Olimpiade Sains Nasional Bidang Matematika SMP Seleksi Tingkat Nasional Tahun 2017

1. Carilah semua bilangan real x yang memenuhi pertidaksamaan

$$\frac{x^2-3}{x^2-1}+\frac{x^2+5}{x^2+3}\geq\frac{x^2-5}{x^2-3}+\frac{x^2+3}{x^2+1}$$

Uraian Jawaban :

Pertidaksamaan pada soal ekuivalen dengan

$$\begin{aligned}
&\frac{x^2-1-2}{x^2-1}+\frac{x^2+3+2}{x^2+3}\geq\frac{x^2-3-2}{x^2-3}+\frac{x^2+1+2}{x^2+1}\\
\Leftrightarrow &1-\frac{2}{x^2-1}+1+\frac{2}{x^2+3}\geq 1-\frac{2}{x^2-3}+1+\frac{2}{x^2+1}\\
\Leftrightarrow &\quad -\frac{2}{x^2-1}+\frac{2}{x^2+3}\geq -\frac{2}{x^2-3}+\frac{2}{x^2+1}\\
\Leftrightarrow &\quad \frac{-4}{(x^2-1)(x^2+3)}\geq\frac{-4}{(x^2-3)(x^2+1)}
\end{aligned}$$

kalikan kedua ruas pertidaksamaan dengan $\dfrac{(x^2+1)(x^2+3)}{-4}$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
&\frac{x^2+1}{x^2-1}\leq\frac{x^2+3}{x^2-3}\\
\Leftrightarrow &\frac{x^2-1+2}{x^2-1}\leq\frac{x^2-3+6}{x^2-3}\\
\Leftrightarrow &1+\frac{2}{x^2-1}\leq 1+\frac{6}{x^2-3}\\
\Leftrightarrow &\frac{1}{x^2-1}\leq\frac{3}{x^2-3}\\
\Leftrightarrow &\frac{1}{x^2-1}-\frac{3}{x^2-3}\leq 0\\
\Leftrightarrow &\frac{-2x^2}{(x^2-1)(x^2-3)}\leq 0\\
\Leftrightarrow &\frac{1}{(x^2-1)(x^2-3)}\geq 0\\
\Leftrightarrow &(x^2-1)(x^2-3)\geq 0\\
\Leftrightarrow &(x-1)(x-1)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})\geq 0
\end{aligned}$$

yang memiliki himpunan penyelesaian yaitu $\{x\in\mathbb{R}|x<-\sqrt{3}\text{ atau }-1<x<1\text{ atau }x>\sqrt{3}\}$

2. Diketahui m adalah bilangan asli empat angka dengan angka satuan dan ribuan sama. Jika m merupakan bilangan kuadrat, tentukan semua bilangan m yang mungkin

Uraian Jawaban :

Misalkan $m=n^2=\overline{abca}$ dengan $a\neq 0$. Karena m adalah bilangan kuadrat maka $a\in\{1,4,5,6,9\}$. Selanjutnya kita bagi menjadi lima kasus,

(i) Jika $a = 1$ maka $m = n^2 = \overline{1bc1}$. Perhatikan bahwa

$$31^2 = 961 < m = n^2 < 2025 = 45^2$$

mengingat digit satuan dari m adalah 1 maka digit satuan dari n adalah 1 atau 9. Oleh karena itu, hanya ada dua kemungkinan nilai m yaitu $m = 39^2 = 1521$ atau $m = 41^2 = 1681$.

(ii) Jika $a = 4$ maka $m = n^2 = \overline{4bc4}$. Perhatikan bahwa

$$63^2 = 3969 < m = n^2 < 5041 = 71^2$$

mengingat digit satuan dari m adalah 4 maka digit satuan dari n adalah 2 atau 8. Oleh karena itu, hanya ada satu kemungkinan nilai m yaitu $m = 68^2 = 4624$.

(iii) Jika $a = 5$ maka $m = n^2 = \overline{5bc5}$. Perhatikan bahwa

$$70^2 = 4900 < m = n^2 < 6084 = 78^2$$

mengingat digit satuan dari m adalah 5 maka digit satuan dari n adalah 5. Oleh karena itu, hanya ada satu kemungkinan nilai m yaitu $m = 75^2 = 5625$.

(iv) Jika $a = 6$ maka $m = n^2 = \overline{6bc6}$. Perhatikan bahwa

$$77^2 = 5929 < m = n^2 < 7056 = 84^2$$

mengingat digit satuan dari m adalah 6 maka digit satuan dari n adalah 4 atau 6. Oleh karena itu, tidak ada nilai m yang memenuhi.

