Download di FOLDER OSN : https://folderosn.blogspot.co.id

SOLUSI SOAL OLIMPIADE SAINS NASIONAL TINGKAT PROVINSI (OSP) TAHUN 2017

BIDANG MATEMATIKA SMP

Oleh : Saiful Arif, M.Pd

SMP NEGERI 13 MALANG

BAGIAN A : SOAL ISIAN SINGKAT

1. Diketahui x dan y adalah dua bilangan bulat positif. Banyak (x,y) sehingga kelipatan persekutuan terkecil dari x dan y sama dengan $2^3 3^5 5^7$ adalah ... .

SOLUSI:

Misalkan $x = 2^a 3^b 5^c$ dan $y = 2^p 3^q 5^r$

Nilai a dan p yang mungkin adalah 0,1,2,3 (4 pilihan)

Nilai b dan q yang mungkin adalah 0,1,2,3,4,5 (6 pilihan)

Nilai c dan r yang mungkin adalah 0,1,2,3,4,5,6,7 (8 pilihan)

Karena KPK$(x,y) = 2^3 3^5 5^7$ maka nilai a atau p harus 3, nilai b atau q harus 5, dan nilai c atau r harus 7.

Kasus 1: banyak pilihan nilai a atau p

Jika $a = 3$ maka kemungkinan nilai $p = 0,1,2,3$ (4 pilihan)

Jika $a = 2$ maka $p = 3$

Jika $a = 1$ maka $p = 3$

Jika $a = 0$ maka $p = 3$

Seluruhnya ada 7 pilihan

Kasus 2: banyak pilihan nilai b atau q

Dengan cara yang sama seperti kasus 1, diperoleh 2 x 6 – 1 = 11 pilihan

Kasus 3: banyak pilihan nilai c atau r

Dengan cara yang sama seperti kasus 1, diperoleh 2 x 8 – 1 = 15 pilihan

Dengan demikian banyak pasangan (x,y) yang dimaksud adalah 7 x 11 x 15 = **1155**

FOLDER OSN
di Download dari : https://folderosn.blogspot.co.id

Download di FOLDER OSN : https://folderosn.blogspot.co.id

2. Jika A = {*a*, *b*, *c*} dengan *a*, *b*, dan *c* merupakan bilangan asli lebih besar daripada 1, serta $a \times b \times c = 180$, maka banyak himpunan A yang mungkin adalah ... .

SOLUSI:

$a \times b \times c = 180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$

Banyak kemungkinan {*a*,*b*,*c*} yang berbeda dapat didaftar sbb:

No	*a*	*b*	*c*	{*a*,*b*,*c*}
1	2	3	5x2x3	{2,3,30}
2	2	3x2	5x3	{2,6,15}
3	2	3x3	5x2	{2,9,10}
4	2	3x2x3	5	{2,18,5}
5	3	3x2x2	5	{3,12,5}
6	3	3x2	2x5	{3,6,10}
7	3	2x2	3x5	{3,4,15}
8	2^2	3^2	5	{4,9,5}

Jadi banyak himpunan A yang mungkin adalah **8**

3. Bentuk sederhana dari ekspresi $\sqrt[3]{5}\left(\sqrt[3]{\frac{16}{25}} - \sqrt[3]{\frac{4}{25}} + \sqrt[3]{\frac{1}{25}}\right)^{-1}$ adalah ... .

SOLUSI:

$$\sqrt[3]{5}\left(\sqrt[3]{\frac{16}{25}} - \sqrt[3]{\frac{4}{25}} + \sqrt[3]{\frac{1}{25}}\right)^{-1} = \frac{5^{\frac{1}{3}}}{\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{5^{\frac{1}{3}}}{\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{3}}\left[4^{\frac{2}{3}} - 2^{\frac{2}{3}} + 1^{\frac{2}{3}}\right]}$$

$$= \frac{5^{\frac{1}{3}}}{5^{-\frac{2}{3}}\left[\left(4^{\frac{1}{3}}\right)^2 - 4^{\frac{1}{3}} + \left(1^{\frac{1}{3}}\right)^2\right]}$$

$$= \frac{5}{\frac{\left(4^{\frac{1}{3}}\right)^3 + \left(1^{\frac{1}{3}}\right)^3}{4^{\frac{1}{3}} + 1^{\frac{1}{3}}}} \text{, ingat } a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$= \frac{5}{4+1}\left(\sqrt[3]{4} + 1\right)$$

$$= \left(\sqrt[3]{4} + 1\right)$$

Download di FOLDER OSN : https://folderosn.blogspot.co.id

4. Diketahui $n_1 = 1$ dan $n_{k+1} = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{n_k}}$ untuk $k \in \{1,2,3,\dots,2016\}$.
Nilai dari $n_1n_2 + n_2n_3 + n_3n_4 + \dots + n_{2016}n_{2017}$ adalah ... .

