7$ が等差数列をなすため矛盾. 従って, $r_3(10) \leq 5$ が示されたが, $1, 2, 4, 9, 10$ は 3-ET 数列であるので $r_3(10) = 5$ が確定する. □

補題 3.10. $r_3(12) = 6$.

証明. $r_3(12) \geq 7$ であると仮定すると, 項数 7 の 12 に関する 3-ET 数列が存在する. $r_3(10) = 5$ であることを考慮すると, そのような数列は必ず $11, 12$ を含む. よって, 補題 3.2 より $1, 2$ を含むと仮定してよい. つまり, $1, 2, 11, 12$ を含む. $r_3(8) = 4$ を考慮すると 9 を含む必要があり, 補題 3.2 より $1, 2, 4, 9, 11, 12$ を含むとしてよい. これは 3-ET 数列であり, あと一つどの数を入れても等差数列が出来てしまうため $r_3(12) = 6$ が確定する. □

補題 3.11. $r_3(14) = 8$.

証明. $r_3(12) = 6$ より $r_3(14) \leq 8$. 一方, $1, 2, 4, 5, 10, 11, 13, 14$ は 3-ET 数列である. □

補題 3.12. $r_3(16) = 8$.

証明. 補題 3.4 より $r_3(16) \leq r_3(8) + r_3(8) = 8$. 一方, $r_3(16) \geq r_3(14) = 8$. □

以上の準備のもと次が証明できる:

定理 3.13. $N \geq 4$ かつ $N \neq 7$ であれば $r_3(2N) \leq N$ が成り立つ.

証明. 補題 3.4 より $r_3(18) \leq r_3(8) + r_3(10) = 9$, $r_3(20) \leq r_3(8) + r_3(12) = 10$, $r_3(22) \leq r_3(10) + r_3(12) = 11$ である. あとは $N \geq 12$ の場合に数学的帰納法で証明する. $N - 4$ で成立すると仮定すると, 補題 3.4 より

$$r_3(2N) \leq r_3(2N - 8) + r_3(8) \leq N - 4 + 4 = N$$

と N の場合も成立することがわかる. □

3.3 Dirichlet の近似定理

証明で利用するため, Dirichlet の近似定理として古典的に知られている補題をここで示しておく.

補題 3.14. α を実数とする. このとき, 任意の正整数 n に対して整数 q, h が存在して, $0 < q \leq n$ および

$$|q\alpha - h| < \frac{1}{n}$$

が成り立つ.

証明. 半開区間 $[0,1)$ を

$$\left[0, \frac{1}{n}\right) \cup \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right) \cup \cdots \cup \left[\frac{n-1}{n}, 1\right)$$

と分ける. $\{i\alpha\} := i\alpha - \lfloor i\alpha \rfloor,\ (i = 0, 1, \ldots, n)$ を考える. このとき, 鳩の巣原理から $i > j$ が存在して, $\{i\alpha\}$ と $\{j\alpha\}$ は同じ小区間に属する. すなわち, $0 < i - j \leq n$ および

$$|\{i\alpha\} - \{j\alpha\}| < \frac{1}{n}, \quad |(i-j)\alpha - (\lfloor i\alpha \rfloor - \lfloor j\alpha \rfloor)| < \frac{1}{n}$$

が成り立つ. よって, $q := i - j,\ h := \lfloor i\alpha \rfloor - \lfloor j\alpha \rfloor$ とすればよい. □

3.4 指数和の評価 I

3.5 指数和の評価 II

3.6 Hardy–Littlewood の円周法

3.7 Roth の定理の証明の完結

第4章　Szemerédiの定理

4.1　Banach上漸近密度

定義 4.1. 集合 $A \subset \mathbb{Z}$ の Banach 上漸近密度 $\overline{bd}(A)$ を

$$\overline{bd}(A) := \limsup_{N\to\infty} \max_{h\in\mathbb{Z}} \frac{\#\{A \cap ([N]+h)\}}{N}$$

と定義する.

