# 18 圓錐曲線 2014.03.29

## 18.1 定義操作

838. (1) 方程式 $\sqrt{(x+4)^2+1}+\sqrt{(x-4)^2+1}=10$ 的實根 $x$ 爲 ________。

(2) 試解方程式 $\sqrt{x^2+6x+12}+\sqrt{x^2-2x+4}=8$，則 $x=$ ________。

**答.** (1) $\pm\frac{10\sqrt{2}}{3}$ (2) $x=-1\pm2\sqrt{3}$。(1)100成德高中、98曉明女中、(2)99萬芳高中代理

**解(1)** 該方程式可看成橢圓 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 和直線 $y=1$ 相交，$x=\pm\frac{10\sqrt{2}}{3}$。

839. 以 $x^2+4y^2=12$ 的焦點爲焦點，且過直線 $L: x-y+9=0$ 的一點 $M$ 作一橢圓。欲使橢圓的長軸最短，則橢圓的方程式爲 ________。 (100北一女中)

**答.** $\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{36}=1$。

840. 設 $F, F'$ 是橢圓 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 之焦點，$P$ 爲橢圓 $\Gamma$ 上任一點，過 $P$ 之切線 $L$，自 $F$ 作 $L$ 之垂線得垂足 $H$，求 $H$ 的軌跡方程式。 (100北港高中)

**答.** $x^2+y^2=a^2$。

841. $P$ 爲橢圓 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 上一點(不爲端點)，一魔力光點自 $P$ 向橢圓一焦點 $F$ 射出，在到達 $PF$ 中點 $M$ 時，會朝橢圓中心 $O$ 折射而去，求此魔力光點自 $P$ 經 $M$ 到達 $O$ 之最短路徑長。 (98彰化女中)

**答.** 5。

842. (1) 求與兩圓 $C_1: x^2+y^2=1, C_2: x^2+(y-10)^2=9$ 均內切或外切的動圓圓心軌跡方程式。 (99苗栗高中)

(2) 設圓 $C: x^2+y^2=4$ 及直線 $x-6=0$，有一動圓與圓 $C$ 及直線均相切，則此圓圓心軌跡方程式爲 ________。 (99松山家商2招)

**答.** (1) $\frac{(y-5)^2}{1}-\frac{x^2}{24}=1$ (2) $y^2=-16(x-4), y^2=-8(x-2)$。

843. 方程式爲 $2x+y=1$，準線方程式爲 $x=2y+5$，則 $\Gamma$ 的方程式爲 ________。

**答.** $4x^2+4xy+y^2-10y-15=0$。 (100成淵高中)

844. 若 $P$、$A$、$B$ 分別爲橢圓 $\Gamma: \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$、圓 $C_1: (x-3)^2+y^2=1$、圓 $C_2: (x+3)^2+y=2$ 上的任一點，則 $\overline{PA}+\overline{PB}$ 的最小值爲何？ (缺)

**答.** $9-\sqrt{2}$。

**提示.** 兩圓心恰爲橢圓之兩焦點。

845. (1) 若 $P$ 爲雙曲線 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ 上非頂點之一點，$F_1$、$F_2$ 爲此雙曲線之兩焦點，求 $\triangle PF_1F_2$ 之內心的 $x$ 坐標？ (100鳳新高中代理)

(2) 已知雙曲線 $C$ : $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$，其兩焦點爲 $F, F'$。設 $P(x_0, y_0)$ 爲 $C$ 上異於頂點的任意點，且設 $\triangle PFF'$ 的內切圓與 $x$ 軸切於點 $M$。 (98台北縣聯招)

