

**ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS EN
TOPOGRAFÍA, GEODESIA Y CARTOGRAFÍA
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID**

**PROBLEMAS
TEMA 9
RESISTENCIA DE MATERIALES**

ÍNDICE

1. Fórmulas
2. Ejercicios resueltos
3. Ejercicios propuestos

1. Fórmulas

- **Tensión normal originada por esfuerzos normales**

$$\sigma = \frac{N}{\Omega}$$

Es el cociente entre el esfuerzo y el área de la sección considerada.

- **Tensión normal originada por un momento flector**

$$\sigma = \frac{M y}{I}$$

Es el resultado de multiplicar el valor del momento flector por la distancia entre la fibra de la sección considerada y la que pasa por el centro de gravedad "y", dividido entre el momento de inercia de la sección para un eje que pasa por el centro de gravedad .

En el caso de sección rectangular, el momento de inercia es el producto del ancho por el canto al cubo entre 12

$$I = \frac{1}{12} a b^3$$

- **Tensión tangencial originada por un esfuerzo cortante**

$$\tau = \frac{Q m_0}{a I}$$

Es el producto del valor del cortante por el momento estático m_0 dividido entre el ancho "a" y el momento de inercia.

El momento estático es la integral que tiene por límites la fibra considerada y la más alejada al centro de gravedad de la distancia de cada fibra por su ancho.

$$m_0 = \int_{y_0}^{y_1} y b(y) dy$$

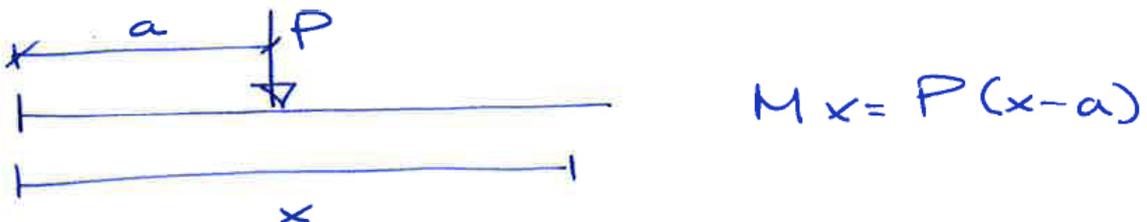
- **Cálculo de reacciones en piezas isostáticas**

Las reacciones, que serán tres, se calculan mediante las dos fórmulas de equilibrio de fuerzas y una de equilibrio de momentos tomados en cualquier punto e la pieza.

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 \\ \sum F_y &= 0 \end{aligned} \quad \sum M = 0 \text{ en cualquier punto}$$

- **Cálculo del momento originado por cargas puntuales**

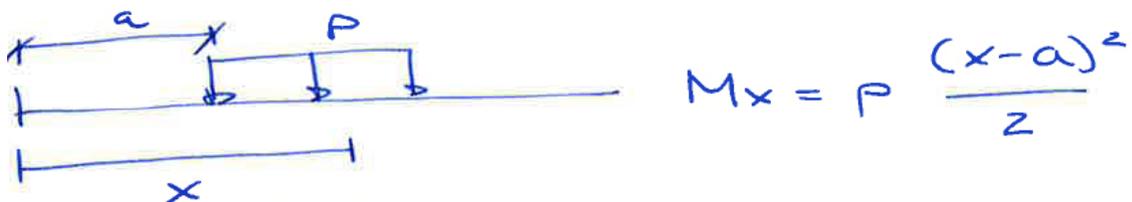
Es el resultado de multiplicar la carga por la distancia al punto considerado



$$M_x = P(x - a)$$

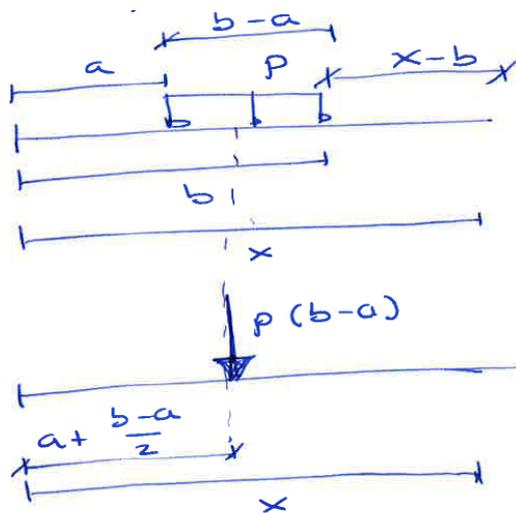
- **Cálculo del momento originado por cargas lineales**

