수학 (가형)

1. 정답 : ⑤

   해설 : $\vec{a}=(1,3)\ \vec{b}=(5,-6)$에서
   $\vec{a}-\vec{b}=(1,3)-(5,-6)$
   $=(-4,9)$
   $\therefore$모든성분의합 $=5$

2. 정답 : ②

   해설 : $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{6x}-1}{\ln(1+3x)}$
   $\displaystyle=\lim_{x\to 0}\frac{e^{6x}-1}{6x}\times\frac{3x}{\ln(1+3x)}\times 2$
   $=2$

3. 정답 : ⑤

   해설 : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin x\,dx=[-2\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}}$
   $\displaystyle=-2\cos\frac{\pi}{2}+2\cos 0$
   $=2$

4. 정답 : ④

   해설 : $P(B^C)=1-P(B)=\dfrac{1}{3}$
   $\therefore P(B)=\dfrac{2}{3}$
   $P(A/B)=\dfrac{1}{2}$에서 사건 A,B가 독립이므로 $P(A)=\dfrac{1}{2}$
   $\therefore P(A)P(B)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}$

5. 정답 : ③

   해설 : 1,2,3,4,5에서 중복을 허락하여 네개를 택해 일렬로 나열하여
   만든 네자리의 자연수가 5의 배수인 경우의수는

   $$\underbrace{\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{5}}_{{}_5\pi_3}$$

   ${}_5\pi_3=5^3=125$

6. 정답 : ⑤

해설 : $f(x)=x^3+x+1$에서

$f(0)=1 \Leftrightarrow g(1)=0$

또한 $f'(x)=3x^2+1$

$g\{f(x)\}=x$ 이므로

$g'\{f(x)\}f'(x)=1$

$g'\{f(x)\}=\dfrac{1}{f'(x)}$

$x=0 : g'\{f(0)\}=\dfrac{1}{f'(0)}$

$g'(1)=\dfrac{1}{1}=1$

7. 정답 : ①

해설 : $P={}_3C_1(\frac{1}{6})^1(\frac{5}{6})^2$

$=3\times\frac{1}{6}\times\frac{25}{36}$

$=\frac{25}{72}$

8. 정답 : ①

해설 : $A(1,a,-6)$ $B(-3,2,b)$에서 $3:2$로 외분 한 점은 $\left(\frac{-9-2}{3-2},\frac{6-2a}{3-2},\frac{3b+12}{3-2}\right)$

x축 위의 점이므로 y,z좌표는 $6-2a=0,\ 3b+12=0$

$\therefore a=3,\ b=-4$

$\therefore a+b=-1$

9. 정답 : ②

해설 : $\int_1^e \ln\frac{x}{e}dx=\int_1^e(\ln x-1)dx=[xlnx-x-x]_1^e=2-e$

10. 정답 : ③

해설 : 위치 $x=t-\frac{2}{t},\ y=2t+\frac{1}{t}$

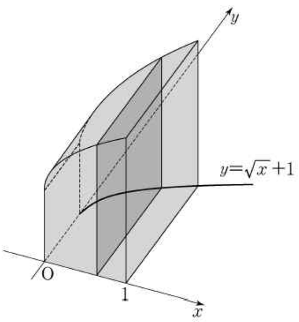
속도벡터 $(x',y')=\left(1+\frac{2}{t^2},\ 2-\frac{1}{t^2}\right)$

속력$=\sqrt{(x')^2+(y')^2}=\sqrt{\left(1+\frac{2}{t^2}\right)^2+\left(2-\frac{1}{t^2}\right)^2}$

