

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشگاه شیخ بهایی

دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی مالی

الگوریتم های شبیه سازی سازگار برای ارزش گذاری اختیار معامله های

آمریکایی و برمودایی توسط تحلیل های موضعی بازار مالی

پژوهشگر: وحید میرحسینی

استاد راهنما: دکتر محمدتقی جهاننیده

استاد مشاور: دکتر علی رجالی

مهر ۱۳۹۰

تقدیم به

گرامی پدر و مهربان مادرم

## تشکر و قدردانی

با استمداد از درگاه خداوند متعال و به مدد لطف بی کران او که همیشه و در تمام مراحل زندگی شامل حال اینجانب بوده است نگارش پایان نامه‌ی حاضر به اتمام رسید. در ابتدا لازم است از تمامی کسانی که به نحوی در زندگی علمی و تربیتی اینجانب نقش داشته‌اند تقدیر و تشکر نمایم. پس از آن از زحمات اساتید گرامی آقایان ، دکتر محمد تقی جهان‌دیده و دکتر علی رجالی تشکر می‌کنم که به ترتیب در سمت استاد راهنما و استاد مشاور با رهنمودهای مفید و روشنگر خودشان مرا در پیشبرد و تکمیل این پژوهش یاری نمودند.

## چکیده

در مباحث ریاضیات مالی، اختیار معامله‌های آمریکایی به قراردادهای مالی اطلاق می‌شود که در هر زمان قبل از سررسید قابل اجرا باشند. ولی از آن جایی که، برای ارزش گذاری بسیاری از قراردادهای اختیار معامله مثل اختیار معامله ی آمریکایی، جواب تحلیلی وجود ندارد لذا تلاش هایی برای یافتن راه حل های مبتنی بر روش های عددی، مانند مونت کارلو، صورت گرفته است. روش های مونت کارلو مشکل پیچیدگی نمایی زمان را ندارد، بنابراین تصور می شود که روش مناسبی برای ارزش گذاری قراردادهای اختیار معامله باشند. ولی مطالعات نشان داده است به علت این که شبیه سازی مونت کارلو حرکتی رو به جلو است در حالی که ارزش گذاری اختیارمعاملات آمریکایی فرآیند برگشت به عقب، اعمال روش های مونت کارلو ممکن است باعث بروز برخی مشکلات شود. همچنین در این پایان نامه رویکردی برای ارزش گذاری اختیار معامله های آمریکایی و برمودایی در حالت گسسته ارائه شده است. در این رویکرد از این واقعیت استفاده شده است که هر اختیار معامله ی آمریکایی و برمودایی با اختیار معامله ی اروپایی توأم با فرآیند مصرف معادل است. در حقیقت با استفاده از شبیه سازی مونت کارلو می توان دو کران بالا و پایین برای ارزش واقعی اختیار معامله ی برمودایی پیدا کرد، و با انتخاب مناسب کران های پایین موضعی و استفاده از تکنیک درون یابی هسته‌ای، کارآیی این روش را بالا برد .

کلمات کلیدی : اختیار معامله‌های آمریکایی و برمودایی، کران های بالا و پایین، شبیه سازی مونت کارلو، فرآیند

مصرف

## علائم

$S_m^{(n)}$  دارایی  $n$  ام در زمان  $t_m$

$X_i^{(d)}$  دارایی  $d$  ام در زمان  $t_i$

$f(s)$  جبرانی اختیار معامله

$$(x)^+ \equiv \max(x, 0)$$

$$E_t[x] \equiv E(X|\mathcal{F}_t)$$

$u_i(x)$  ارزش اختیار معامله در زمان  $t_i$

$v_i(x)$  کران پایین برای ارزش واقعی اختیار معامله در زمان  $t_i$

$V_i(x)$  کران بالا برای ارزش واقعی اختیار معامله در زمان  $t_i$

$\gamma_i(x)$  فرآیند مصرف در زمان  $t_i$

EEP سود اجرای زودرس

PDE معادله ی دیفرانسیل تصادفی

## فهرست

### فصل ۱: مقدمه

- ۱-۱ تاریخچه..... ۱
- ۲-۱ اختیار معاملات..... ۲
- ۳-۱ شبیه سازی مونت کارلو..... ۳
- ۴-۱ اختیار معاملات آمریکایی..... ۳
- ۵-۱ اختیار معاملات غیر معمول..... ۴
- ۶-۱ اختیار معامله ی برمودایی ..... ۴
- ۷-۱ مطالب آمده در این پایان نامه..... ۵