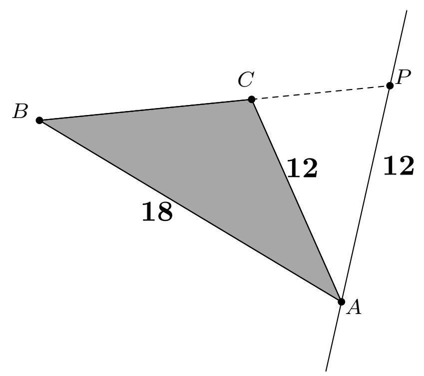
(v) Jika $a = 9$ maka $m = n^2 = \overline{9bc9}$. Perhatikan bahwa

$$94^2 = 8836 < m = n^2 < 10000 = 100^2$$

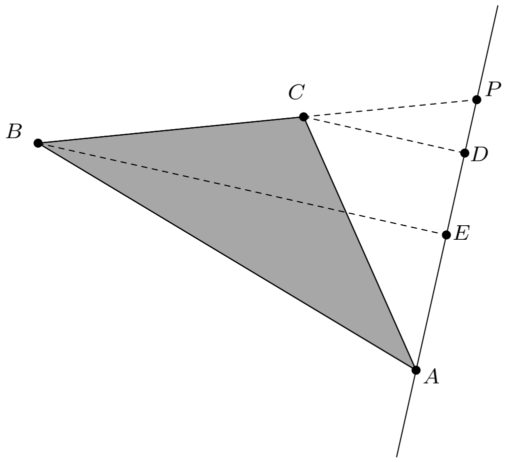
mengingat digit satuan dari m adalah 9 maka digit satuan dari n adalah 3 atau 7. Oleh karena itu, hanya ada satu kemungkinan nilai m yaitu $m = 97^2 = 9409$.

Jadi, ada lima kemungkinan nilai m yaitu $m = 1521, 1681, 4624, 5625$ atau 9409.

3. Pada gambar berikut, $\triangle ABP$ adalah segitiga sama kaki, dengan $AB = BP$ dan titik C pada BP. Hitunglah volume dari benda yang diperoleh dari hasil pemutaran $\triangle ABC$ mengelilingi garis AP



Uraian Jawaban :
Misalkan titik D dan E berturut-turut adalah proyeksi dari titik C dan B pada AP



Dengan teorema *phytagoras* pada $\triangle ABE$ diperoleh

$$BE = \sqrt{AB^2 - AE^2} = \sqrt{18^2 - 6^2} = \sqrt{288} = 12\sqrt{2}$$

Perhatikan pula bahwa $\triangle ABP$ sebangun dengan $\triangle CAP$ oleh karena itu diperoleh

$$\frac{CP}{AP} = \frac{AP}{BP} \Leftrightarrow CP = \frac{AP}{BP} \times AP = 8$$

Selanjutnya karena $\triangle CDP$ sebangun dengan $\triangle BEP$ diperoleh

$$\frac{CD}{CP} = \frac{BE}{BP} \Leftrightarrow CD = \frac{BE}{BP} \times CP = \frac{16}{3}\sqrt{2}$$

Misalkan V_1 adalah volume bangun ruang yang diperoleh dari hasil pemutaran $\triangle ABP$ mengelilingi garis AP dan V_2 adalah volume bangun ruang yang diperoleh dari hasil pemutaran $\triangle ACP$ mengelilingi garis AP maka diperoleh

$$V_1 = \frac{1}{3} \times \pi \times BE^2 \times AP \quad \text{dan} \quad V_2 = \frac{1}{3} \times \pi \times CD^2 \times AP$$

Oleh karena itu, volume dari bangun ruang yang diperoleh dari hasil pemutaran $\triangle ABC$ mengelilingi garis AP yaitu

$$\begin{aligned} V_1 - V_2 &= \frac{1}{3} \times \pi \times (BE^2 - CD^2) \times AP \\ &= \frac{1}{3} \times \pi \times \left(288 - \frac{512}{9}\right) \times 12 \\ &= \frac{8320}{9}\pi \end{aligned}$$

4. Acara perpisahan suatu kelas dihadiri oleh 10 siswa laki-laki dan 12 siswa perempuan. Wali kelas dari kelas tersebut menyediakan enam hadiah untuk siswa yang dipilih secara acak. Hadiah yang disediakan adalah satu buah tas sekolah, dua buah novel, dan tiga buah kalkulator. Jika total siswa

laki-laki yang mendapat hadiah sama banyak dengan total siswa perempuan yang mendapat hadiah, ada berapa banyak susunan yang mungkin dari siswa yang mendapat hadiah?

Uraian Jawaban :
Untuk memudahkan penulisan misalkan tas sekolah dilambangkan dengan a, novel dilambangkan dengan b, dan kalkulator dilambangkan dengan c. Selain itu kita definisikan pula lambang $a_1a_2a_3\cdots a_n$ menyatakan susunan hadiah yang diterima oleh seorang siswa. Tentu saja semua permutasi dari susunan $a_1a_2a_3\cdots a_n$ dianggap sama. Sebagai contoh jika seorang siswa mendapatkan 1 tas, 2 novel dan 1 kalkulator maka kita lambangkan $abbc$ atau permutasinya juga boleh.

Karena diketahui total siswa laki-laki yang mendapat hadiah sama banyak dengan total siswa perempuan yang mendapat hadiah maka ada tiga kasus yang mungkin yaitu

(i) 1 siswa laki-laki dan 1 siswa perempuan yang mendapatkan hadiah.
Misalkan siswa laki-laki yang mendapatkan hadiah tersebut dilambangkan L_1 dan siswa perempuan yang mendapatkan hadiah tersebut dilambangkan P_1. Untuk kasus pertama, terdapat lima subkasus yang mungkin yaitu

(a) L_1 mendapatkan 1 hadiah dan P_1 mendapatkan 5 hadiah. Ada 3 kemungkinan cara berbeda L_1 mendapatkan hadiah yaitu a, b atau c. Sedangkan P_1 menerima sisanya. Jadi, untuk subkasus ini terdapat 3 cara berbeda.