$t=2$에서의 속력은 $=\sqrt{(1+2)^2+(2-1)^2}=\sqrt{10}$

11. 정답 : ④

해설 : 그림



단면의 넓이는 $s=(\sqrt{x}+1)^2$

부피는 $\int_0^1 s\,dx=\int_0^1(\sqrt{x}+1)^2dx=\frac{17}{6}$

12. 정답 : ④

해설 : $2x+2y-z+5=0$의 법선벡터 $\overrightarrow{h_1}=(2,\ 2,\ -1)$

xy평면의 법선벡터 $\overrightarrow{h_2}=(0,\ 0,\ 1)$

$2x+2y-z+5=0$와 xy평면이 이루는 각을 θ 라 하면

$\overrightarrow{h_1}\cdot\overrightarrow{h_2}=|\overrightarrow{h_1}||\overrightarrow{h_2}|\cos\theta$

$1=3\cdot 1\cos\theta$

$\therefore \cos\theta=\frac{1}{3}$

13. 정답 : ③

해설 : $N(0,\ 4^2),\ n=9$에서

$P(\overline{X}\geq 1)=P\left(z\geq\frac{1-0}{\frac{4}{\sqrt{9}}}\right)=P\left(z\geq\frac{3}{4}\right)$

$N(3,2^2),\ n=16$

$P(\overline{Y}\leq a)=P\left(z\leq\frac{a-3}{\frac{2}{\sqrt{16}}}\right)=P(z\leq 2(a-3))$

$\therefore -2(a-3)=\frac{3}{4}$

$\therefore a=\frac{21}{8}$

14. 정답 : ①

해설 : $\overline{PH}=Sin\theta$, $\overline{OH}=Cos\theta$

$\overline{AH}=1-Cos\theta$

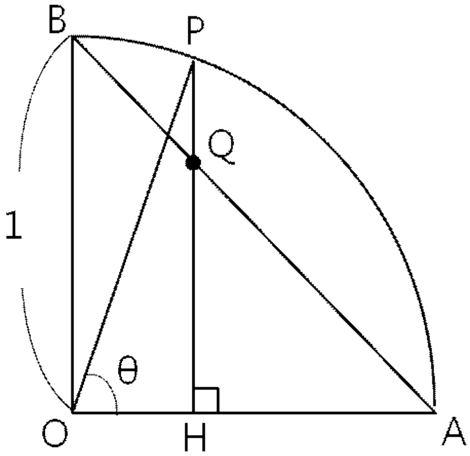
$\overline{HQ}=1-Cos\theta$

$S(\theta)=\frac{1}{2}\times(1-Cos)^2$

$\therefore \lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta^4}=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\frac{(1-Cos\theta)^2}{2}}{\theta^4}$

$\therefore \lim_{\theta\to 0+}\frac{(1-Cos\theta)^2\times(1+Cos\theta)^2}{2\theta^4\times(1+Cos\theta)^2}$

$\therefore \lim_{\theta\to 0+}\frac{Sin^4\theta}{2\theta^4\times(1+Cos\theta)^2}=\frac{1}{8}$



15. 정답 : ④

해설 : $y=2e^{-x}\Rightarrow y'=-2e^{-x}$

$x=t$

접선기울기 : $-2e^{-t}$

접선 : $y-2e^{-t}=-2e^{-t}(x-t)$

$\therefore y$절편 $=$ 점$B=2e^{-t}+2te^{-t}$

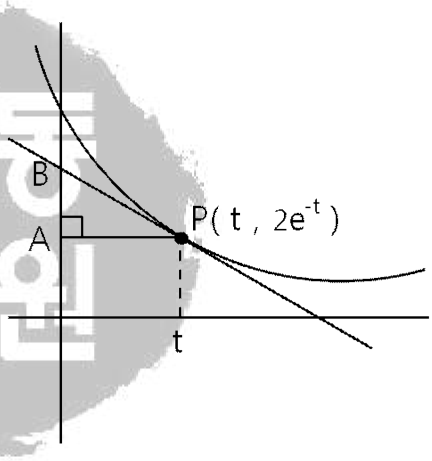
$\triangle APB$면적$(S)=\frac{1}{2}\times t\times 2te^{-t}=t^2\times e^{-t}$