### فصل ۲: نظریه ی بازارهای مالی

- ۱-۲ حرکت براونی..... ۸
- ۱-۱-۲ خواص حرکت براونی..... ۹
- ۲-۱-۲ حرکت براونی توأم با رانش..... ۱۰
- ۳-۱-۲ حرکت براونی هندسی..... ۱۱
- ۲-۲ فرض های معمول در بازارهای مالی..... ۱۱
- ۱-۲-۲ مفروضات مدل بلک-شولز..... ۱۱
- ۲-۲-۲ عوامل تأثیرگذار بر ارزش اختیار معامله..... ۱۲

- ۱۲.....تفسیر پارامترها.....۳-۲-۲
- ۱۳.....مشتقات مالی.....۳-۲
- ۱۳.....تعاریف مورد نیاز.....۴-۲
- ۱۴.....محاسبات بر اساس بازار بدون آریترائز.....۵-۲
- ۱۶.....فرمول بلک-شولز.....۱-۵-۲
- ۱۶.....شبیه سازی تحت فرض بازار بدون آریترائز.....۲-۵-۲
- ۱۷.....محاسبات تحت اندازه های ریسک-خشی.....۶-۲
- ۲۰.....ارزش گذاری اختیارمعاملات آمریکایی تحت اندازه ی ریسک-خشی.....۱-۶-۲
- ۲۰.....شبیه سازی حرکت ارزش سهام.....۷-۲
- ۲۱.....شبیه سازی در حالت دارایی های چندگانه.....۱-۷-۲

### فصل ۳: اختیارمعاملات آمریکایی و برمودایی

- ۲۲.....نظریه ی محاسبه ی ارزش اختیارمعاملات آمریکایی.....۱-۳
- ۲۲.....تعاریف.....۱-۱-۳
- ۲۳.....عمل تنزیل در زمان های گسسته.....۲-۱-۳
- ۲۴.....مدل سازی با شرایط مرزهای آزاد.....۳-۱-۳
- ۲۵.....مدل برنامه نویسی پویا.....۴-۱-۳
- ۲۶.....مدل سازی قانون توقف بهینه.....۵-۱-۳
- ۲۷.....سود اجرای زودرس.....۶-۱-۳



۲-۳ روش های ارزش گذاری اختیارمعاملات آمریکایی..... ۲۸

۱-۲-۳ برآوردها و مدل ها..... ۲۹

۲-۲-۳ روش های شبکه ای و تفاضل های متناهی..... ۲۹

۳-۲-۳ شبیه سازی های مونت کارلو..... ۳۰

#### فصل ۴: روش های مونت کارلو برای ارزش گذاری اختیارمعاملات آمریکایی

۱-۴ پارامتری کردن مرز اجرای اختیارمعامله..... ۳۲

۱-۱-۴ نکات قابل توجه..... ۳۳

۲-۴ درخت تصادفی..... ۳۳

۱-۲-۴ برآوردگر بالایی..... ۳۴

۲-۲-۴ برآوردگر پایینی..... ۳۴

۳-۲-۴ نکته..... ۳۴

۳-۴ فاصله ی زمانی کوتاه تصادفی..... ۳۴

۱-۳-۴ تولید نقاط گره ای..... ۳۵

۲-۳-۴ محاسبه ی وزن فاصله ی زمانی کوتاه..... ۳۵

۳-۳-۴ برآوردگر بالایی..... ۳۶

۴-۳-۴ برآوردگر پایینی..... ۳۶

۵-۳-۴ نکته..... ۳۷

۴-۴ روش پایه ای رگرسیون..... ۳۷

۳۸..... ۱-۴-۴ برآوردگر پایینی

۳۹..... ۲-۴-۴ نکته

۳۹..... ۵-۴ روش دوگان

۴۰..... ۱-۵-۴ مارتینگل های حاصل از توابع برآوردگر

۴۱..... ۲-۵-۴ مارتینگل حاصل از قوانین توقف

### فصل ۵ : ارزش گذاری اختیار معامله ی آمریکایی و برمودایی در حالت گسسته

۴۲..... ۱-۵ رویکرد بر اساس فرایندهای مصرف

۴۲..... ۱-۱-۵ پوش اسنل

۴۳..... ۲-۱-۵ ارزش ادامه، دامنه ی ادامه و اجرای اختیار معامله

۳-۱-۵ معادل بودن اختیار معامله ی آمریکایی با اختیار معامله ی اروپایی توأم با فرایند