Si el punto considerado está en el ámbito de la carga



$$M_x = P \frac{(x - a)^2}{2}$$

Si el punto está fuera del ámbito, el momento es equivalente al de una carga puntual situada en el centro del ámbito



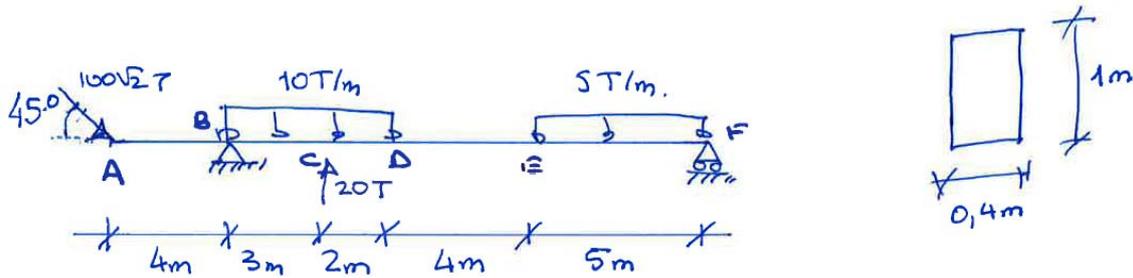
$$M_x = p(b-a) \left[x - \left(a + \frac{b-a}{2} \right) \right]$$

2. Ejercicios resueltos

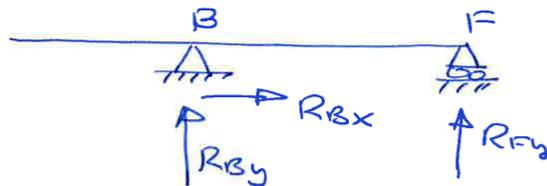
Ejercicio N° 1 (SEP 2010)

En la estructura de la figura determinar:

- Ley de axiles analítica y gráficamente (1 punto)
- Ley de cortantes analítica y gráficamente (2 puntos)
- Ley de flectores analítica y gráficamente (4 puntos)
- Máxima tensión normal, lugar y fibra donde se produce (3 puntos)



SOLUCIÓN

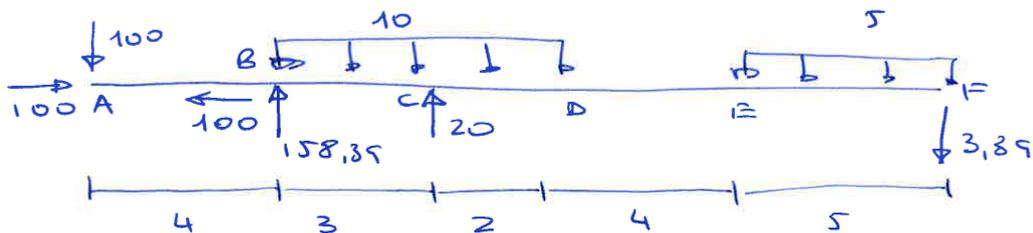


$$\sum F_x = 0 ; \quad 100 + R_{Bx} = 0 ; \quad R_{Bx} = -100T.$$

$$\sum F_y = 0 ; \quad -100 + R_{By} + 20 - 50 - 25 + R_{Fy} = 0$$

$$\sum M_F = 0 ; \quad -100 \cdot 18 + R_{By} \cdot 14 - 50 \cdot 11,5 - 25 \cdot 2,5 + 20 \cdot 11 = 0$$

$$R_{Fy} = -3,39T \quad R_{By} = 158,39T.$$



$$b) \quad Q_{AB} = -100 \text{ T}$$

$$Q_{BC} = 58,39 - 10(x-4) = -10x + 98,39 \quad \left. \begin{array}{l} Q_B^+ = 58,39 \text{ T} \\ Q_C^- = 28,39 \text{ T} \end{array} \right\}$$

$$Q_{CD} = -10x + 118,39 \quad \left. \begin{array}{l} Q_C^+ = 48,39 \text{ T} \\ Q_D = 28,39 \text{ T} \end{array} \right\}$$

$$Q_{DE} = 28,39 \text{ T}$$

$$Q_{EF} = 28,39 - 5(x-13) = -5x + 93,39 ; \quad Q_F = 3,39 \text{ T}$$

$$c) \quad M_{AB} = -100x \quad M_B = -400 \text{ mT}$$

$$M_{BC} = -100x + 158,39(x-4) - 10 \frac{(x-4)^2}{2} =$$

$$= -5x^2 + 98,39x - 713,56 \quad \left. \begin{array}{l} M_B = -400 \text{ mT} \\ M_C = -269,83 \text{ mT} \end{array} \right\}$$