$A \subset \mathbb{N}$ に対して $\overline{bd}(A) \geq \overline{d}(A)$ が成り立つが, 一般に等号は成立しない[8]. Szemerédi の定理 (定理 1.7) は Banach 上漸近密度に対しても成立する.

定理 4.2. $A \subset \mathbb{N}$ の Banach 上漸近密度が正であれば, A は任意の長さの等差数列を含む.

補題 4.3. 定理 1.7 と定理 4.2 は同値である.

証明. 密度の不等式関係から定理 4.2 $\Longrightarrow$ 定理 1.7 は自明に成り立つ. 定理 1.7 が成り立つと仮定すると, 補題 3.6 より定理 3.5 が成り立つ. $A \subset \mathbb{N}$ を $\overline{bd}(A) = \delta > 0$ を満たすような集合とする. 正整数 k を任意にとる. このとき, Banach 上漸近密度の定義より

$$\max_{h\in\mathbb{Z}} \#\{A \cap ([N]+h)\} \geq \frac{\delta}{2}N$$

を満たすような整数 $N \geq N_{\mathrm{SZ}}(k, \delta/2)$ が存在する.

$$\#\{A \cap ([N]+h)\} \geq \frac{\delta}{2}N$$

が成り立つような $h \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ をとる. すると,

$$\#\{(A-h) \cap [N]\} \geq \frac{\delta}{2}N$$

が成り立つので, 定理 3.5 より $(A-h) \cap [N]$ は長さ k の等差数列を含む. このとき, A も長さ k の等差数列を含む[9]. □

[8] $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}([n^3, n^3+n] \cap \mathbb{Z})$ とすれば, $\overline{d}(A) = 0$ かつ $\overline{bd}(A) = 1$ が成り立つ.
[9] §2.2 の平行移動の原理と同様のことが有限版 Szemerédi の定理に対しても成り立つ.

第5章　函数版Szemerédiの定理

5.1　函数の期待値

5.2　$\mathbb{F}_N$ 上の σ 加法族

5.3　函数版Szemerédiの定理への言い換え

5.4　ランダム性と構造

5.5　Gowersノルム

5.6　ランダム部分除去定理I

5.7　一様概周期ノルム

5.8　ノルムの相関性

5.9　コンパクトな σ 加法族I

5.10　エネルギー増加法I

5.11　構造定理I

5.12　van der Waerdenの定理の応用

5.13　構造化部分に対するSzemerédiの定理の証明

第6章　擬ランダム測度に対するSzemerédiの定理

6.1　素数版Szemerédiの定理とW-トリック

6.2　擬ランダム測度

6.3　ランダム部分除去定理II

6.4　反Gowersノルム

6.5　コンパクトなσ加法族II

6.6　エネルギー増加法II

6.7　構造定理II

6.8　定理??の証明

第7章　素数定理

7.1　Riemann ゼータ函数と Dirichlet の L 函数

7.2　解析的性質

7.3　素数定理の主張

定理 7.1 (素数定理)**.**

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}.$$

定義 7.2. Chebyshev 関数 $\vartheta(x)$ を正の実数 x に対して

$$\vartheta(x) := \sum_{p \leq x} \log p$$

で定義する.

補題 7.3. 任意の $0 < \varepsilon < 1$ に対して, 不等式

$$\begin{aligned} &\frac{\pi(x)\log x}{x} \geq \frac{\vartheta(x)}{x} \geq (1-\varepsilon)\frac{\pi(x)\log x}{x} - \frac{(1-\varepsilon)\log x}{x^{\varepsilon}} \\ &\frac{\vartheta(x)}{x} \leq \frac{\pi(x)\log x}{x} \leq \frac{1}{1-\varepsilon}\frac{\vartheta(x)}{x} + \frac{\log x}{x^{\varepsilon}} \end{aligned}$$

が成り立つ.