۴۵..... مصرف

۴۶..... ۴-۱-۵ تولید کران های بالا و پایین با استفاده از فرایندهای مصرف

۵۰..... ۵-۱-۵ اختیار معامله های برمودایی

۵۲..... ۲-۵ فرایند اصلی

۵۲..... ۱-۲-۵ کران های پایین موضعی

۵۳..... ۲-۲-۵ فرایند اصلی برای تولید کران بالا برای نقطه ی اولیه

۵۵..... ۳-۲-۵ فرایند اصلی برای تولید کران پایین برای نقطه ی اولیه

۵۷..... ۴-۲-۵ تکنیک درون یابی هسته ای

فصل ۶: مطالعات متکی بر تجربه (بخش اول)

- ۶-۱ قراردادهای مالی آمریکایی.....۶۰
- ۶-۱-۱ اختیار فروش.....۶۱
- ۶-۱-۲ اختیار خرید ماکزیمم.....۶۱
- ۶-۱-۳ اختیار خرید بسته ای.....۶۲
- ۶-۱-۴ انتخاب مقادیر پارامتر.....۶۲
- ۶-۲ نتایج عددی برای مقایسه روش های مونت کارلو.....۶۲
- ۶-۲-۱ نتایج.....۶۳
- ۶-۳ نتایج عددی برای محاسبه ی توابع پایه ای.....۶۶
- ۶-۳-۱ تشریح توابع پایه ای.....۶۶
- ۶-۳-۲ روش تحلیل.....۶۶

فصل ۷: مطالعات متکی بر تجربه (بخش دوم)

- ۷-۱ شبیه سازی حرکت براونی.....۶۹
- ۷-۲ حل عددی معادله ی دیفرانسیل تصادفی.....۷۱
- ۷-۳ تقریب اویلر.....۷۲
- ۷-۴ تولید کران بالا و پایین برای اختیار خرید ماکزیمم برمودایی روی  $d$  دارایی.....۷۳
- ۷-۴-۱ نتایج.....۷۷
- ۷-۵ تولید کران پایین برای اختیار فروش برمودایی بسته ای.....۷۹

۱-۵-۷ نتایج..... ۸۱

## فصل ۸ : نتیجه گیری ها

۱-۸ ارزش گذاری اختیارمعاملات آمریکایی و برمودایی به کمک شبیه سازی..... ۸۳

۲-۸ پیشنهادها برای تحقیقات آتی..... ۸۴

مراجع..... ۸۵

واژه نامه..... ۸۸

پیوست ها..... ۹۳

## فهرست شکل ها

شکل ۱-۳ ..... ۲۵

شکل ۲-۳ ..... ۲۷

شکل ۳-۳ ..... ۲۸

شکل ۱-۴ ..... ۳۳

شکل ۲-۴ ..... ۳۵

شکل ۱-۶ ..... ۶۴

شکل ۱-۷ ..... ۷۰

شکل ۲-۷ ..... ۷۳

## فهرست جداول

جدول ۶-۱..... ۶۴

جدول ۶-۲..... ۶۵

جدول ۷-۱..... ۷۶

جدول ۷-۲..... ۷۷

جدول ۷-۳..... ۸۰

جدول ۷-۴..... ۸۱

## فصل ۱ : مقدمه

دگرگونی اقتصاد جهانی طی دهه‌های اخیر و توسعه‌ی اقتصادی، موجب ابداع یا تکامل ابزارهای متعدد مالی گردیده است. علاوه بر گسترش معاملات سنتی دارایی‌های فیزیکی و مالی، مبادلات ابزار مشتقه شامل قراردادهای آتی، قراردادهای اختیار معامله و قراردادهای معاوضه‌ای، شتاب روزافزونی یافته است. به نحوی که ارزش جاری قراردادهای مشتقه منتشر شده در بازار که دارای موقعیت باز می‌باشند، در طی سال ۲۰۰۴ در حدود ۵۰ تریلیون دلار برآورد شده است (که تحقق یافته است) [۲۶]. هدف این پایان نامه ارزش‌گذاری اختیار معاملات می باشد. پس به تعریف و تاریخچه‌ی این نوع مشتقات خواهیم پرداخت.