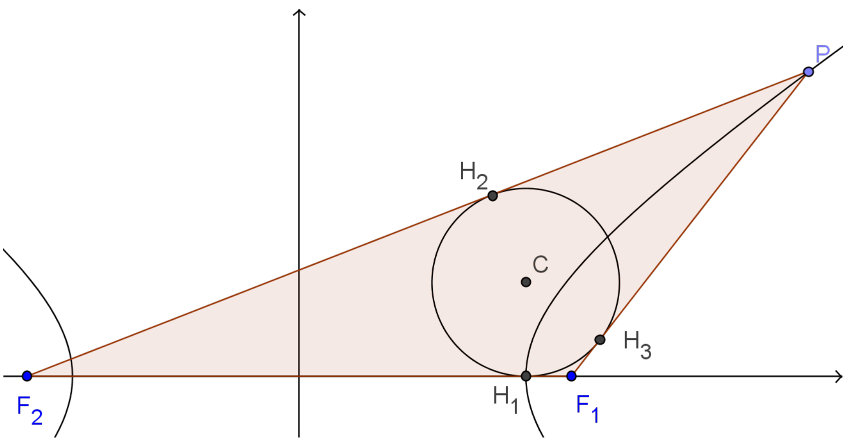
i. 求 $M$ 與兩焦點的距離各是多少。

ii. 當 $x\to\infty$ 時，內切圓圓心的 $y$ 坐標之極限值爲何？

(3) 雙曲線 $\Gamma$ : $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的焦點 $F_1, F_2$，設 $P$ 爲 $\Gamma$ 上的動點，試問 $\triangle PF_1F_2$ 內心的軌跡爲何？並證明之。 (99台中二中)

**答.** (1) 3 (2) $\sqrt{13}\pm 3, 2$ (3) $\{(x,y)\mid x=\pm a,\ |y|<b,\ y\neq 0\}$。

**解(1)** 如圖所示:




$H_i$ 爲切點。因此 $\overline{F_2H_1}=\overline{F_2H_2}, \overline{F_1H_1}=\overline{F_1H_3}, \overline{PH_2}=\overline{PH_3}$。
$6=2a=\overline{PF_1}-\overline{PF_2}=(\overline{PH_2}+\overline{F_2H_2})-(\overline{PH_3}+\overline{F_1H_3})=\overline{F_2H_1}-\overline{F_1H_1}$。
所以 $H_1$ 在雙曲線上，即爲頂點。又 $\overline{CH_1}\perp x$ 軸，所以 $C$ 和 $H_1$ 之 $x$ 坐標相同，即 3。

## 18.2 光學性質

846. 一橢圓兩焦點爲 $F_1(-3,5), F_2(-10,9)$，且與 $y=x$ 相切，求橢圓的長軸長。

**答.** $3\sqrt{41}$。 (99萬芳高中)

**解.** $F_1$ 對直線 $y=x$ 作對稱，得 $F_1'=(5,-3)$。而 $\overline{F_1'F_2}=\sqrt{15^2+12^2}=3\sqrt{41}$，即爲所求。

**評.** 這是光學性質，在圓錐曲線的題型，往往可以解得很漂亮。

847. 平面上有一橢圓，已知其焦點爲 $(2\sqrt{5},0)$ 和 $(-2\sqrt{5},0)$，且 $x+2y=5$ 爲此橢圓的切線，求此橢圓方程式。 (100文華高中代理)

**答.** $\frac{x^2}{21}+y^2=1$。

**另解.** 由兩焦點可設橢圓方程式 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-20}=1$。
考慮 $P(x,y)$ 在橢圓上， $x+2y$ 的最大值 5 必發生在 $x+2y=5$ 恰爲切線之時。而由以柯西不等式可得 $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-20}\right)(a^2+4(a^2-20))\geq(x+2y)^2$。可得 $x+2y$ 有最大值 $\sqrt{5a^2-80}=5\Rightarrow a^2=21$，所以橢圓爲 $\frac{x^2}{21}+y^2=1$。

**評.** 原解是正當的方法，但在計算上，碰到根號，反而不如另解之漂亮。

848. (1) 有一個雙曲線,已知二焦點爲 $(0,5)$ 與 $(0,-5)$，且與直線 $y=x+1$，切於第一象限的 $P$ 點，則 $P$ 點的坐標爲? (100玉井工商)

(2) 若某橢圓的兩焦點爲 $(0,0)$、$(0,4)$，且此橢圓與直線 $x+y+1=0$ 相切，則此橢圓的長軸長爲 ________。 (99全國聯招)