SOLUSI:

$n_1 = 1$

$$n_{k+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n_k}}$$

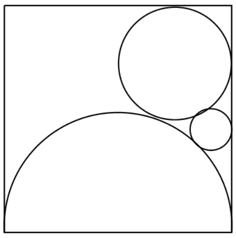
$$n_2 = \frac{1}{1+\frac{1}{n_1}} = \frac{1}{1+\frac{1}{1}} = \frac{1}{2}$$

$$n_3 = \frac{1}{1+\frac{1}{n_2}} = \frac{1}{1+\frac{1}{1/2}} = \frac{1}{3}$$

$$n_4 = \frac{1}{1+\frac{1}{n_3}} = \frac{1}{1+\frac{1}{1/3}} = \frac{1}{4}$$

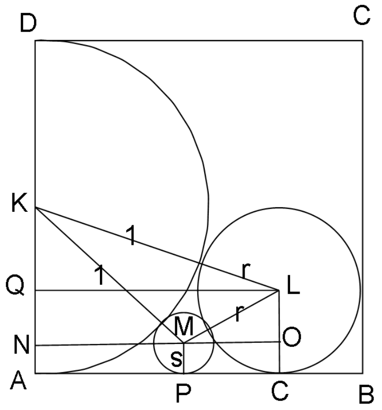
$$\begin{aligned} n_1n_2 + n_2n_3 + n_3n_4 + \dots + n_{2016}n_{2017} &= \frac{1}{1}.\frac{1}{2} + \frac{1}{2}.\frac{1}{3} + \frac{1}{3}.\frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2016}.\frac{1}{2017} \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2016} - \frac{1}{2017} \\ &= 1 - \frac{1}{2017} \\ &= \frac{2016}{2017} \end{aligned}$$

5. Diberikan persegi dengan setengah lingkaran L_1, yang berpusat pada titik tengah alasnya. Lingkaran L_2, dengan radius r menyinggung sisi atas dan sisi tegak persegi, serta L_1. Sedangkan lingkaran L_3 dengan radius s menyinggung L_1, L_2, dan sisi tegak persegi. Rasio dari $r : s$ adalah ... .



SOLUSI

Awalnya penulis merasa familiar dengan soal tersebut dalam posisi diputar sbb:



$LC = r$, dan $MP = s$

Perhatikan bahwa yang dicari $r : s$, maka *tanpa mengurangi keumuman* kita pilih $KA = 1$.

Pada segitiga KLQ berlaku,

$QL^2 = KL^2 - KQ^2$

$QL^2 = (1 + r)^2 - (1 - r)^2$

$QL^2 = (1 + r + 1 - r)(1 + r - 1 + r)$

$QL^2 = 4r$

$QL = 2\sqrt{r}$

Selanjutnya

$AB = 2$

$AC + CB = 2$

$2\sqrt{r} + r = 2$

$2\sqrt{r} = 2 - r$

$4r = 4 - 4r + r^2$

$r^2 - 8r + 4 = 0$

$$r_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{48}}{2} = \frac{8 \pm 4\sqrt{3}}{2} = 4 \pm 2\sqrt{3}$$

Jelas bahwa $r < 2$ maka yang memenuhi $r = 4 - 2\sqrt{3}$ atau

$$\sqrt{r} = \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = \sqrt{(3+1) - 2\sqrt{3 \times 1}} = \sqrt{3} - \sqrt{1} = \sqrt{3} - 1$$