証明. 定義より

$$\vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \log p \leq \sum_{p \leq x} \log x = \pi(x)\log x.$$

一方, 任意に $0 < \varepsilon < 1$ をとると

$$\begin{aligned} \vartheta(x) &\geq \sum_{x^{1-\varepsilon} < p \leq x} \log p \geq \sum_{x^{1-\varepsilon} < p \leq x} (1-\varepsilon)\log x = (1-\varepsilon)(\log x)(\pi(x) - \pi(x^{1-\varepsilon})) \\ &\geq (1-\varepsilon)(\log x)(\pi(x) - x^{1-\varepsilon}) \end{aligned}$$

と評価できるので, 所望の不等式が得られる. □

素数定理は次と同値である:

定理 7.4.

$$\vartheta(x) \sim x.$$

定理 7.1 $\iff$ 定理 7.4. 補題 7.3 より定理 7.1 が成り立つと仮定すると

$$1 \geq \limsup_{x\to\infty} \frac{\vartheta(x)}{x} \geq \liminf_{x\to\infty} \frac{\vartheta(x)}{x} \geq 1-\varepsilon$$

が得られ, $0<\varepsilon<1$ の任意性から定理 7.4 が成立する．逆も同様である． □

7.4 Chebyshev の定理

この節では素数定理より弱い次の事実を証明する．

命題 7.5 (Chybyshev)**.**

$$\pi(x) = O\left(\frac{x}{\log x}\right), \quad x \to \infty.$$

この命題は素数定理の証明で必要となる．また, この命題を用いると素数の $\mathbb{N}$ における密度が零であることが従う:

系 7.6 (Legendre)**.**

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x} = 0.$$

補題 7.7. 実数 $x \geq 3$ に対して

$$\prod_{p\leq x} p < 2^{2x-3}$$

が成り立つ．

証明. x が整数 n である場合に証明すれば十分である．二項係数 $\binom{2n-1}{n}$ は $n+1 \leq p \leq 2n-1$ なる全ての素数 p で割り切れるような整数であるため, $(1+1)^{2n-1}$ の展開を考えると

$$\frac{\prod_{p\leq 2n-1} p}{\prod_{p\leq n} p} \leq \binom{2n-1}{n} < 2^{2n-2} \tag{7.1}$$

という不等式が得られる．補題の主張を n に関する数学的帰納法で証明する．$n=3,4$ の場合は直接確認できる．n より小さい場合には成立すると仮定する．$n=2m-1$ が奇数のとき $(m\geq 3)$, (7.1) と帰納法の仮定より

$$\prod_{p\leq n} p = \prod_{p\leq 2m-1} p < 2^{2m-2} \prod_{p\leq m} p < 2^{2m-2}2^{2m-3} = 2^{4m-5} = 2^{2n-3}$$

となって n のときも成立することがわかる．$n=2m$ が偶数のときも $(m\geq 2)$, 帰納法の仮定より

$$\prod_{p\leq n} p = \prod_{p\leq 2m} p = \prod_{p\leq 2m-1} p < 2^{4m-5} < 2^{4m-3} = 2^{2n-3}$$

となって成立する． □

命題 7.5 の証明. 補題 7.7 で対数をとることにより $x \geq 3$ において $\vartheta(x) < (2x-3)\log 2$ が成り立つので, 補題 7.3 より

$$\frac{\pi(x)\log x}{x} < 2\left(2-\frac{3}{x}\right)\log 2 + \frac{\log x}{\sqrt{x}}$$