### ۱-۱ تاریخچه

ارزش‌گذاری اختیار معامله‌های آمریکایی<sup>۱</sup> و برمودایی<sup>۲</sup> در ابعاد بالا یکی از سخت‌ترین مسائل عددی در مهندسی مالی می باشد. چندین رویکرد اخیراً برای ارزش‌گذاری چنین اختیار معامله‌هایی با استفاده از تکنیک شبیه‌سازی مونت-کارلو پیشنهاد شده اند که از جمله آنها می توان به مقالات [۲۸]، [۲۴]، [۲۵]، [۵]، [۱۴]، [۱]، [۲]، [۸]، [۱۶]، [۱۸] و [۲۷] اشاره کرد. در برخی از این مقاله‌ها شیوه‌هایی پیشنهاد شده اند که به تولید کران بالا و پایین برای ارزش واقعی اختیار معامله‌ها می پردازند. مثلاً در [۵]، روشی برای ارزش‌گذاری اختیار معامله‌های آمریکایی و برمودایی در دو حالت پیوسته و گسسته ارائه شده است که در آن از این واقعیت استفاده شده است که هر اختیار معامله‌ی آمریکایی معادل اختیار معامله‌ی اروپایی<sup>۳</sup> همراه با فرآیند مصرف است. این روش به طور بازگشتی دنباله‌ای از کران‌های بالا و پایین برای هر نقطه را تولید می کند که کران‌های پایین به صورت صعودی و کران‌های بالا به صورت نزولی مرتب شده اند. متأسفانه، پیچیدگی این روش با هر تکرار جدید به طرز قابل ملاحظه‌ای افزایش می یابد به طوریکه حتی رسیدن به دومین کران بالا، در ساختارهای حقیقی، پیچیدگی محاسباتی

---

۱) American option

۲) Bermudan option

۳) European option

بالایی دارد. لذا روش‌هایی که باعث کاهش این پیچیدگی شود، در اولویت قرار می‌گیرند. در این پایان نامه با استفاده از تکنیک درون یابی هسته ای تا حد زیادی می‌توان این پیچیدگی را کاهش داد.

اختیار معامله‌ها یکی از انواع مشتقات مالی هستند که در بازارهای بورس دادوستد می‌شوند و می‌توانند به عنوان قرارداد روی هر دارایی بسته شوند، اما در این پایان نامه اختیار معامله‌ی دارایی‌های بنیادین (سهام) مد نظر می‌باشد.

## ۲-۱- اختیارمعاملات

اختیار معامله، یک قرارداد مالی است که به دارنده‌ی آن این اختیار (و نه الزام) را می‌دهد که آن را به اجرا بگذارد. به طور کلی، می‌توان اختیار معامله را به دو دسته تقسیم کرد، "اختیار خرید"<sup>۱</sup> و "اختیار فروش"<sup>۲</sup>. یک اختیار خرید در واقع این اختیار (و نه الزام) را به دارنده‌ی آن می‌دهد، که دارایی موضوع قرارداد را با قیمت معین و در تاریخ مشخص یا قبل از آن، بخرد. به همین ترتیب، یک اختیار فروش به دارنده‌ی آن این حق را می‌دهد، که دارایی موضوع قرارداد را با یک قیمت معین و در تاریخ مشخص یا قبل از آن بفروشد [۲۶].

قیمتی را که در قرارداد ذکر می‌شود، قیمت توافقی<sup>۳</sup> یا قیمت اعمال و تاریخ ذکر شده در قرارداد را، اصطلاحاً تاریخ انقضا<sup>۴</sup> یا زمان سررسید اختیار معامله می‌گویند. اختیار خرید یا فروش، هر کدام به دو حالت اروپایی و آمریکایی تقسیم می‌شود. قرارداد "اختیار معامله‌ی اروپایی" فقط در تاریخ سررسید قابلیت اجرایی دارد، در حالی که قرارداد "اختیار معامله‌ی آمریکایی" در هر زمان قبل از تاریخ سررسید یا در تاریخ سررسید قابل اجرا است. به طور کلی برای تمام انواع اختیار معامله‌ها، به سود خالص دریافت شده از اجرای اختیار معامله، عایدی یا جبرانی<sup>۵</sup> اختیار معامله می‌گویند. ساده‌ترین اختیارمعاملات، اختیارمعاملاتی است که اختیار خرید یا فروش یک دارایی را به دارنده‌ی خود می‌دهد که به ترتیب اختیار خرید و اختیار فروش نامیده می‌شوند و به آنها اختیار معامله‌های معمول<sup>۶</sup> نیز اطلاق می‌شود. اختیارمعاملات پیچیده‌تر، اختیارمعاملات غیرمعمول نام دارند که در همین فصل به