$$M_{CD} = -5x^2 + 98,39x - 713,56 + 20(x-7) =$$

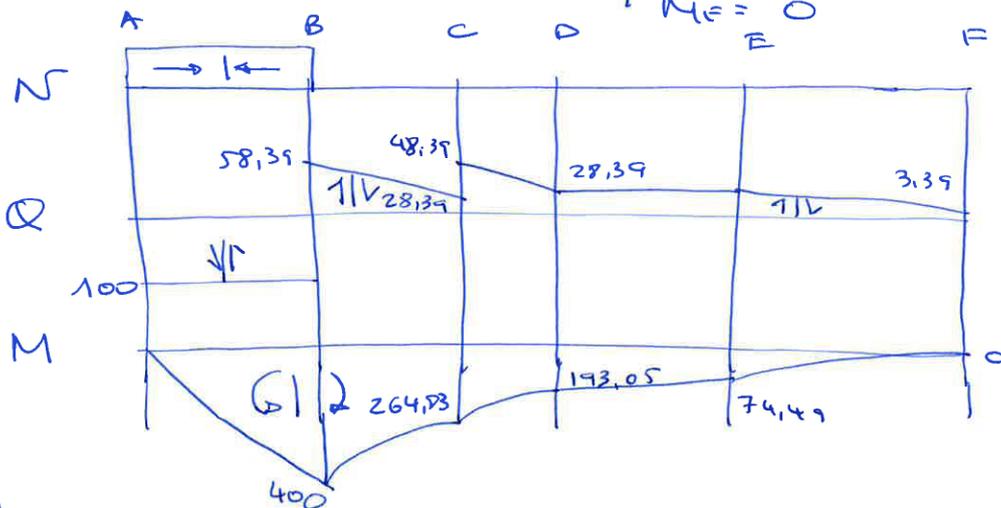
$$= -5x^2 + 118,39x - 853,56 \quad \left. \begin{array}{l} M_C = -269,83 \text{ mT} \\ M_D = -193,05 \text{ mT} \end{array} \right\}$$

$$M_{DE} = -100x + 158,39(x-4) + 20(x-7) - 50(x-6,5) =$$

$$= 28,39x - 448,56 \quad \left. \begin{array}{l} M_D = -193,05 \text{ mT} \\ M_E = -79,49 \text{ mT} \end{array} \right\}$$

$$M_{EF} = 28,39x - 448,56 - 5 \frac{(x-13)^2}{2} =$$

$$= -2,5x^2 + 93,39x - 871,06 \quad \left. \begin{array}{l} M_E = -79,49 \text{ mT} \\ M_F = 0 \end{array} \right\}$$



*) B fibra inferior

$$\sigma = \frac{M_y}{I} + \frac{N}{\Omega} = \frac{400 \cdot 0,5}{\frac{1}{12} \cdot 0,4 \cdot 1^3} + \frac{100}{0,4 \cdot 1} =$$

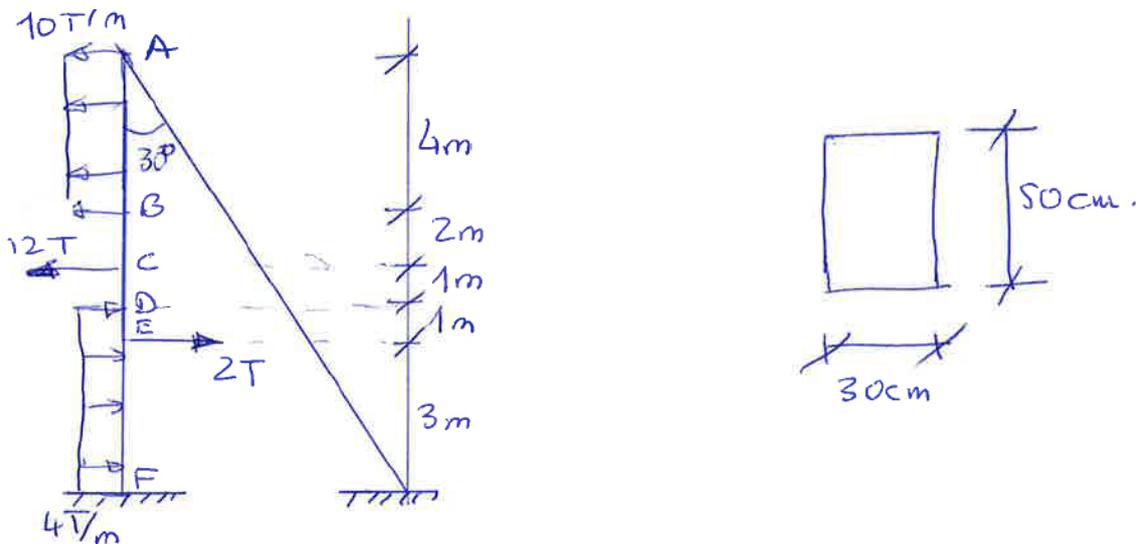
$$= 6000 + 250 = 6250 \text{ T/m}^2$$

Ejercicio N° 2 (JUN 2009)