Pada segitiga KMN berlaku,

$NM^2 = KM^2 - KN^2$

$NM^2 = (1 + s)^2 - (1 - s)^2$

$NM^2 = (1 + s + 1 - s)(1 + s - 1 + s)$

$NM^2 = 4s$

$NM = 2\sqrt{s}$

Download di FOLDER OSN : https://folderosn.blogspot.co.id

Pada segitiga LMO berlaku,

$MO^2 = LM^2 - LO^2$

$MO^2 = (r + s)^2 - (r - s)^2$

$MO^2 = (r + s + r - s)(r + s - r + s)$

$MO^2 = 4rs$

$MO = 2\sqrt{rs}$

Perhatikan bahwa $NM + MO = QL$, sehingga

$2\sqrt{s} + 2\sqrt{rs} = 2\sqrt{r}$

$\sqrt{\mathbf{s}} + \sqrt{r}\sqrt{s} = \sqrt{\mathbf{r}}$

$(1 + \sqrt{\mathbf{r}})\sqrt{s} = \sqrt{\mathbf{r}}$

$(1 + \sqrt{3} - 1)\sqrt{\mathbf{s}} = \sqrt{3} - 1$

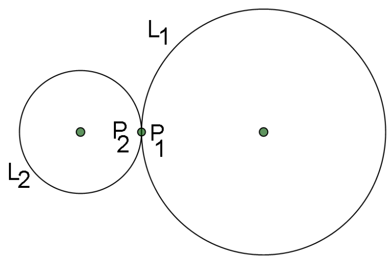
$$\sqrt{\mathbf{s}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3}}$$

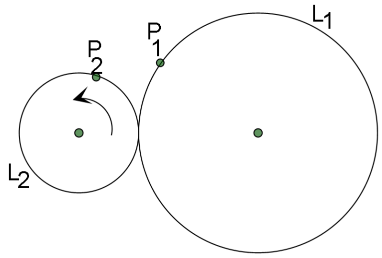
Dengan demikian

$$\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{s}} = (\sqrt{3} - 1) : \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{1}$$

$r : s = 3 : 1$

6. Dua lingkaran L_1 dan L_2 mempunyai radius berturut-turut 12 *cm* dan 5 *cm*. Titik P_1 pada L_1 dan titik P_2 pada L_2. Mula-mula L_1 dan L_2 bersinggungan luar di P_1 dan P_2. Kemudian L_2 digelindingkan sepanjang L_1, sehingga tetap bersinggungan luar. Titik P_2 pertama kali bertemu kembali dengan P_1 ketika L_2 telah digelindingkan sebanyak ...kali.





SOLUSI:

Keliling $(L_1) = 2\pi .12 = 24\pi$

Keliling $(L_2) = 2\pi .5 = 10\pi$

Misalkan n adalah banyaknya menggelindingkan L_2 sepanjang L_1. Agar P_2 pertama kali bertemu kembali dengan P_1 lagi maka 24π harus merupakan kelipatan dari $10n\pi$. Nilai n yang memenuhi adalah 12. Dengan kata lain setelah L_2 digelindingkan sebanyak **12 kali**

Download di FOLDER OSN : https://folderosn.blogspot.co.id

7. Bilangan 3 angka yang habis dibagi 3 dengan semua angka penyusunnya merupakan anggota dari $S = \{2,3,5,6,7,9\}$ ada sebanyak ... .

SOLUSI:

$$\left.\begin{array}{l} 2 \text{ dibagi } 3 \text{ bersisa } 2 \\ 3 \text{ dibagi } 3 \text{ bersisa } 0 \\ 5 \text{ dibagi } 3 \text{ bersisa } 2 \\ 6 \text{ dibagi } 3 \text{ bersisa } 0 \\ 7 \text{ dibagi } 3 \text{ bersisa } 1 \\ 9 \text{ dibagi } 3 \text{ bersisa } 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{ada } 3 \text{ angka bersisa } 0 \\ \text{ada } 1 \text{ angka bersisa } 1 \\ \text{ada } 2 \text{ angka bersisa } 2 \end{array}$$

Misalkan bilangan 3 angka yang dimaksud adalah $\overline{abc}$, maka $\overline{abc}$ habis dibagi 3 jika $3|(a + b + c)$, atau cukup dengan memperhatikan sisanya. Untuk memudahkan perhitungan kita bagi dalam beberapa kasus berikut.