と評価できるので主張が成立する. □

7.5 Newman–Zagier による素数定理の証明

7.6 算術級数の素数定理

7.7 古典的非零領域

第8章　Green–Tao測度

8.1　Green–Tao測度の構成

8.2　定理??の証明

8.3　線形形式条件とGoldston–Yıldırım型定理A

8.4　相関条件とGoldston–Yıldırım型定理B

8.5　Goldston–Yıldırım型定理Aの証明

8.6　Goldston–Yıldırım型定理Bの証明

8.7　積分の漸近評価

第9章　発展と展望

9.1　多次元版 Szemerédi の定理

9.2　Gauss 素数と星座

9.3　素数版多次元 Szemerédi の定理

9.4　Erdős–Turán 予想

付 録A Hilbert空間

A.1 Besselの不等式

A.2 最短距離定理

付 録B　測度論

B.1　基本用語

B.2　Markov の不等式

B.3　Chybyshev の不等式

付 録C　Weierstrassの多項式近似定理

C.1　実閉区間の場合

定理 C.1 (Weierstrass の多項式近似定理)**.** *$a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ とし, f を閉区間 $[a, b]$ 上定義された実数値連続函数とする. このとき, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して多項式 $P_\varepsilon(x)$ が存在して*

$$|f(x) - P_\varepsilon(x)| < \varepsilon$$

が任意の $x \in [a, b]$ に対して成り立つ.

証明のための若干の準備を行う.

補題 C.2. *非負整数 n に対して, 次の三つの多項式の恒等式が成立する:*

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j (1-x)^{n-j} = 1, \tag{C.1}$$

$$\sum_{j=0}^{n} j \binom{n}{j} x^j (1-x)^{n-j} = nx, \tag{C.2}$$

$$\sum_{j=0}^{n} j(j-1) \binom{n}{j} x^j (1-x)^{n-j} = n(n-1)x^2. \tag{C.3}$$

証明. (C.1) は

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j (1-x)^{n-j} = \{x + (1-x)\}^n = 1$$

と示される. (C.2), (C.3) は $n = 0$ の場合は自明に成立するので, $n \geq 1$ とする. (C.2) は

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n} j \binom{n}{j} x^j (1-x)^{n-j} &= \sum_{j=1}^{n} j \binom{n}{j} x^j (1-x)^{n-j} \\
&= nx \sum_{j=1}^{n} \binom{n-1}{j-1} x^{j-1} (1-x)^{n-1-(j-1)} \\
&= nx \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} x^j (1-x)^{n-1-j} = nx
\end{aligned}$$

と (C.1) を使うことによって示され, (C.3) は

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n} j(j-1)\binom{n}{j}x^j(1-x)^{n-j} &= \sum_{j=1}^{n} j(j-1)\binom{n}{j}x^j(1-x)^{n-j}\\ &= nx\sum_{j=1}^{n}(j-1)\binom{n-1}{j-1}x^{j-1}(1-x)^{n-1-(j-1)}\\ &= nx\sum_{j=0}^{n-1} j\binom{n-1}{j}x^j(1-x)^{n-1-j}\\ &= nx(n-1)x = n(n-1)x^2\end{aligned}$$

と (C.2) を使うことによって証明できる. □

補題 C.2 より,

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n}(j-nx)^2\binom{n}{j}x^j(1-x)^{n-j} &= n(n-1)x^2 + (1-2nx)nx + n^2x^2\\ &= -nx^2 + nx = nx(1-x)\end{aligned} \tag{C.4}$$

が得られる.

定理 C.1 の証明. f が $[a,b]$ 上で定義されているとき, $g(x) := f(a+(b-a)x)$ とすれば g は $[0,1]$ 上で定義された連続函数となるので, この g に対する近似多項式 $P_\varepsilon(x)$ の存在が証明できていれば, $x \in [a,b]$ に対して

$$\left|f(x) - P_\varepsilon\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\right| = \left|f\left(a+(b-a)\frac{x-a}{b-a}\right) - P_\varepsilon\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\right| < \varepsilon$$

が成り立ち, f についても近似多項式が存在することがわかる. 従って, f は $[0,1]$ 上定義されていると仮定してよい. このとき, 正整数 n に対して f に付随する n 次 Bernstein 多項式 $B_n(f;x)$ を

$$B_n(f;x) := \sum_{j=0}^{n} f\left(\frac{j}{n}\right)\binom{n}{j}x^j(1-x)^{n-j}$$