(b) L_1 mendapatkan 2 hadiah dan P_1 mendapatkan 4 hadiah. Ada 5 kemungkinan cara berbeda L_1 mendapatkan hadiah yaitu ab, ac, bb, bc atau cc. Sedangkan P_1 menerima sisanya. Jadi, untuk subkasus ini terdapat 5 cara berbeda.

(c) L_1 mendapatkan 3 hadiah dan P_1 mendapatkan 3 hadiah. Ada 6 kemungkinan cara berbeda L_1 mendapatkan hadiah yaitu abb, abc, acc, bbc, bcc atau ccc. Sedangkan P_1 menerima sisanya. Jadi, untuk subkasus ini terdapat 6 cara berbeda.

(d) L_1 mendapatkan 4 hadiah dan P_1 mendapatkan 2 hadiah. Banyaknya cara sama seperti pada subkasus (b), tinggal menukar hadiah antara L_1 dan P_1 saja. Jadi, untuk subkasus ini terdapat 5 cara berbeda.

(e) L_1 mendapatkan 5 hadiah dan P_1 mendapatkan 1 hadiah. Banyaknya cara sama seperti pada subkasus (a), tinggal menukar hadiah antara L_1 dan P_1 saja. Jadi, untuk subkasus ini terdapat 3 cara berbeda.

Dari kelima subkasus di atas diperoleh ada $3+5+6+5+3 = 22$ cara berbeda untuk membagikan keenam hadiah kepada L_1 dan P_1. Namun karena untuk memilih L_1 ada $\binom{10}{1} = 10$ cara dan untuk memilih P_1 ada $\binom{12}{1} = 12$ cara, maka untuk kasus pertama total ada $10 \times 12 \times 22 = 2640$ cara.

(ii) 2 siswa laki-laki dan 2 siswa perempuan yang mendapatkan hadiah.
Untuk kasus kedua terdapat dua subkasus yaitu

(a) Keenam hadiah dibagikan dengan format 3-1-1-1 artinya satu siswa mendapat 3 hadiah dan tiga siswa lainnya masing-masing mendapatkan 1 hadiah. Ada enam susunan berbeda yang mungkin yaitu

- Hadiah dibagikan dalam format $abb - c - c - c$, banyak cara pembagian berbeda ada $\frac{4!}{3!} = 4$ cara.

- Hadiah dibagikan dalam format $abc - b - c - c$, banyak cara pembagian berbeda ada $\frac{4!}{2!} = 12$ cara.
- Hadiah dibagikan dalam format $acc - b - b - c$, banyak cara pembagian berbeda ada $\frac{4!}{2!} = 12$ cara.
- Hadiah dibagikan dalam format $bbc - a - c - c$, banyak cara pembagian berbeda ada $\frac{4!}{2!} = 12$ cara.
- Hadiah dibagikan dalam format $bcc - a - b - c$, banyak cara pembagian berbeda ada $4! = 24$ cara.
- Hadiah dibagikan dalam format $ccc - a - b - b$, banyak cara pembagian berbeda ada $\frac{4!}{2!} = 12$ cara.

Jadi, untuk subkasus pertama total ada $4 + 12 \times 4 + 24 = 76$ cara pembagian hadiah berbeda.

(b) Keenam hadiah dibagikan dengan format 2-2-1-1 artinya dua siswa mendapatkan masing-masing 2 hadiah dan dua siswa lainnya masing-masing mendapatkan 1 hadiah. Ada delapan susunan berbeda yang mungkin yaitu

- Hadiah dibagikan dalam format $ab - bc - c - c$, banyak cara pembagian berbeda ada $\frac{4!}{2!} = 12$ cara.
- Hadiah dibagikan dalam format $ab - cc - b - c$, banyak cara pembagian berbeda ada $4! = 24$ cara.
- Hadiah dibagikan dalam format $ac - bb - c - c$, banyak cara pembagian berbeda ada $\frac{4!}{2!} = 12$ cara.
- Hadiah dibagikan dalam format $ac - bc - b - c$, banyak cara pembagian berbeda ada $4! = 24$ cara.
- Hadiah dibagikan dalam format $ac - cc - b - b$, banyak cara pembagian berbeda ada $\frac{4!}{2!} = 12$ cara.
- Hadiah dibagikan dalam format $bb - cc - a - c$, banyak cara pembagian berbeda ada $4! = 24$ cara.
- Hadiah dibagikan dalam format $bc - bc - a - c$, banyak cara pembagian berbeda ada $\frac{4!}{2!} = 12$ cara.
- Hadiah dibagikan dalam format $bc - cc - a - b$, banyak cara pembagian berbeda ada $4! = 24$ cara.

Jadi, untuk subkasus kedua total ada $4 \times 12 + 4 \times 24 = 144$ cara pembagian hadiah berbeda.

Dari kedua subkasus di atas diperoleh ada $76 + 144 = 220$ cara berbeda untuk membagikan keenam hadiah kepada 2 siswa laki-laki dan 2 siswa perempuan. Namun karena untuk memilih 2 siswa laki-laki ada $\binom{10}{2} = 45$ cara dan untuk memilih 2 siswa perempuan ada $\binom{12}{2} = 66$ cara, maka untuk kasus kedua total ada $220 \times 45 \times 66 = 653400$ cara.