La viga de la figura se afianza con un tirante para evitar que el momento en la base supere el valor de 52 Tm.

Calcular:

- Reacciones (1 punto)
- Ley de esfuerzos axiales analítica y gráficamente (1 punto)
- Ley de cortantes analítica y gráficamente (2 puntos)
- Ley de momentos flectores analítica y gráficamente (3 puntos)
- Máxima tensión tangencial, sección y fibra en la que se produce (3 puntos)



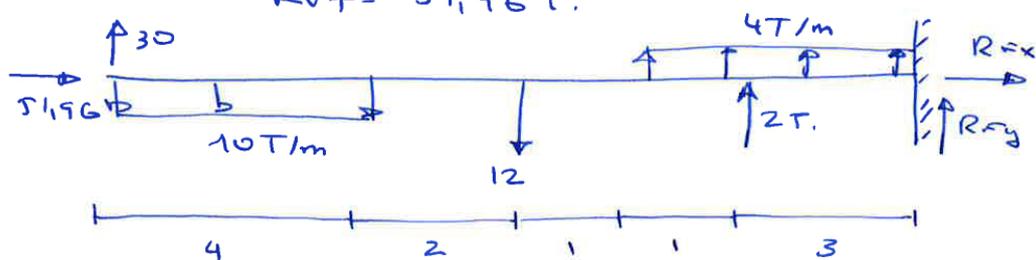
a) $\leq M_F = 52 \text{ mT.}$

$$40.9 + 12.5 - 2.3 - 16.2 - R_{HT} \cdot 11 = 52$$

$$R_{HT} = 30 \text{ T.}$$

$$R_T = \frac{30}{\sin 30} = 60 \text{ T.}$$

$$R_{VT} = 51.96 \text{ T.}$$



$$\sum F_x = 0 \quad 51.96 + R_{Fx} = 0 ; \quad R_{Fx} = -51.96 \text{ T.}$$

$$\sum F_y = 0 \quad 30 - 40 - 12 + 16 + 2 + R_{Fy} = 0$$

$$R_{Fy} = 4 \text{ T.}$$

b) $N_{AF} = 51,96T$

c) $Q_{AB} = 30 - 10x$; $Q_B = -10T$.

$Q_{BC} = -10T$.

$Q_{CD} = -22T$.

$Q_{DE} = -22 + 4(x-7) = 4x - 50$; $Q_E^- = -18T$.

$Q_{EF} = -20 + 4(x-7) = 4x - 48$; $\left. \begin{array}{l} Q_E^+ = -16T \\ Q_F = -4T. \end{array} \right\}$

d) $M_{AB} = 30x - 10 \frac{x^2}{2} = -5x^2 + 30x$; $M_B = 40Tm$

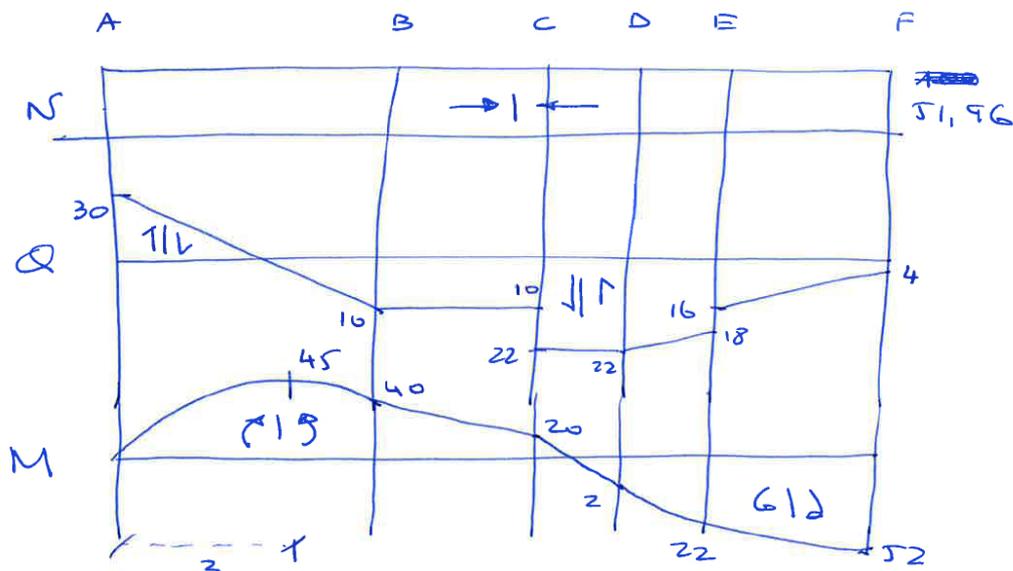
$M_{BC} = 30x - 40(x-2) = -10x + 80$; $M_C = 20Tm$.