$\therefore \frac{ds}{df}=2te^{-t}+t^2\times e^{-t}\times(-1)=0pot$

$\therefore e^{-t}(2t-t^2)=0$

$\therefore t=0,\ t=2\ \ (t>0)$이므로

$\therefore t=2$



16. 정답 : ②

해설 : ⅰ) $\overline{AB}=|\vec{b}-\vec{a}|^2=|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{a}|^2=2$

ⅱ) $\overline{BC}=|\vec{c}-\vec{b}|^2=|\vec{c}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{b}|^2=4$

ⅲ) $\overline{AC}=|\vec{c}-\vec{a}|^2=|c|^2-2\vec{a}\cdot\vec{c}+|\vec{a}|^2=4+\sqrt[2]{2}$

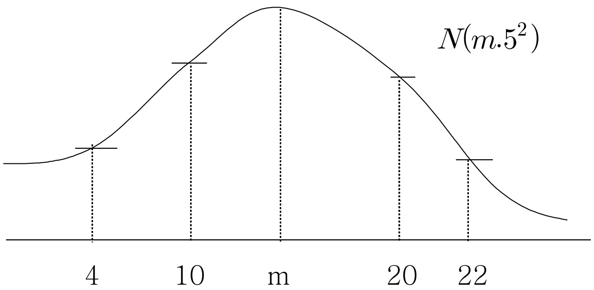
$\therefore \overline{AB}<\overline{BC}<\overline{AC}$

17. 정답 : ②

해설 : 나형 19번과 동일

18. 정답 : ③

해설 :



(가)에 의해 $\dfrac{10+20}{2} > m$ $\quad\therefore 13 < m < 14$인 자연수이므로

$m = 14$

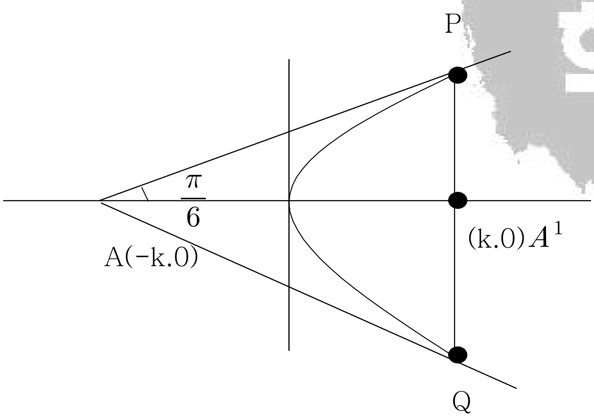
(나)에 의해 $\dfrac{4+22}{2} < m$ $\quad\therefore N(14.5^2)$

$\therefore P(17 \le X \le 18)$

$= (0.6 \le Z \le 0.8) = 0.288 - 0.226 = 0.062$

19. 정답 : ①

해설 :



점P의 x축으로 수선을 A^1라 하면, $A^1(k.o)$이다.

따라서 $\triangle AA^1P$는 $< A^1AP$가 $\dfrac{\pi}{6}$인 직각 삼각형이다.

$P(k, \sqrt{2kp})$이고 직선 AP의 방정식은

$y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}(x+k)$이다.

한편 $\overline{AA^1} : \overline{A^1P} = \sqrt{3} : 1$이므로

$2k : \sqrt[2]{kp} = \sqrt{3} : 1$이다.

$\therefore k = 3p$

$\therefore F|0.\sqrt{3p}|, F^1(0, -\sqrt{3p})$이고 $P(3P, \sqrt[2]{3P})$

이므로 타원의 정의에 의해

$12P + \sqrt[2]{3P} = \overline{FP} + \overline{FP} =$ 장축의 길이 $= 12 + \sqrt[4]{3}$

$\therefore P = 2$이고 $K = 6 \qquad \therefore P + K = 8$

20. 정답 : ⑤

해설 :

$f(x)=e^{-x}\int_0^x \sin(t^2)dt$

ㄱ. $f(\sqrt{\pi})=e^{\sqrt{\pi}}\int_0^x \sin(t^2)dt$이므로 $e^{\sqrt{\pi}}>0$이고 $\int_0^x \sin(t^2)dt>0$이므로 성립

ㄴ. $f(0)=0$이고 $f(\sqrt{\pi})>0$이므로 $(0,\sqrt{\pi})$에 증가하는 구간이 반드시 존재하기 때문데
$f^1(a)>0$인 a가 $(0,\sqrt{\pi})$에 적어도 하나 반드시 존재한다.