(iii) 3 siswa laki-laki dan 3 siswa perempuan yang mendapatkan hadiah.
Untuk kasus ketiga karena yang mendapatkan hadiah adalah 3 siswa laki-laki dan 3 siswa perempuan maka masing-masing siswa tepat mendapatkan satu hadiah. Banyaknya cara

pembagian keenam hadiah tersebut ekuivalen dengan banyaknya permutasi dari $abbccc$ yaitu ada sebanyak $\frac{6!}{2!3!} = 60$. Sementara untuk memilih 3 siswa laki-laki ada $\binom{10}{3} = 120$ cara dan untuk memilih 3 siswa perempuan ada $\binom{12}{3} = 220$ cara, maka untuk kasus ketiga total ada $60 \times 120 \times 220 = 1584000$ cara.

Berdasarkan ketiga kasus di atas, banyaknya susunan yang mungkin dari siswa yang mendapat hadiah yaitu $2640 + 653400 + 1584000 = 2240040$.

5. Diketahui $S = \{1945, 1946, 1947, \cdots, 2016, 2017\}$. Jika $A = \{a, b, c, d, e\}$ himpunan bagian dari S dengan $a + b + c + d + e$ habis dibagi 5, tentukan banyak A yang mungkin

Uraian Jawaban :
Himpunan S terdiri 73 bilangan, dengan rincian

- Terdapat 15 bilangan kelipatan 5.
- Terdapat 15 bilangan yang bersisa 1 jika dibagi 5.
- Terdapat 15 bilangan yang bersisa 2 jika dibagi 5.
- Terdapat 14 bilangan yang bersisa 3 jika dibagi 5.
- Terdapat 14 bilangan yang bersisa 4 jika dibagi 5.

Karena kita akan mencari banyaknya himpunan $A = \{a, b, c, d, e\}$ *subset* dari S dengan syarat $5 \mid a + b + c + d + e$ maka kita cukup melihat sisa dari a, b, c, d, e jika dibagi 5. Asalkan jumlah masing-masing sisanya habis dibagi 5 maka jumlah kelima bilangan tersebut pasti habis dibagi 5. Misalkan S_A adalah himpunan yang angota-anggotanya ialah sisa dari anggota-anggota himpunan A jika dibagi 5. Ada 26 kasus yang memenuhi yaitu

(1) $S_A = \{0, 0, 0, 0, 0\}$. Banyaknya himpunan A yang memenuhi yaitu $\binom{15}{5} = 3003$

(2) $S_A = \{4, 1, 0, 0, 0\}$. Banyaknya himpunan A yang memenuhi yaitu $\binom{14}{1} \times \binom{15}{1} \times \binom{15}{3} = 95550$

(3) $S_A = \{3, 2, 0, 0, 0\}$. Banyaknya himpunan A yang memenuhi yaitu $\binom{14}{1} \times \binom{15}{1} \times \binom{15}{3} = 95550$

(4) $S_A = \{3, 1, 1, 0, 0\}$. Banyaknya himpunan A yang memenuhi yaitu $\binom{14}{1} \times \binom{15}{2} \times \binom{15}{2} = 154350$

(5) $S_A = \{2, 2, 1, 0, 0\}$. Banyaknya himpunan A yang memenuhi yaitu $\binom{15}{2} \times \binom{15}{1} \times \binom{15}{2} = 165375$

(6) $S_A = \{2, 1, 1, 1, 0\}$. Banyaknya himpunan A yang memenuhi yaitu $\binom{15}{1} \times \binom{15}{3} \times \binom{15}{1} = 102375$

(7) $S_A = \{1, 1, 1, 1, 1\}$. Banyaknya himpunan A yang memenuhi yaitu $\binom{15}{5} = 3003$

(8) $S_A = \{4, 4, 2, 0, 0\}$. Banyaknya himpunan A yang memenuhi yaitu $\binom{14}{2} \times \binom{15}{1} \times \binom{15}{2} = 143325$

(9) $S_A = \{4,4,1,1,0\}$. Banyaknya himpunan A yang memenuhi yaitu $\binom{14}{2} \times \binom{15}{2} \times \binom{15}{1} = 143325$

(10) $S_A = \{4,3,3,0,0\}$. Banyaknya himpunan A yang memenuhi yaitu $\binom{14}{1} \times \binom{14}{2} \times \binom{15}{2} = 133770$

(11) $S_A = \{4,3,2,1,0\}$. Banyaknya himpunan A yang memenuhi yaitu $\binom{14}{1} \times \binom{14}{1} \times \binom{15}{1} \times \binom{15}{1} \times \binom{15}{1} = 661500$

(12) $S_A = \{4,3,1,1,1\}$. Banyaknya himpunan A yang memenuhi yaitu $\binom{14}{1} \times \binom{14}{1} \times \binom{15}{3} = 89180$

(13) $S_A = \{4,2,2,2,0\}$. Banyaknya himpunan A yang memenuhi yaitu $\binom{14}{1} \times \binom{15}{3} \times \binom{15}{1} = 95550$