$M_{CD} = -10x + 80 - 12(x-6) = -22x + 152$; $M_D = -2Tm$.

$M_{DE} = -22x + 152 + 4 \frac{(x-7)^2}{2} = 2x^2 - 50x + 250$; $M_E = -22Tm$

$M_{EF} = 2x^2 - 50x + 250 + 2(x-8) = 2x^2 - 48x + 234$

$M_F = -52Tm$.



e) $\tau = \frac{M_0 Q}{a I} = \frac{0,3 \cdot 0,5^2}{8} \cdot 30 \frac{1}{0,3} \frac{1}{\frac{1}{12} \cdot 0,3 \cdot 0,5^3} = 50T/m^2$

$M_0 = \int_0^{b/2} a y dy = a \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{b/2} = a \cdot b^2 \frac{1}{8}$

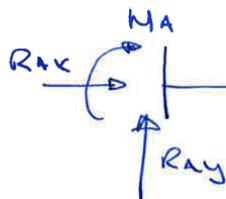
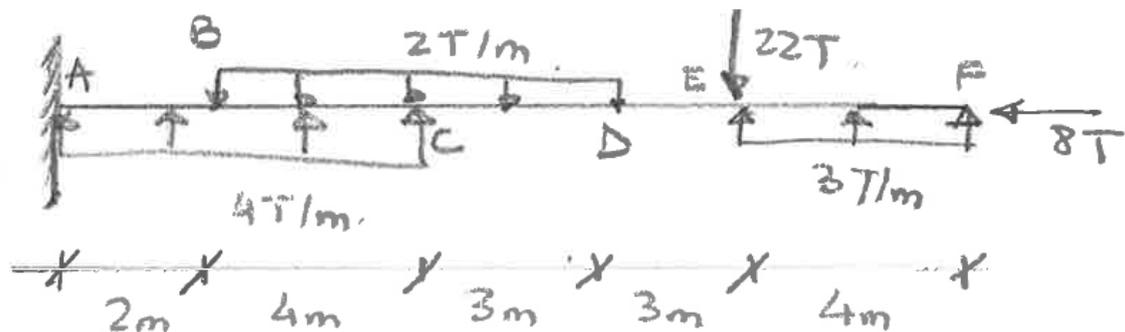
SECCION A, FIBRA CENTRAL.

Ejercicio Nº 3 (JUN 2009)

Dada la viga de la figura adjunta, con sección 50 x 30 cm (canto x ancho).

Calcular:

- Reacciones en apoyos (2 puntos)
- Ley de esfuerzos axiales analítica y gráficamente (1 punto)
- Ley de esfuerzos cortantes analítica y gráficamente (2 puntos)
- Ley de momentos flectores analítica y gráficamente (3 puntos)
- Tensión máxima normal indicando la sección y fibra donde se produce (2 puntos)



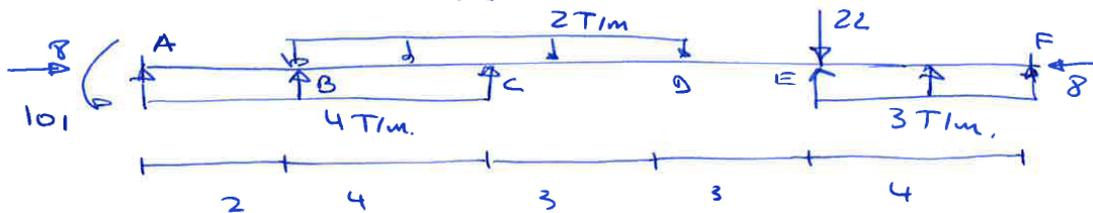
$$\sum F_x = 0 \quad R_{Ax} - 8 = 0 \quad ; \quad R_{Ax} = 8T.$$