- 
- ۱) Call option
  - ۲) Put option
  - ۳) Strike price
  - ۴) Maturity
  - ۵) Payoff
  - ۶) Vanilla option



تعریف آن‌ها می‌پردازیم. استفاده از اختیارمعاملات می‌تواند دارای اهداف زیر باشد:

- ۱- پوشش<sup>۱</sup>، وقتی که از اختیارمعامله، برای کاهش ریسک در سبد سرمایه‌ی دارایی‌ها استفاده می‌شود.
- ۲- گمانه‌زنی<sup>۲</sup>، وقتی که ممکن است سبدسرمایه سود بیشتری بدهد اما از ریسک بالاتری نیز برخوردار است.

### ۱-۳ شبیه‌سازی مونت کارلو<sup>۳</sup>

روش‌های مونت کارلو، روش‌هایی است که با استفاده از اعداد تصادفی به حل مسائل ریاضی می‌پردازد. مزیت اصلی این روش‌ها در مقایسه با روش‌های تعیینی این است که نرخ همگرایی این روش‌ها با افزایش تعداد متغیرهای حالت، به طور نمایی کاهش نمی‌یابد. در فصل ۳ در مورد این روش‌ها بیشتر توضیح داده می‌شود. در این پایان‌نامه از این روش برای شبیه‌سازی سناریوهای مربوط به حرکت ارزش بورس در چهارچوب مدل بلک-شولز-مرتین [۳۳]، استفاده می‌شود. [۲۹]

### ۱-۴ اختیارمعاملات آمریکایی

ارزش‌گذاری اختیارمعاملات آمریکایی را می‌توان در دو مسأله‌ی زیر خلاصه کرد:

- ۱- انتخاب یک استراتژی بهینه برای به اجرا گذاشتن آن (قانون اجرای بهینه)
- ۲- ارزش‌گذاری اختیارمعامله مطابق با استراتژی انتخاب شده

به استثناء برخی موارد خاص، فرم بسته‌ی جواب، برای ارزش‌گذاری اختیارمعاملات آمریکایی وجود ندارد. بنابراین باید از تقریب‌های تحلیلی یا جواب‌های عددی استفاده کرد. تقریب‌های تحلیلی مناسب تنها برای قراردادهای اختیارمعامله‌های آمریکایی استاندارد وجود دارد و همچنین اکثر روش‌های عددی برای ارزش‌گذاری اختیارمعاملاتی است که دارای‌های بنیادین کمتری دارند و حتماً به زمان بستگی ندارند. این محدودیت‌ها دلیل اصلی استفاده از روش‌های مونت-کارلو در ارزش‌گذاری اختیارمعاملات آمریکایی و برمودایی است.