(14) $S_A = \{4,2,2,1,1\}$. Banyaknya himpunan A yang memenuhi yaitu $\binom{14}{1} \times \binom{15}{2} \times \binom{15}{2} = 154350$

(15) $S_A = \{3,3,3,1,0\}$. Banyaknya himpunan A yang memenuhi yaitu $\binom{14}{3} \times \binom{15}{1} \times \binom{15}{1} = 81900$

(16) $S_A = \{3,3,2,2,0\}$. Banyaknya himpunan A yang memenuhi yaitu $\binom{14}{2} \times \binom{15}{2} \times \binom{15}{1} = 143325$

(17) $S_A = \{3,3,2,1,1\}$. Banyaknya himpunan A yang memenuhi yaitu $\binom{14}{2} \times \binom{15}{1} \times \binom{15}{2} = 143325$

(18) $S_A = \{3,2,2,2,1\}$. Banyaknya himpunan A yang memenuhi yaitu $\binom{14}{1} \times \binom{15}{3} \times \binom{15}{1} = 95550$

(19) $S_A = \{2,2,2,2,2\}$. Banyaknya himpunan A yang memenuhi yaitu $\binom{15}{5} = 3003$

(20) $S_A = \{4,4,4,3,0\}$. Banyaknya himpunan A yang memenuhi yaitu $\binom{14}{3} \times \binom{14}{1} \times \binom{15}{1} = 76440$

(21) $S_A = \{4,4,4,2,1\}$. Banyaknya himpunan A yang memenuhi yaitu $\binom{14}{3} \times \binom{15}{1} \times \binom{15}{1} = 81900$

(22) $S_A = \{4,4,3,3,1\}$. Banyaknya himpunan A yang memenuhi yaitu $\binom{14}{2} \times \binom{14}{2} \times \binom{15}{1} = 124215$

(23) $S_A = \{4,4,3,2,2\}$. Banyaknya himpunan A yang memenuhi yaitu $\binom{14}{2} \times \binom{14}{1} \times \binom{15}{2} = 133770$

(24) $S_A = \{4,3,3,3,2\}$. Banyaknya himpunan A yang memenuhi yaitu $\binom{14}{1} \times \binom{14}{3} \times \binom{15}{1} = 76440$

(25) $S_A = \{3,3,3,3,3\}$. Banyaknya himpunan A yang memenuhi yaitu $\binom{14}{5} = 2002$

(26) $S_A = \{4,4,4,4,4\}$. Banyaknya himpunan A yang memenuhi yaitu $\binom{14}{5} = 2002$

Dari ke-26 kasus di atas maka banyaknya himpunan A yang mungkin yaitu

$$\begin{aligned}2 \times 2002 + 3 \times 3003 + 2 \times 76440 + 2 \times 81900 + 89180 + 4 \times 95550 \\ + 102375 + 124215 + 2 \times 133770 + 4 \times 143325 + 2 \times 154350 + 165375 + 661500 \\ = 3004078\end{aligned}$$

6. Parabola $y = ax^2 + bx$, $a < 0$, memiliki titik puncak C dan memotong sumbu-x di titik A dan B yang berbeda. Garis $y = ax$ memotong parabola tersebut di titik berbeda A dan D. Jika luas segitiga ABC sama dengan $|ab|$ kali luas segitiga ABD, tentukan nilai b sebagai fungsi dari a tanpa menggunakan tanda nilai mutlak.

   Catatan : $|x|$ disebut nilai mutlak x dengan

$$|x| = \begin{cases} -x, & \text{jika } x < 0; \\ x, & \text{jika } x \geq 0. \end{cases}$$

   Uraian Jawaban :
   Karena parabola $y = ax^2 + bx$ memotong sumbu-x di dua titik berbeda maka $b \neq 0$. Selanjutnya mudah didapat bahwa $A(0,0)$ dan $B\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$. Sedangkan absis dari titik C yaitu $x = -\frac{b}{2a}$ dan ordinat dari titik C yaitu $y = -\frac{b^2}{4a}$. Untuk mencari absis titik D bisa diperoleh dengan menyelesaikan persamaan $ax^2 + bx = ax$ yaitu $x = \frac{a-b}{a}$. Untuk mencari ordinat titik D bisa diperoleh dengan mensubstitusikan $x = \frac{a-b}{a}$ ke persamaan garis $y = ax$, diperoleh $y = a - b$.
   Perhatikan bahwa

$$[ABC] = \frac{1}{2} \times \left|-\frac{b}{a}\right| \times \left|-\frac{b^2}{4a}\right| \quad \text{dan} \quad [ABD] = \frac{1}{2} \times \left|-\frac{b}{a}\right| \times |a-b|$$

   karena diketahui $[ABC] = |ab|\,[ABD]$ diperoleh

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \times \left|-\frac{b}{a}\right| \times \left|-\frac{b^2}{4a}\right| &= |ab| \times \frac{1}{2} \times \left|-\frac{b}{a}\right| \times |a-b| \\ \left|-\frac{b^2}{4a}\right| &= |ab| \times |a-b| \\ -\frac{b^2}{4a} &= |ab| \times |a-b| \qquad (1)\end{aligned}$$

   Dari persamaan (1) jika $a = b$ maka ruas kanan akan bernilai 0 sementara ruas kiri positif, kontradiksi. Jadi, $a \neq b$. Selanjutnya kita bagi menjadi tiga kasus.