$$\sum F_y = 0 \quad R_{Ay} + 24 - 14 - 22 + 12 = 0$$

$$R_{Ay} = 0.$$

$$\sum M_A = 0 \quad ; \quad M_A - 24 \cdot 3 + 14 \cdot 5,5 + 22 \cdot 12 - 12 \cdot 14 = 0$$

$$M_A = -101 \text{ Tm.}$$



a) $N_{AF} = 8T.$

b) $Q_{AB} = 4x \quad ; \quad Q_B = 8T.$

$$Q_{BC} = 4x - 2(x-2) = 2x + 4 \quad ; \quad Q_C = 16T.$$

$$Q_{CD} = 24 - 2(x-2) = -2x + 28 \quad ; \quad Q_D = 10T.$$

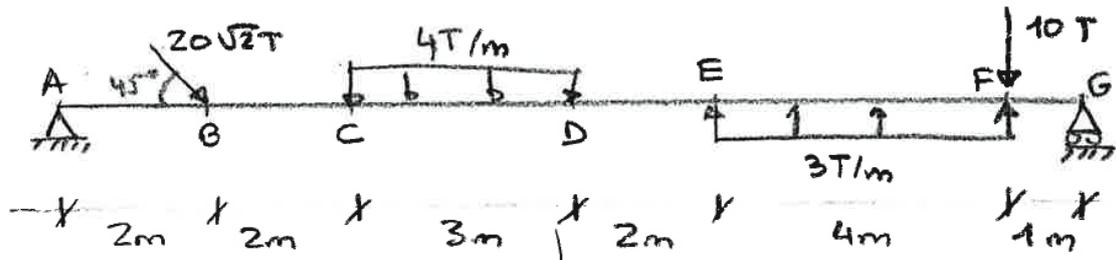
$$Q_{DE} = 10T.$$

$$Q_{EF} = 10 - 22 + 3(x-12) = 3x - 48 \quad ; \quad Q_F = 0$$

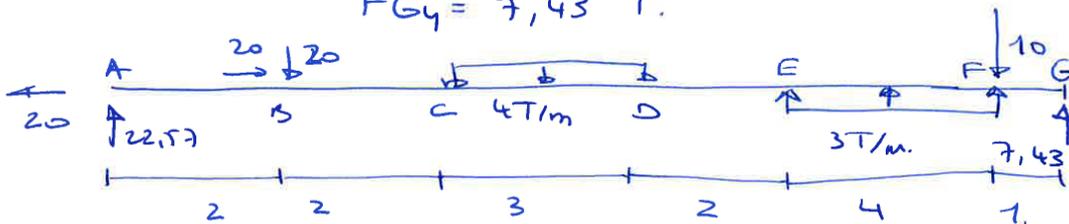
Ejercicio N° 4 (JUN 2008)

En la viga de la figura de sección 50x20 cm. (canto x ancho), calcular:

- Reacciones en apoyos (2 puntos)
- Leyes de axiles y cortantes analítica y gráficamente (3 puntos)
- Ley de flectores analítica y gráficamente (3 puntos)
- Máxima tensión normal en la fibra superior de la sección C (2 puntos)



$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 & ; F_{Ax} + 20 = 0 ; F_{Ax} = -20T. \\ \sum F_y = 0 & ; F_{Ay} - 20 - 12 + 12 - 10 + F_{Gy} = 0 \\ \sum M_G = 0 & ; F_{Ay} \cdot 14 - 20 \cdot 12 - 12 \cdot 8,5 + 12 \cdot 3 - 10 \cdot 1 = 0 \\ & F_{Ay} = 22,57T. \\ & F_{Gy} = 7,43 T. \end{aligned}$$