---

۱) Hedging  
۲) Speculation  
۳) Monte-carlo simulation

## ۵-۱ اختیارمعاملات غیرمعمول

اختیارمعاملات غیرمعمول<sup>۱</sup>، قراردادهای جدیدی در بازارهای مالی نیستند. این اختیارمعاملات همان اختیارمعاملات اروپایی و آمریکایی هستند با این تفاوت که در نوشتن آنها شرط یا شرایط جدیدی لحاظ می شود، این امر سبب می شود که در بسیاری از موارد خرید و فروش این نوع اختیارمعاملات رونق بیشتری داشته باشد. برخی از اختیارمعاملات غیرمعمول چندین سال قبل از تولد داد و ستد اختیارمعامله در سال ۱۹۷۳ به وجود آمدند (اولین تشکیلات داد و ستد اختیارمعاملات در جهان در سال ۱۹۷۳ شکل گرفت) حجم تجارت اختیارمعاملات در دوره‌ی قبل از ۱۹۷۳ نسبتاً کم و برای اختیارمعاملات غیرمعمول حتی کم تر بود. اندکی پس از تأسیس اولین تشکیلات داد و ستد اختیارمعامله، انقلاب غیرمحسوس و آرامی در مفهوم اختیارمعامله و تجارت آن آغاز شد. در اواخر دهه‌ی ۱۹۷۰ و اوایل ۱۹۸۰، وقتی داد و ستد اختیارمعامله رواج یافت، حجم تجارت آن گسترده شد و موسسات مالی فعالیت در این زمینه را آغاز کردند. در اواخر دهه‌ی ۱۹۸۰ و اوایل ۱۹۹۰ اختیارمعاملات غیرمعمول در فرآیندهای روزانه نمایان تر و در انجمن های مالی محبوب تر و تجارت آن ها در بازارهای مالی فعال تر شده اند. اگرچه تعداد کمی از اختیارمعاملات غیرمعمول اخیراً به بازار معرفی شده است، ولی بیشتر آنها در بازارهای مالی تجربه شده است. به عنوان مثال اختیارمعامله‌ی انتخابی نوعی از اختیارمعاملات غیرمعمول است که بعد از مدت زمان معینی که از شروع آن می گذرد دارنده‌ی آن توان انتخاب این که اختیارمعامله، اختیارخرید یا اختیارفروش باشد را داشته باشد. یکی دیگر از انواع اختیارمعاملات غیرمعمول اختیارمعامله‌ی آسیایی است که به میانگین ارزش دارایی ها بستگی دارد. مثال های دیگری می توان از اختیارمعاملات غیرمعمول ارائه داد، اما هدف ما در این پایان نامه ارزش گذاری نوع مهمی از اختیارمعاملات غیرمعمول به نام اختیارمعامله‌ی برمودایی می باشد [۲۶].

## ۶-۱ اختیارمعامله‌ی برمودایی

اختیارمعامله‌ی برمودایی نوع خاصی از اختیارمعامله‌ی آمریکایی می باشد. همان گونه که می دانیم در اختیارمعاملات

---

۱) Exotic option

آمریکایی به اجرا گذاشتن قرارداد در زمانی قبل از زمان سررسید امکان پذیر است. حال اگر در خصوص زمان به اجرا گذاشتن اختیار معامله شرایط دیگری اعمال شود، این اختیار معامله از حالت استاندارد خارج می شود و اختیار معامله جدیدی معرفی می شود. در حالی که زمان به اجرا گذاشتن اختیار معامله محدود به زمان های خاصی قبل از زمان سررسید شود، اختیار معامله حاصل را اختیار معامله برمودایی گویند. این اختیار معامله حد وسط اختیار معامله آمریکایی و اروپایی است و از آنجایی که منطقه برمودا از نظر جغرافیایی بین آمریکا و اروپا واقع شده است، به این نوع اختیار معاملات، اختیار معاملات برمودایی اطلاق می شود.

## ۷-۱ مطالب آمده در این پایان نامه

در این پایان نامه که بر اساس مراجع [۳۷]، [۲۲]، [۱۶]، [۱۷]، [۳۶]، [۵]، [۲۹] و [۷] تنظیم شده است، ابتدا به روش های توسعه یافته در برخی از این مقالات برای ارزش گذاری اختیار معاملات آمریکایی با استفاده از شبیه سازی مونت-کارلو اشاره می کنیم و سپس در خصوص روش ارزش گذاری اختیار معامله برمودایی به بحث و بررسی می پردازیم. مدل مالی گسسته - زمان را در نظر می گیریم، فرض کنیم

$$(B_{t_i}, X_{t_i}) = (B_{t_i}, X_{t_i}^1, \dots, X_{t_i}^d) \quad , \quad i = 0, 1, \dots, L$$

بردار ارزش دارایی بنیادین در لحظه  $t_i$  باشد که در آن  $B_{t_i}$  ارزش دارایی بدون ریسک ( $B_{t_0} = 1$  معلوم و  $B_{t_i}$ ) و  $X_{t_i} = (X_{t_i}^1, \dots, X_{t_i}^d)^T$  بردار ارزش دارایی های توأم با ریسک باشد. (از این پس به جای اندیس  $t_i$  اندیس  $i$  را به کار می بریم). فرض کنیم  $f_i(x)$  در آمد خالص به دست آمده توسط اجرای اختیار معامله آمریکایی در زمان  $t_i$  باشد وقتی که  $X_{t_i} = X_i = x$ . در این پایان نامه از یک دنباله صعودی کران های پایین برای ساختن کران بالا و پایین برای ارزش اختیار معامله در موقعیت اولیه  $(t_0, X_0)$  استفاده می کنیم. فرض کنیم  $(t_i, X_{i,m})$ ، برای هر  $i = 0, 1, \dots, L$  و  $m = 1, \dots, M$ ، همه  $M$  مسیرهای مستقل باشند که از نقطه  $(t_0, X_0)$  شروع می شود و فرض کنیم  $v^1 \leq v^2 \leq \dots \leq v^L$  یک دنباله ی متناهی از کران های پایین برای ارزش اختیار معامله باشند که می توانند برای هر نقطه  $(t_i, X)$  محاسبه شوند. هر کران پایین، یک کران پایین برای ارزش ادامه (ارزش ادامه ی پایینی) و یک کران بالا برای فرآیند مصرف (فرآیند مصرف بالایی) نظیر می کند. اگر جبرانی اختیار معامله در نقطه  $(t_i, X_{i,m})$  کوچکتر یا مساوی ارزش ادامه ی پایینی باشد، آن گاه نقطه  $(t_i, X_{i,m})$  به