   - Jika $b < a$ maka persamaan (1) ekuivalen dengan

$$\begin{aligned}-\frac{b^2}{4a} &= ab \times (a-b) \\ -b &= 4a^2(a-b) \\ b &= \frac{4a^3}{4a^2-1}\end{aligned}$$

Dari kondisi

$$\frac{4a^3}{4a^2-1} = b < a \Leftrightarrow \frac{a}{4a^2-1} < 0$$

diperoleh $a < -\frac{1}{2}$.

- Jika $a < b < 0$ maka persamaan (1) ekuivalen dengan

$$\begin{aligned} -\frac{b^2}{4a} &= ab \times (b-a) \\ -b &= 4a^2(b-a) \\ b &= \frac{4a^3}{4a^2+1} \end{aligned}$$

Dari kondisi

$$\frac{4a^3}{4a^2+1} = b > a \Leftrightarrow \frac{-a}{4a^2+1} > 0$$

diperoleh $a < 0$.

- Jika $b > 0$ maka persamaan (1) ekuivalen dengan

$$\begin{aligned} -\frac{b^2}{4a} &= (-ab) \times (b-a) \\ b &= 4a^2(b-a) \\ b &= \frac{4a^3}{4a^2-1} \end{aligned}$$

Dari kondisi

$$\frac{4a^3}{4a^2-1} = b > 0$$

diperoleh $-\frac{1}{2} < a < 0$.

Dari ketiga kasus di atas diperoleh dua kemungkinan fungsi b (dalam variabel a) yaitu

$$b = \frac{4a^3}{4a^2-1}, \quad \text{untuk setiap } a < 0 \text{ dan } a \neq -\frac{1}{2}$$

atau

$$b = \frac{4a^3}{4a^2+1}, \quad \text{untuk setiap } a < 0$$

7. Diketahui a adalah bilangan prima dan k adalah bilangan bulat positif. Jika $\sqrt{k^2-ak}$ adalah bilangan bulat positif, tentukan nilai k sebagai fungsi dari a

Uraian Jawaban :

Agar $\sqrt{k^2-ak}$ adalah bilangan bulat positif maka $k^2 - ak = k(k-a)$ adalah bilangan kuadrat sempurna positif.

Jika $k = a$ maka $\sqrt{k^2-ak} = 0$, kontradiksi. Jadi, $k \neq a$. Selanjutnya jika $a = 2$ dan $k = 1$ maka $k^2 - ak = -1$ yang jelas bukan bilangan kuadrat sempurna. Sedangkan untuk $k \geq 3$ diperoleh

$$(k-2)^2 = k^2 - 4k + 4 < k^2 - 2k < k^2 - 2k + 1 = (k-1)^2$$

Jadi, $k^2 - 2k$ jelas bukan bilangan kuadrat sempurna. Oleh karena itu diperoleh a adalah bilangan prima ganjil.

Misalkan $FPB(k, k-a) = d$ diperoleh $d \mid k$ dan $d \mid (k-a)$ akibatnya $d \mid a$. Oleh karena itu, $d = 1$ atau $d = a$.

(i) Jika $d = 1$ maka k dan $k - a$ keduanya saling prima. Agar $k(k-a)$ menjadi bilangan kuadrat maka k dan $k - a$ keduanya bilangan kuadrat. Misal $k = m^2$ dan $k - a = n^2$ dengan m dan n bilangan bulat positif. Akibatnya diperoleh

$$m^2 - a = n^2 \quad \Rightarrow \quad a = m^2 - n^2 = (m+n)(m-n)$$

karena a prima, akibatnya $m - n = 1$ dan $m + n = a$. Oleh karena itu $m = \dfrac{a+1}{2}$. Sehingga diperoleh $k = m^2 = \left(\dfrac{a+1}{2}\right)^2$. Mudah dicek bahwa jika $k = \left(\dfrac{a+1}{2}\right)^2$ diperoleh

$$\sqrt{k^2 - ak} = \left(\frac{a+1}{2}\right)\left(\frac{a-1}{2}\right)$$

yang jelas merupakan bilangan bulat positif.

(ii) Jika $d = a$ maka diperoleh $k = ax$ dan $k - a = ay$ dengan x dan y bilangan bulat positif yang saling prima. Dari $k = ax$ dan $k - a = ay$ diperoleh $y = x - 1$. Akibatnya

$$k^2 - ak = k(k-a) = ax \cdot ay = a^2x(x-1) = a^2(x^2 - x)$$

sehingga $x^2 - x$ haruslah berupa bilangan kuadrat. Namun untuk $x \geq 2$ kita memiliki

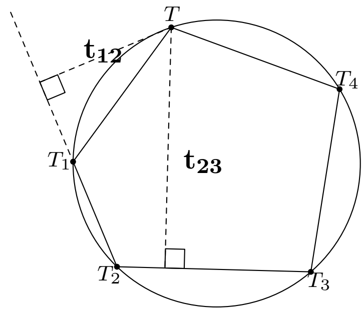
$$(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1 < x^2 - x < x^2$$

Jadi, jelas untuk $x \geq 2$ maka $x^2 - x$ bukan bilangan kuadrat. Sedangkan untuk $x = 1$ diperoleh $k = a$, kontradiksi. Jadi untuk kasus $d = a$ tidak ada solusi yang memenuhi.