$$b) N_{AB} = 20 T. ; N_{BG} = 0$$

$$Q_{AB} = 22,57 T.$$

$$Q_{BC} = 2,57 T.$$

$$Q_{CD} = 2,57 - 4(x-4) = -4x + 18,57 \quad Q_D = -9,43 T.$$

$$Q_{DE} = -9,43 T.$$

$$Q_{EF} = -9,43 + 3(x-4) = 3x - 36,43 \quad Q_F^- = 2,57 T.$$

$$Q_{FG} = -7,43 T. \quad Q_F^+ = -7,43 T.$$

$$c) M_{AB} = 22,57x$$

$$M_B = 45,14 \text{ Tm.}$$

$$M_{BC} = 22,57x - 20(x-2) = 2,57x + 40 ; M_C = 50,28 \text{ Tm.}$$

$$M_{CD} = 2,57x + 40 - 4 \frac{(x-4)^2}{2} = -2x^2 + 18,57x + 8$$

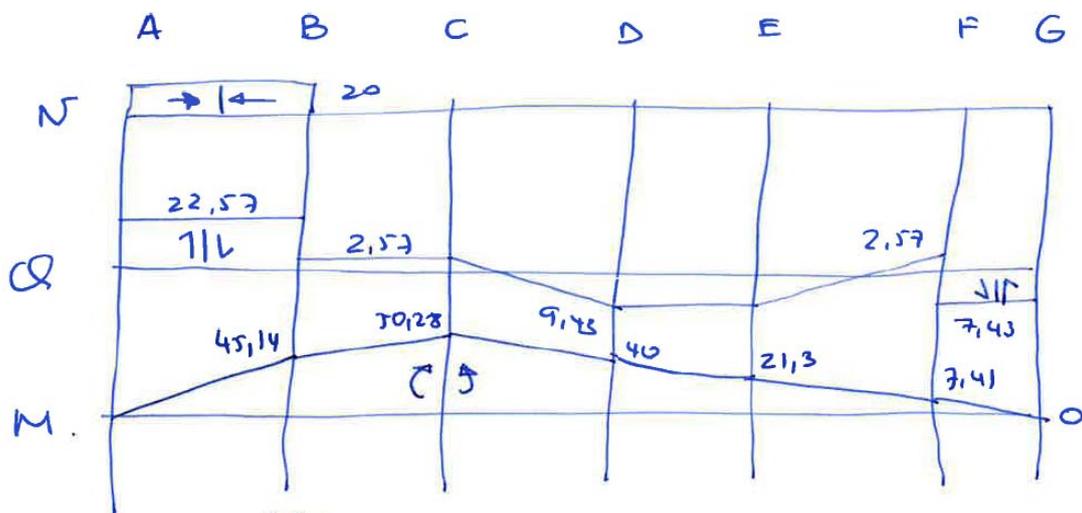
$$M_D = 40 \text{ Tm.}$$

$$M_{DE} = 2,57x + 40 - 12(x-5,5) = -9,43x + 106 ; M_E = 21,33 \text{ Tm.}$$

$$M_{EF} = -9,43x + 106 + 3 \frac{(x-9)^2}{2} = 1,5x^2 - 36,43x + 227,5 ; M_F = 7,41 \text{ Tm.}$$

$$M_{FG} = -9,43x + 106 + 12(x-11) - 10(x-13) = -7,43x + 104$$

$$M_G = 0.$$



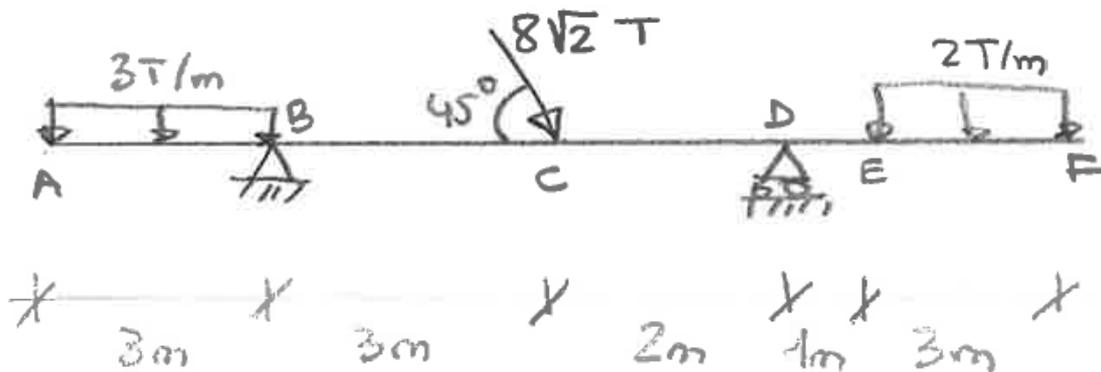
$$d) M_c = \frac{M_y}{I} = \frac{50,28 \cdot 0,25}{\frac{1}{12} \cdot 0,2 \cdot 0,5^3} = 6033,6 \text{ T/m}^2$$

3. Ejercicios propuestos

Ejercicio nº 5 (JUN 2010):

Dada la viga de la figura adjunta, con sección 40x20 cm (canto x ancho) y las cargas indicadas. Calcular:

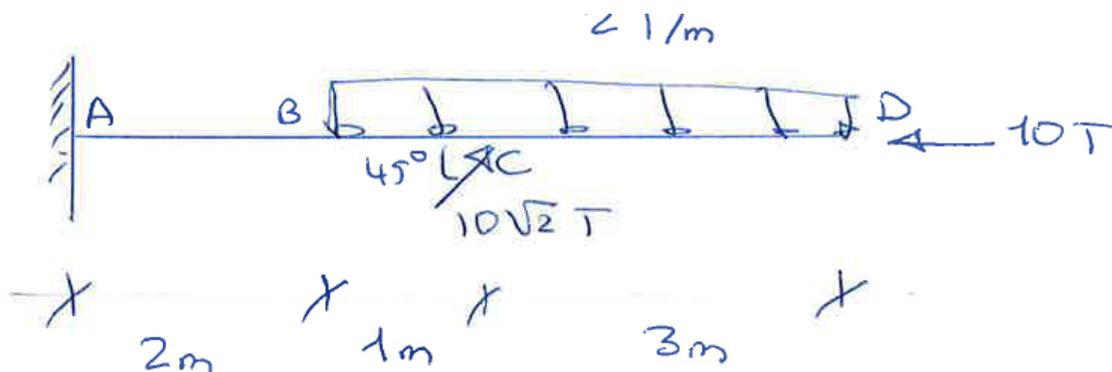
- Reacciones en apoyos (2 puntos)
- Leyes de esfuerzos axiales y cortantes analítica y gráficamente (2 puntos)
- Ley de momentos flectores analítica y gráficamente (2 puntos)
- Tensión máxima normal indicando su localización (2 puntos)
- Tensión máxima tangencial, indicando su localización (2 puntos)



Ejercicio nº6 (JUN 2010)

Dada la viga de la figura adjunta, con sección 20x40 cm (canto x ancho). Calcular:

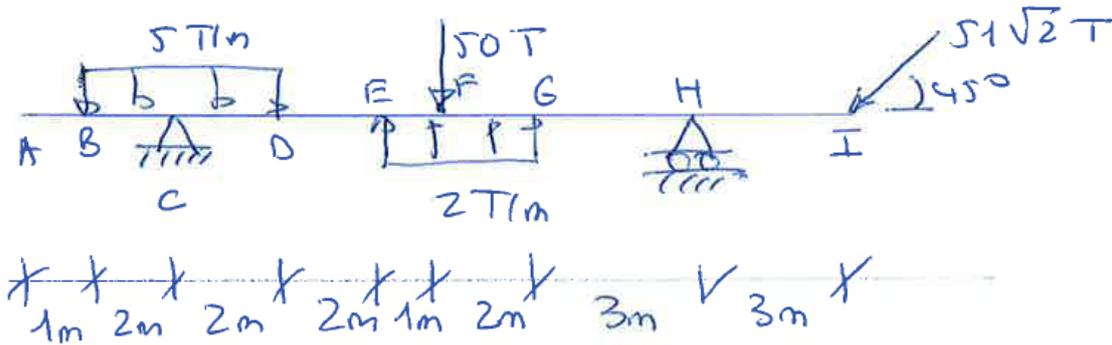
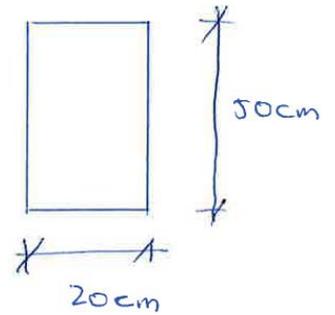
- Reacciones en A (2 puntos)
- Ley de esfuerzos axiales analítica y gráficamente (1 punto)
- Ley de esfuerzos cortantes analítica y gráficamente (2 puntos)
- Ley de momentos flectores analítica y gráficamente (3 puntos)
- Máximas tensiones normal y tangencial indicando su localización (2 puntos)



Ejercicio N° 7 (JUN 2010)

Dada la viga de la figura. Calcular:

- a) Ley de esfuerzos axiales analítica y gráficamente (1 punto)
- b) Ley de esfuerzos cortantes analítica y gráficamente (2 puntos)
- c) Ley de momentos flectores analítica y gráficamente (3 puntos)
- d) Máxima tensión normal y su localización (4 puntos)



Ejercicio N° 8 (JUN 2007)

En la viga de la figura adjunta. Calcular:

- a) Reacciones en los apoyos (2 puntos)
- b) Leyes esfuerzos axiales y cortantes analítica y gráficamente (3 puntos)
- c) Ley momentos flectores analítica y gráficamente (3 puntos)
- d) Tensión normal en la fibra inferior de la sección "C" (2 puntos)