Kasus 1:	$\overline{abc}$ disusun dari tiga angka "*bersisa 0 jika dibagi 3*", sehingga ada 1 kombinasi yaitu $\overline{abc}$ tersusun dari anggota {3,6,9}. Banyak cara 3! = 6 cara
Kasus 2:	$\overline{abc}$ disusun dari satu angka "*bersisa 0 jika dibagi 3*", satu angka "bersisa 1 jika dibagi 3", dan satu angka "*bersisa 2 jika dibagi 3*". Banyak kombinasi ${}_3C_1 \cdot {}_1C_1 \cdot {}_2C_1 = 3.1.2 = 6$. Banyak cara = 6 . 3! = 36 cara (Bisa dicek $\overline{abc}$ tersusun dari anggota {2,3,7},{2,6,7},{2,9,7},{5,3,7},{5,6,7},{5,9,7}).
Kasus 3:	$\overline{abc}$ disusun dari tiga angka **berulang** "*bersisa 0 jika dibagi 3*", atau tiga angka berulang "*bersisa 1 jika dibagi 3*", atau tiga angka berulang "*bersisa 2 jika dibagi 3*". Banyak cara = 6 cara (yaitu 222,333,555,666,777,999)
Kasus 4:	$\overline{abc}$ disusun dari dua angka berulang "*bersisa 2 jika dibagi 3*", dan satu angka "*bersisa 2 jika dibagi 3*" yang berbeda. Banyak kombinasi ada 2 yaitu {2,2,5},{5,5,2}. Banyaknya cara $2.\frac{3!}{2!} = 6$ cara
Kasus 5:	$\overline{abc}$ disusun dari dua angka berulang "*bersisa 0 jika dibagi 3*", dan satu angka "*bersisa 0 jika dibagi 3*" yang berbeda. Banyak kombinasi ada 6 yaitu {3,3,6},{3,3,9},{6,6,3},{6,6,9},{9,9,3},{9,9,6}. Banyaknya cara $6.\frac{3!}{2!} = 18$ cara

Jadi banyak bilangan yang dimaksud adalah 6 + 36 + 6 + 6 + 18 = **72 bilangan.**

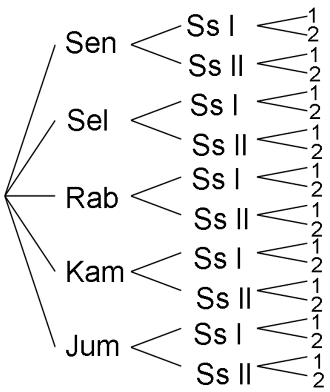
Download di FOLDER OSN : https://folderosn.blogspot.co.id

8. Sekolah *A* memiliki 3 kelas yang akan mengikuti ujian komputer pada sekolah *B*. Sekolah *B* menyediakan 2 pilihan waktu setiap harinya selama 5 hari berturut-turut. Setiap waktu yang disediakan dibuka dua kelas paralel. Jika setiap kelas sekolah *A* hanya mengikuti satu kali ujian, dan waktu ujian ditentukan secara acak, maka peluang bahwa tiga kelas tersebut mengikuti ujian pada hari yang berbeda adalah ... .

SOLUSI:

Misalkan sekolah *A* memiliki 3 kelas yaitu *A1, A2, A3.*

Macam pelaksanaan ujian di sekolah *B* dapat digambarkan dalam diagram panah berikut.



Keterangan:

Pemilihan hari hanya merupakan contoh saja.

Ss I = Sesi I, Ss II = Sesi II, 1 = Kelas Paralel 1, 2 = Kelas paralel 2.

Terdapat 20 pilihan pelaksanaan ujian.

Diketahui setiap kelas sekolah *A* hanya mengikuti satu kali ujian, dan waktu ujian ditentukan secara acak, sehingga dapat ditulis sbb:

- Misalkan kelas *A1* melakukan ujian pada hari Senin, sesi I, kelas paralel 1 atau ditulis (*A1,Sen, Ss I,1*). Pada kasus ini ada 20 pilihan.
- Karena diminta 3 kelas sekolah *A* melakukan ujian pada hari berbeda maka *A2* tinggal bisa memilih hari selain hari Senin. Pada kasus ini ada 16 pilihan.
- Akibatnya *A3* tinggal memiliki 12 pilihan.

Dengan demikian banyak kejadian tiga kelas tersebut mengikuti ujian pada hari yang berbeda adalah $20 \times 16 \times 12$ pilihan, sedangkan banyak anggota ruang sampel 3 kelas sekolah *A* mengikuti ujian adalah $20 \times 20 \times 20$ pilihan.

Jadi peluang bahwa tiga kelas tersebut mengikuti ujian pada hari yang berbeda adalah

$$\frac{20 \times 16 \times 12}{20 \times 20 \times 20} = \frac{12}{25}$$