ㄷ. $f(x)=e^{-x}\int_0^x \sin(t^2)dt$

$\Rightarrow e^x f(x)=\int_0^x \sin(t^2)dt$이고 양변을 x에 대해 미분하면

$e^x(f(x)+f'(x))=\sin x^2$ 여기서 $x=0,\ \sqrt{\pi}$ 대입을 하면

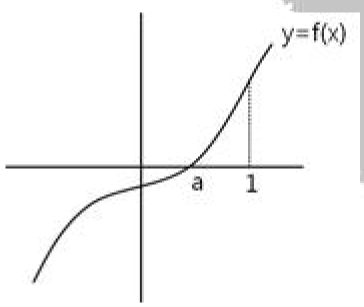
$f(0)+f'(0)=0$

$f(\sqrt{\pi})+f'(\sqrt{\pi}$

21. 정답 : ④

해설 : $0\le x\le 1\ \ f(x)$증가함수

$\int_0^1 f(x)dx=2\quad \int_0^1 |f(x)|dx=2\sqrt{2}$ 에서



$\int_0^a f(x)dx + \int_a^1 f(x)dx = 2$

$-\int_0^a f(x)dx + \int_a^1 f(x)dx = 2\sqrt{2}$

$\Downarrow$

연립

$\int_0^a f(x)dx = 1 - \sqrt{2}$

$\int_a^1 f(x)dx = 1 + \sqrt{2}$

$F(x) = \int_0^x |f(t)|dt$ 에서

$* F(0) = 0, F'(x) = |f(x)|$

$* F(a) = \int_0^a |f(t)|dt = \sqrt{2} - 1$

$* F(1) = \int_0^1 |f(t)|dt = 2\sqrt{2}$

$\int_0^1 f(x)F(x)dx$ 에서

$-\int_0^a F'(x)F(x)dx + \int_a^1 F'(x)F(x)$

$-\int_0^a F'(x)F(x)dx = -[(F(x)^2]_0^a + \int_0^a F'(x)F(x)dx$

$\therefore -\int_0^a F'(x)F(x)dx = -\frac{1}{2}[F(a)^2 - F(0)^2]$

$= -\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)^2 = -$

22. 정답 : 10

해설 : ${}_4H_2 = {}_5C_2 = \frac{5\times4}{2} = 10$

23. 정답 : 6

해설 : $(\frac{1}{2})^{x-5} \geq 4$

$2^{-x+5} \geq 2^2$

$-x+5 \geq 2$

$x \leq 3$

$\therefore x = 1,2,3$

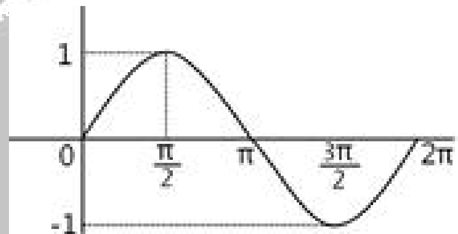
합 $= 6$

24. 정답 : 16

해설 : $x+8y-4z+k=0$과 $x^2+(y+1)^2+z^2=4$가
접할 때는 구의 중심에서 평면까지 거리가 반지름과 같다.
중심 $(0,-1,0)$ $x+8y-4z+k=0$
거리 $\dfrac{|-8+k|}{\sqrt{1+64+16}}=2$
$|k-8|=18$
$k-8=\pm18$
$k=26$ $k=-10$
합 $=16$