(3) 若坐標平面上有一橢圓與 $x$ 軸相切，且其焦點爲 $(2,1)$ 與 $(6,2)$，則此橢圓的短軸長爲 ________。 (99中興高中)

(4) 已知平面上一橢圓 $\Gamma$ 之兩焦點爲 $F(-1,2)$，$F'(3,-1)$ 。若直線$L:\ 8x-6y+45=0$ 與橢圓 $\Gamma$ 相切於 $P$ 點，試求此橢圓之正焦弦長及 $P$ 點坐標。

(5) 雙曲線與直線 $x+y=8$ 相切，且二焦點爲 $(10,0)$ 與 $(0,4)$，求雙曲線的正焦弦長。 (4)97潮州高中、(5)97台中一中

**答.** (1) $(12,13)$ (2) $\sqrt{26}$ (3) $2\sqrt{2}$ (4) 正焦弦長 $\frac{15}{2}$, $P(-3,\frac{7}{2})$ (5) $\frac{8}{5}$。

849. 有一橢圓長軸在直線 $x-y+1=0$ 上，其一焦點坐標爲 $F_1(1,2)$，若此橢圓與 $x$ 軸切於點 $B(2,0)$，試求此橢圓另一焦點 $F_2$ 的坐標爲 ____。 (97台南女中)

**答.** $(5,6)$。

850. (1) 已知點 $P$ 爲橢圓 $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{28}=1$ 上的點, $A(6,0)$ , $B(-3,4)$，求 $\overline{PA}+\overline{PB}$ 的最小值爲? (100玉井工商)

(2) 坐標平面上，已知點 $A(4,0)$ 和 $B(3,3)$ ，$P$ 是橢圓 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$ 上的動點，則 $\overline{PA}+\overline{PB}$ 的最小值爲 ________。 (100彰化女中)

(3) $\Gamma:\ \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$, $F(3,0)$, $A(-3,1)$，$P$ 在 $\Gamma$ 上，設 $\overline{PA}+\overline{PF}$ 最大值 $M$，最小值 $m$，則 $(M,m)=$ ________。 (99建中市內)

**答.** (1) 11 (2) $12-\sqrt{58}$ (3) $(9,7)$。

**解(1)** 令 $F(-6,0)$ 爲橢圓另一焦點。

三角不等式可得 $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{BF}\geq\overline{PA}+\overline{PF}=2a\Rightarrow\overline{PA}+\overline{PB}\geq 2a-\overline{FB}$,

所以最小值 $=16-5=11$。

**評.** 光走最短距離，利用橢圓光學性質可得最小值爲 $2a-\overline{FB}$。

851. 雙曲線: $xy=2$，有一光線 $P(-10,2)$ 從出發，射到雙曲線上一點 $A(1,2)$，反射後的光線會碰到雙曲線上另一點 $A_2$，依此類推，試求 $\lim_{n\to\infty}\overline{A_nA_{n+1}}=$ ____。 (97台南女中)

**答.** 4。

## 18.3 旋轉

852. (1) 曲線 $\Gamma$ : $3x^2+6xy+7y^2-12=0$ 上一點 $P(h,k)$，則 $h^2+k^2$ 最小值爲 ________。 (100文華高中)

(2) 設 $x,\,y\in\mathbb{R}$，且 $5x^2-6xy+5y^2=32$，若 $x^2+y^2$ 的最大值爲 $M$，最小值爲 $m$，則 $M+m=$ ________。 (100南港高工)

(3) 設 $x,\,y$ 爲實數，且滿足 $x^2+xy+y^2=6$，若 $x^2+y^2$ 的最大值爲 $M$，最小值爲 $m$，試求 $M+m$。 (100全國聯招)

(4) $x,y$ 爲實數，已知 $x^2-2xy+9y^2=1$，則 $x^2+y^2$ 的最大值 $a$，最小值 $b$，得 $a+b=$ ____。 (97台南女中)