Oleh karena itu untuk setiap bilangan prima ganjil a diperoleh $k = \left(\dfrac{a+1}{2}\right)^2$.

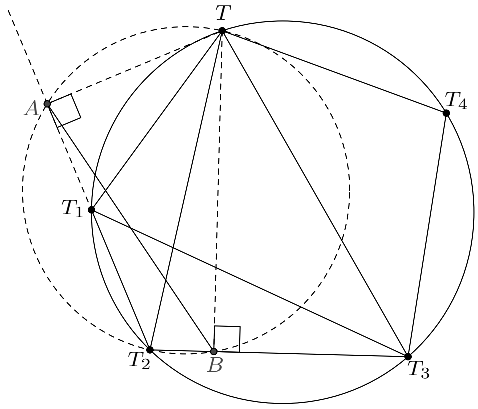
8. Terdapat lima titik berbeda, T_1, T_2, T_3, T_4, dan T pada sebuah lingkaran Ω. Misalkan t_{ij} adalah jarak dari titik T ke garis T_iT_j atau perpanjangannya. Buktikan bahwa

$$\frac{t_{ij}}{t_{jk}} = \frac{TT_i}{TT_k} \quad \text{dan} \quad \frac{t_{12}}{t_{24}} = \frac{t_{13}}{t_{34}}$$



Uraian Jawaban :

Misalkan titik A dan B berturut-turut adalah proyeksi titik T pada garis T_iT_j dan garis T_jT_k. Sebagai ilustrasi dapat dilihat pada gambar di bawah ini.



Perhatikan bahwa $\angle TAT_j = 90^\circ = \angle TBT_j$. Akibatnya TAT_jB adalah segiempat talibusur. Oleh karena itu diperoleh

$$\angle TAB = \angle TT_jB = \angle TT_jT_k = \angle TT_iT_k$$

dan

$$\angle TBA = \angle TT_jA = \angle TT_jT_i = \angle TT_kT_i$$

Sehingga diperoleh segitiga TAB sebangun dengan segitiga TT_iT_k. Akibatnya,

$$\frac{TT_i}{TT_k} = \frac{TA}{TB} = \frac{t_{ij}}{t_{jk}} \tag{2}$$

Berdasarkan persamaan (2) diperoleh

$$\frac{t_{12}}{t_{24}} = \frac{TT_1}{TT_4} = \frac{t_{13}}{t_{34}}$$

Jadi, terbukti bahwa $\dfrac{t_{ij}}{t_{jk}} = \dfrac{TT_i}{TT_k}$ dan $\dfrac{t_{12}}{t_{24}} = \dfrac{t_{13}}{t_{34}}$

9. Diberikan barisan bilangan bulat positif 7-angka $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{2017}$ dengan $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_{2017}$. Setiap suku tersebut memiliki angka-angka penyusun dengan urutan tak-naik. Diketahui $a_1 = 1000000$ dan a_{n+1} adalah bilangan terkecil yang mungkin yang lebih besar dari a_n. Sebagai contoh diperoleh $a_2 = 1100000$ dan $a_3 = 1110000$. Tentukan a_{2017}

   Uraian Jawaban :

   Untuk memudahkan kita definisikan barisan baru yaitu barusan $\{b_n\}$ dengan definisi $b_1 = 0000000$ dan untuk $n \geq 2$, $b_n = a_{n-1}$. Oleh karena itu, selanjutnya kita akan mencari nilai b_{2018}.

Misalkan N_{ij} adalah banyaknya bilangan yang terdiri dari i digit yaitu $n_1n_2n_3\cdots n_i$ yang memiliki digit-digit penyusun dengan urutan tak-naik serta $n_1 = j$, maka diperoleh

$$N_{ij} = \binom{i+j-1}{i-1}$$

Bukti : karena $n_1 = j$ maka $j \geq n_2 \geq n_3 \geq n_3 \geq \cdots \geq n_i$. Misalkan x_k menyatakan banyaknya digit k yang muncul pada bilangan $n_1n_2n_3\cdots n_i$. Perhatikan bahwa banyaknya bilangan $n_1n_2n_3\cdots n_i$ ekuivalen dengan banyaknya solusi dari persamaan

$$x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_j = i - 1$$

yaitu ada sebanyak $\binom{i+j-1}{i-1}$. Terbukti $N_{ij} = \binom{i+j-1}{i-1}$
Sebagai ilustrasi untuk $i = 7$ dan $j = 3$ maka diperoleh persamaan $x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = 6$. Contoh solusi $(0, 0, 2, 4)$ akan ekuivalen dengan bilangan 3333322, solusi $(1, 2, 3, 0)$ akan ekuivalen dengan bilangan 3222110, solusi $(6, 0, 0, 0)$ akan ekuivalen dengan bilangan 3000000 dan seterusnya. Jadi banyaknya bilangan $n_1n_2n_3\cdots n_7$ dengan $n_1 = 3$ yaitu $\binom{9}{6}$.