と定義する. $\varepsilon > 0$ は任意にとって固定し, x は $[0,1]$ の元として考える. (C.1) より

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x)\binom{n}{j}x^j(1-x)^{n-j}$$

なので,

$$|f(x) - B_n(f;x)| \le \sum_{j=0}^{n}\left|f(x) - f\left(\frac{j}{n}\right)\right|\binom{n}{j}x^j(1-x)^{n-j}$$

を得る．f は閉区間 $[0,1]$ で連続のため, 一様連続である．すなわち, 或る $\delta > 0$ が存在して, $|x-y| \leq \delta, x, y \in [0,1]$ であれば $|f(x)-f(y)| \leq \varepsilon/2$ が成り立つ．$M := \max_{x\in[0,1]} |f(x)|$ とする (f が連続なので存在する)．$|x-j/n| > \delta$ の場合は

$$\left| f(x) - f\left(\frac{j}{n}\right) \right| \leq \frac{\left| x - \frac{j}{n} \right|^2}{\delta^2} \cdot 2M = \frac{2M(j-nx)^2}{n^2\delta^2}$$

が成り立つ．よって, (C.4) と $\max_{x\in[0,1]} x(1-x) = 1/4$ より

$$\begin{aligned}
|f(x) - B_n(f;x)| &\leq \sum_{\left|x-\frac{j}{n}\right| \leq \delta} \frac{\varepsilon}{2} \binom{n}{j} x^j (1-x)^{n-j} + \sum_{\left|x-\frac{j}{n}\right| > \delta} \frac{2M(j-nx)^2}{n^2\delta^2} \binom{n}{j} x^j (1-x)^{n-j} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{n^2\delta^2} \sum_{j=0}^{n} (j-nx)^2 \binom{n}{j} x^j (1-x)^{n-j} \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{n^2\delta^2} nx(1-x) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{M}{2n\delta^2}
\end{aligned}$$

と変形でき, 十分大きい n をとれば

$$|f(x) - B_n(f;x)| < \varepsilon$$

が成り立つことが示された．　□

C.2　Stone–Weierstrass の定理

付 録 D　Ascoli–Arzelàの定理

付 録E　数論的函数

E.1 Möbius函数

E.2 函数$d(n)$

E.3 函数$\omega(n)$

参考文献

[1] P. Erdős, P. Turán, *On some sequences of integers*, J. London Math. Soc. **11** (4), (1936), 261–264.

[2] H. Furstenberg, *Ergodic behavior of diagonal measures and a theorem of Szemerédi on arithmetic progressions*, J. Analyse Math. **31** (1977), 204–256.

[3] T. Gowers, *A new proof of Szemerédi's theorem*, Geom. Funct. Anal. **11** (3), (2001) 465–588.

[4] R. L. Graham, B. L. Rothschild, *A short proof of van der Waerden's theorem on arithmetic progressions*, Proc. American Math. Soc. **42** (2), (1974), 385–386.

[5] B. Green, T. Tao, *The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions*, Ann. of Math. **167** (2), (2008), 481–547.

[6] A. Y. Khinchin, 『数論の 3 つの真珠』, 蟹江幸博訳, 日本評論社, (2000).

[7] K. F. Roth, *On certain sets of integers*, J. London Math. Soc. **28** (1953), 245–252.

[8] S. Seki, INTEGERS, blog, `http://integers.hatenablog.com`.

[9] E. Szemerédi, *On sets of integers containing no four elements in arithmetic progression*, Acta Math. Acad. Sci. Hunger. **20** (1969), 89–104.

[10] E. Szemerédi, *On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression*, Acta Arith. **27** (1975), 299–345.

[11] T. Tao, *A quantitative ergodic theory proof of Szemerédi's theorem*, The electronic Journal of Combinatorics **13**, (2006), 1–49.

[12] T. Tao, *Szemerédi's proof of Szemerédi's theorem*, unpublished note.

[13] B. L. van der Waerden, *Beweis einer Baudetschen Vermutung*, Nieuw. Arch. Wisk. **15** (1927), 212–216.