(5) 若 $5x^2-4xy+2y^2-36=0$，且 $x^2+y^2$ 之最大值 $M$，最小值 $m$，求 $M+m$。

**答.** (1) $5-\sqrt{13}$ (2) 20 (3) 16 (4) $\frac{5}{4}$ (5) 42。 (97大安高工)

**解(1)** 利用旋轉不變量,

$$\begin{cases} A+C &= 10 \\ A-C &= \sqrt{4^2+6^2}=2\sqrt{13}. \end{cases}$$

解得 $A=5+\sqrt{13}, B=5-\sqrt{13}$。因此最小值爲 $\frac{12}{5+\sqrt{13}}=5-\sqrt{13}$。

**解(2)** 旋轉，計算特徵值 $\begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 \\ -3 & 5-\lambda \end{vmatrix}=0\Rightarrow\lambda=8$ 或 2。新方程式 $8x^2+2y^2=32\Rightarrow\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$。

$M+m=16+4=20$。

853. 設二元二次方程式: $x^2+xy+y^2=6, P(a,b)$ 爲 $\Gamma$ 上的一點，試求 (97中和高中)

(1) $\Gamma$ 的焦點坐標爲 ____。

(2) $a^2-b^2$ 的最大值爲 ____。

**答.** (1) $\pm(2,-2)$ (2) $4\sqrt{3}$。

854. 設 $x, y$ 均爲實數，考慮方程式 $5x^2-6xy+5y^2-4x-4y-4=0$ 的圖形，若 $A$ 爲其短軸上的一個頂點，$F_1, F_2$ 爲其兩焦點，試求之值 $\overrightarrow{AF_1}\cdot\overrightarrow{AF_2}$。 (97台中女中)

**答.** $-2$。

855. 平面上有兩個橢圓，其中一個橢圓爲 $\Gamma_1: x^2+2y^2=1$，另一個橢圓 $\Gamma_2$ 爲 $\Gamma_1$ 繞原點逆時針旋轉 $60°$。已知這兩個橢圓相交於四個點，逆時鐘順序依次連成一個四邊形，請問該四邊形的面積 ________。 (100文華高中)

**答.** $\frac{8}{\sqrt{35}}$。

856. 設 $a, b, c$ 爲正數，$f$ 由矩陣 $\begin{bmatrix} a & -b \\ \sqrt{3}a & c \end{bmatrix}$ 表示的線性變換，當橢圓 $4x^2+8y^2=1$ 經 $f$ 變換後之圖形是以原點爲圓心，1 爲半徑的圓，則 $(a,b,c)=$ ________。

**答.** $(1,\sqrt{6},\sqrt{2})$。 (101內湖高工2招)

857. 設實係數二元二次方程式爲 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0\ (b\neq 0)$，將坐標軸以原點 $O$ 爲中心，旋轉一銳角 $\theta$，可得新方程式爲 $Ax'^2+Cy'^2+Dx'+Ey'+F=0$ (沒有 $x'y'$ 項)，其中 $A-C=\pm\sqrt{(a-c)^2+b^2}$，而正負符號則依 $b$ 的正負而定。試說明爲何正負符號是依 $b$ 的正負而定。 (97陽明高中)

**證.** 令 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$，則 $0=B=a(-2\sin\theta\cos\theta)+b\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)+c(2\sin\theta\cos\theta)=b\cos 2\theta+(c-a)\sin 2\theta \Rightarrow \cot 2\theta=\frac{a-c}{b}$，又 $\theta$ 爲銳角 $\Rightarrow \sin 2\theta=\frac{|b|}{\sqrt{(a-c)^2+b^2}}$。同理可計算 $A-C=(a-c)\cos 2\theta+b\sin 2\theta=b\sin 2\theta\left(\frac{a-c}{b}\cot\theta+1\right)=\frac{|b|b}{\sqrt{(a-c)^2+b^2}}\left(\frac{(a-c)^2}{b^2}+1\right)=\frac{|b|}{b}\sqrt{(a-c)^2+b^2}$。