25. 정답 : 7

해설 : 1) $\sin^2x+\cos^2x=1$ 이므로
$(1-\sin^2x)-\sin x=1$
$\sin x=t$ 라 하면 $1-t^2-t=1$
$\rightarrow t^2+t=0$
$\rightarrow t(t+1)=0$ 에서 $t=0$, 또는 -1
2) $\sin x=0$ 또는 $\sin x=-1$
$\sin x=0 \rightarrow x=\pi$
$\sin x=-1 \rightarrow x=\dfrac{3}{2}\pi$ 이므로
모든 실근의 합은 $\pi+\dfrac{3}{2}\pi=\dfrac{5}{2}$
$\therefore p+q=2+5=7$



26. 정답 : 11

해설 : 1) 합이 3인 경우
A $-$ B
$(1,2)$ $(1,2)$ $\rightarrow P_1=\dfrac{1}{{}_4C_2}\times\dfrac{1}{{}_4C_2}=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{36}$
2) 합이 4인 경우
$(1,3)$ $(1,3)$ $\rightarrow P_2=\dfrac{1}{{}_4C_2}\times\dfrac{1}{{}_4C_2}=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{36}$
3) 합이 5인 경우
$(1,4)$ $(1,4)$
또는
$(2,3)$ $(2,3)$ $\rightarrow P_3=(\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6})\times(\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6})=\dfrac{4}{36}$
4) 합이 6인 경우
$(2,4)$ $(2,4)$ $\rightarrow P_4=\dfrac{1}{{}_4C_2}\times\dfrac{1}{{}_4C_2}=\dfrac{1}{36}$
5) 합이 7인 경우
$(3,4)$ $(3,4)$ $\rightarrow$

27. 정답 : 32

해설 : 1)$a+b+c=7$을 만족하는 음이 아닌 정수해의 개수는 ${}_3H_7$이므로

$${}_3H_7 = {}_{3-7+1}C_7 = {}_9C_7 = {}_9C_2 = \frac{9\times 8}{2\times 1} = 36$$

2)(나)식에서 $2^a \times 4^b = 8 = 1$ 배수이므로
$2^{a+2b} = 2^{3+k}$ 합이여야 하므로
$a+2b = 3$ 이상이어야 한다

3)$a+23 = 3$ 미만의 경우를 구하면
①$a+2b=0$ 일때$\rightarrow (a,b)=(0,0)$
②$a+2b=1 \rightarrow (a,b)=(1,0)$
③$a+2b=2 \rightarrow (a,b)=(2,0)$
$=(0,1)$

4가지이므로
경우에서 $a+2b$가 3미만인 경우를 제외하면 된다.
$\therefore 36-4=32$

28. 정답 : 12

해설 : 1)쌍곡선 : $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$에서 접근선은 $y=\pm\frac{b}{a}x$이므로

$\frac{b}{a}=\frac{4}{3} \rightarrow 3b=4a$

2)$\overline{PF'}=30$, $16 \le \overline{PF'} \le 20$에서 $\overline{PF'}-\overline{PF}=20$이므로
$16 \le 30-2a \le 20$
$-14 \le -2a \le -10$
$10 \le 2a \le 14$
$5 \le a \le 7$

3) ①$a=5$ 일때 $b=\frac{20}{3}$
②$a=6$일때 $b=8$
③$a=7$일때 $b=\frac{28}{3}$
에서 $C^2=a^2+b^2$이고 $\overline{AF}$의 길이가 자연수이므로
$a=6$ $b=8$ $c^2=100$
$\therefore$ 주축의 길이는 $2a$이므로 $2\times 6=12$

29. 정답 : 19

해설 :

$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{c}$ 라하자

$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=4$ $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}=4X4X\cos 60^{o}$

이때 $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\frac{\vec{a}}{3}+\frac{\vec{b}}{3}$

$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\vec{C}$

$\overrightarrow{OP}=-\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$

점 Q는 평면 BCD위에 있으므로

$\overrightarrow{AQ}=\ell\vec{a}+m\vec{b}+m\vec{c}$ (단, $\ell+m+n=1$)

$\ell,m,n zo$

이때 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=0$ 이므로 점 Q는 $\overrightarrow{OP}$를 법선으로 하는 평면과 평면 BCD와의 교선 위의 점이다.