Selanjutnya definisikan T_{ij} adalah banyaknya bilangan yang terdiri dari i digit yaitu $n_1n_2n_3\cdots n_i$ yang memiliki digit-digit penyusun dengan urutan tak-naik serta $0 \leq n_1 \leq j$, maka diperoleh

$$\begin{aligned} T_{ij} &= N_{i0} + N_{i1} + N_{i2} + \cdots + N_{ij} \\ &= \binom{i-1}{i-1} + \binom{i}{i-1} + \binom{i+1}{i-1} + \cdots + \binom{i+j-1}{i-1} \\ &= \binom{i+j}{i} \end{aligned}$$

Sekarang kembali ke permasalahan pada soal. Misalkan $b_{2018} = n_1n_2n_3\cdots n_7$. Karena $T_{76} = 1716$ dan $T_{77} = 3432$ maka $n_1 = 7$. Oleh karena itu, b_{2018} adalah bilangan urutan $2018 - 1716 = 302$ dari bilangan $n_1n_2n_3\cdots n_7$ dengan $n_1 = 7$. Karena $T_{64} = 210$ dan $T_{65} = 462$ maka $n_2 = 5$. Oleh karena itu, b_{2018} adalah bilangan urutan $2018 - 1716 - 210 = 92$ dari bilangan $n_1n_2n_3\cdots n_7$ dengan $n_1 = 7$ dan $n_2 = 5$. Karena $T_{53} = 56$ dan $T_{54} = 126$ maka $n_3 = 4$. Oleh karena itu, b_{2018} adalah bilangan urutan $2018 - 1716 - 210 - 56 = 36$ dari bilangan $n_1n_2n_3\cdots n_7$ dengan $n_1 = 7$, $n_2 = 5$ dan $n_3 = 4$. Karena $T_{43} = 35$ dan $T_{44} = 70$ maka $n_4 = 4$. Oleh karena itu, b_{2018} adalah bilangan urutan $2018 - 1716 - 210 - 56 - 35 = 1$ dari bilangan $n_1n_2n_3\cdots n_7$ dengan $n_1 = 7$, $n_2 = 5$, $n_3 = 4$ dan $n_4 = 4$. Jadi, jelas bahwa $b_{2018} = 7544000$.

Jadi, diperoleh bahwa $a_{2017} = b_{2018} = 7544000$

10. Pada kilang minyak di daerah Duri, tersedia pompa-1 dan pompa-2. Kedua pompa tersebut digunakan untuk mengisi tangki penampungan dengan volume V. Tangki tersebut dapat diisi penuh menggunakan pompa-1 saja dalam waktu empat jam, atau menggunakan pompa-2 saja dalam waktu enam jam. Mula-mula kedua pompa digunakan secara bersamaan dalam waktu a jam. Kemudian, pengisian dilanjutkan dengan hanya menggunakan pompa-1 selama b jam dan dilanjutkan lagi dengan hanya menggunakan pompa-2 selama c jam. Jika biaya operasional pompa-1 adalah $15(a+b)$ ribu per jam dan biaya operasional pompa-2 adalah $4(a+c)$ ribu per jam, tentukan b dan c agar biaya operasional seluruh pompa adalah minimum (nyatakan b dan c sebagai fungsi dari a). Tentukan juga nilai a yang mungkin.

Uraian Jawaban :

Diketahui kecepatan pompa-1 adalah $\frac{V}{4}$ satuan volume/jam, dan kecepatan pompa-2 adalah $\frac{V}{6}$ satuan volume/jam.

Oleh karena itu agar tangki penuh haruslah dipenuhi persamaan berikut

$$\begin{aligned} \frac{Va}{4} + \frac{Va}{6} + \frac{Vb}{4} + \frac{Vc}{6} &= V \\ 3(a+b) + 2(a+c) &= 12 \qquad (3) \end{aligned}$$

Selain itu, biaya yang diperlukan untuk mengisi tangki sampai penuh adalah

$$15(a+b)^2 + 4(a+c)^2 \quad \text{(dalam ribuan)} \qquad (4)$$

Misalkan $a+b=x$ maka dari persamaan (3) diperoleh $a+c = \frac{12-3(a+b)}{2} = \frac{12-3x}{2}$. Jika kedua nilai ini disubstitusikan ke persamaan (4) diperoleh

$$\begin{aligned} 15(a+b)^2 + 4(a+c)^2 &= 15x^2 + 4\left(\frac{12-3x}{2}\right)^2 \\ &= 15x^2 + (12-3x)^2 \\ &= 6(4x^2 - 12x + 9 + 15) \\ &= 6(2x-3)^2 + 90 \qquad (5) \end{aligned}$$

Oleh karena itu, dari persamaan (5) diperoleh biaya operasional minimum adalah 90 ribu yang dicapai ketika $x = \frac{3}{2}$.

Jadi, agar biaya operasional seluruh pompa minimum maka

$$a+b = x = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{3}{2} - a \qquad (6)$$

$$a+c = \frac{12-3x}{2} = \frac{15}{4} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{15}{4} - a \qquad (7)$$

Karena $a, b, c \geq 0$ dari persamaan (6) dan (7) diperoleh

$$a \leq \frac{3}{2} \quad \text{dan} \quad a \leq \frac{15}{4}$$

Oleh karena itu, nilai a yang mungkin yaitu $0 \leq a \leq \frac{3}{2}$.