ناحیه‌ی ادامه تعلق دارد و مصرف در  $(t_i, X_{i,m})$  برابر صفر است. در غیر این صورت، موقعیت  $(t_i, X_{i,m})$  می‌تواند به هر یک از دو ناحیه‌ی ادامه یا اجرای اختیار معامله متعلق باشد. در حالت آخری مصرف بالایی را از اختلاف بین جبرانی و ارزش ادامه‌ی پایینی محاسبه می‌کنیم. از کران پایین  $v^1$  (که در بین  $v^1, v^2, \dots, v^L$  کمترین مقدار را دارد) در نقطه‌ی  $(t_i, X_{i,m})$  می‌توانیم بفهمیم که آیا نقطه به ناحیه‌ی ادامه تعلق دارد (یعنی فرآیند مصرف بالایی صفر است) در این صورت هیچ یک از کران‌های دیگر را محاسبه نمی‌کنیم. حال اگر فرآیند مصرف بالایی مثبت باشد، اما به اندازه‌ی کافی بزرگ نباشد، باز هم می‌توانیم اعمال کران‌های دیگر را در نقطه‌ی  $(t_i, X_{i,m})$  متوقف کنیم، زیرا خطای ممکن بزرگ نخواهد بود. اگر بعد از اعمال کران‌های پایین  $v^1, v^2, \dots, v^j$  فرآیند مصرف بالایی به اندازه‌ی کافی کوچک نباشد، اما با اعمال کران پایین  $v^{j+1}$  تغییر معنی داری نکند باز هم می‌توان اعمال کران‌های دیگر را متوقف کرد. قابل ذکر است که کران‌های پایین برای هر موقعیت  $(t_i, X_{i,m})$  مشخص شده‌اند. اعمال کران‌های پایین در واقع به منزله‌ی تحلیل‌های موضعی بازار مالی در نظر گرفته شده برای هر موقعیت  $(t_i, X_{i,m})$  می‌باشد. تحلیل‌های موضعی برای نقاط  $(t_i, X_{i,m})$ ، کران‌های بالا و پایین را برای نقطه‌ی اولیه‌ی  $(t_0, X_0)$  تعیین می‌کند. حال اگر اختلاف بین کران‌های بالا و پایین زیاد باشد، می‌توانیم تحلیل‌های موضعی عمیق‌تری را در نظر بگیریم در واقع این تحلیل‌ها در تعداد متناهی از مراحل نتایج کاملی را به ما می‌دهد. برای این منظور کافی است برای اختیار معامله‌های آمریکایی در نقاط  $(t_i, X_{i,m})$  دنباله‌ی زیر را در نظر بگیریم.  $v^1$  ارزش اختیار معامله‌ی آمریکایی در فاصله‌ی زمانی  $[t_i, t_{i+1}]$  و  $v^2$  ارزش آن در  $[t_i, t_{i+2}]$  و ... و  $v^{L-i}$  ارزش آن در  $[t_i, t_L]$ . نقاط ضعف و قدرت این روش توسط ارزش‌گذاری اختیار خرید برمودایی ماکزیمم روی دو دارایی و همچنین اختیار معامله‌ی برمودایی بسته‌ای روی پنج دارایی، نشان داده خواهد شد. [۴]

مطالب این پایان‌نامه به صورت زیر ارائه می‌شود:

- در فصل ۲ به تعریف نظریه‌ی بازارهای مالی می‌پردازیم و سپس به مفاهیم اولیه‌ی مورد نیاز در این پایان‌نامه اشاره می‌کنیم.