$\overrightarrow{PQ}$의 크기가 최대가 되려면 점 Q는 $\overline{CD}$와의 교점이 되거나 $\overline{BD}$와의 교점이 되어야한다.

즉, $\overrightarrow{AQ}=\ell\vec{a}+n\vec{c}=n\vec{b}+n\vec{c}$

(단, $\ell+n=1$ 또는 $m+n=1$)

따라서 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=(-\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c})\cdot((\ell-\frac{1}{3})\vec{a}-\frac{\vec{b}}{3}+n\vec{c})=0$

$$0=(-\frac{\ell}{3}+\frac{1}{9})|\vec{a}|^2+\frac{1}{9}\vec{a}\cdot\vec{b}-\frac{n}{3}\vec{a}\cdot\vec{c}+(\frac{1}{9}-\frac{\ell}{3})\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{1}{9}|\vec{b}|^2-\frac{n}{3}\vec{b}\cdot\vec{c}$$
$$-\frac{1}{6}\vec{b}\cdot\vec{c}+(\frac{\ell}{2}-\frac{1}{6})\vec{a}\cdot\vec{c}+\frac{n}{2}|\vec{c}|^2$$

$$0=16(-\frac{\ell}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{n}{2})+8(\frac{1}{9}-\frac{n}{3}+\frac{1}{9}-\frac{\ell}{3}-\frac{n}{3}-\frac{1}{6}+\frac{\ell}{2}-\frac{1}{6})$$

$-\frac{12}{3}\ell+\frac{8}{3}n+\frac{24}{9}=0$ 또한 $\ell+n=1$ 이므로

$\ell=\frac{4}{5}$ $n=\frac{1}{5}$

즉 $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AP}=\frac{4}{5}\vec{a}-\frac{3}{10}\vec{c}$

$|\overrightarrow{PQ}|^2 = \frac{16}{25}|\vec{a}|^2 - 2.\frac{4}{5}.\frac{3}{10}.\vec{a}.\vec{c} + \frac{9}{100}|\vec{c}|^2$

$= \frac{196}{25}$

$\therefore |\overrightarrow{PQ}| = \frac{14}{5}$

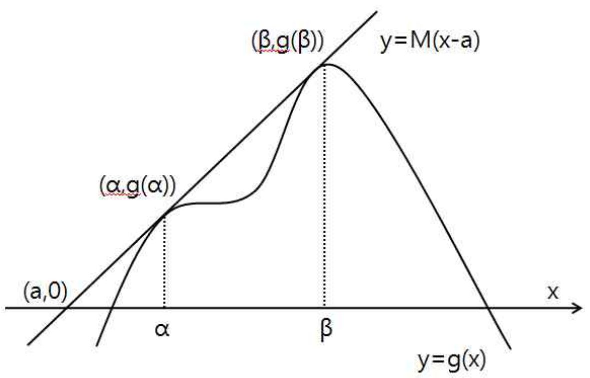
$\therefore 14+5=19$

30. 정답 : 216

해설 : (가)에서 주어진 식을 변형하면

$f(x) = \frac{g(x)}{x-a}$는 $(x, g(x)), (a, 0)$인 두 점의 평균변화율이다.

(나)조건을 만족하는 $g(x)$의 개형은 아래와 같다.



여기서 평행이동은 주어진 상황에 영향을 주지 않으므로 $\alpha = 0, \beta = 6\sqrt{3}$이라 하자.
따라서 $M(x-\alpha) - g(x) = x2(x-6\sqrt{3})^2$이고 $g'(x) = M - 4x(x-6\sqrt{3})(x-3\sqrt{3})$
조건 (다)에 의하여 $g(x)$의 극값은 2개 이하이므로
M은 $4x(x-6\sqrt{3})(x-3\sqrt{3})$의 극댓값 이상이어야 한다.
그러므로 $x = 3\sqrt{3}-3$을 대입하면 $M \geq 4(3\sqrt{3}-3)(-3-3\sqrt{3})(-3) = 12 \times 18 = 216$이다.