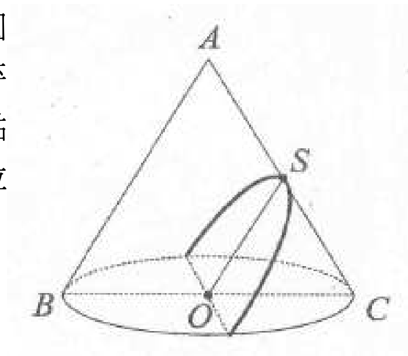
858. $a,b>0$，$2ab+3a+6b=27$，求 $a^2+4b^2$ 的最小值。 (102大同高中)

**答.** 18。

**解.** 令 $x=a, y=2b$，則 $a^2+4b^2=x^2+y^2$，而 $2a+3a+6b=27$，則可改寫爲 $xy+3x+3y=27$。整理成 $(x+3)(y+3)=36$。其圖形爲雙曲線，貫軸在 $x=y$ 上。第一象限中，離原點最近點爲其頂點 $(3,3)$。故 $a^2+4b^2=x^2+y^2$ 的最小值爲 18。

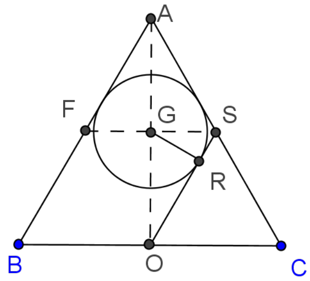
## 18.4 圓錐截痕

859. 右圖爲一直圓錐，$\triangle ABC$ 爲正三角形，底圓的圓心爲 $O$，且 $\overline{AO} \perp \overline{BC}$。今一過 $O$ 點的平面與直圓錐之截痕爲拋物線，此拋物線的頂點爲 $S$，此拋物線的焦點爲 $R$，試找出 $R$ 點的位置，並證明之。




**答.** $R$ 在 $\overline{OS}$ 上，且 $\overline{OR} : \overline{RS} = 3 : 1$。 (100中正高中)

**解.** 以 $\overline{OA}$ 爲軸，旋轉截平面，拋物線之形狀不變。故可假設該平面與 $\overline{AB}$ 平行，且 $S$ 在 $\overline{AC}$ 上. 如上，即在平面和圓錐中做一切球，平面與球相切之點即爲焦點。
若只觀察 $ABC$ 所在之平面，即爲右圖。可依相似形計算得 $R$ 在 $\overline{SO}$ 上，且 $\overline{SR} : \overline{RO} = 1 : 3$。
而其準線位在內切線與圓錐所在之平面和截面所相交的直線上。

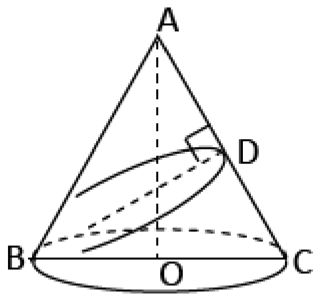



其證明概要爲：點到球的切線段長相等，所以截痕上任一點對球做兩切線，一者爲與焦點連線，另一者與 $A$ 連線。透過旋轉可使與 $A$ 連線變成 $\overrightarrow{BA}$ 方向，再平移回到截痕上的點，原切點的位置變移到了先前宣稱的準線上。而由先前所宣稱的準直，其必與 $\overrightarrow{BA}$ 方向垂直，故得證。

**評.** 圓錐截線就是放入那顆內切球就對了。

860. 如圖，直圓錐頂點爲 $A$, $\overline{BC}$ 爲底面的直徑，$O$ 爲圓心，$\overline{AD} = \overline{CD}$, $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC} = 4$，若 $\overline{AC}$ 的垂直平分面過 $D$ 點截圓錐得一截痕，則此截痕圖形正焦弦長爲 ________。 (101中正高中2招)

**答.** $\frac{4}{\sqrt{3}}$。




861. 在底圓半徑爲 6 的圓柱內，有兩個半徑也爲 6 的球面，其球心距爲 13。若作一平面 $E$ 與這兩個球面相切，且兩球面的球心在平面 $E$ 的異側。則: (100桃園高中)

(1) 求證平面 $E$ 與圓柱的截痕爲橢圓。

(2) 求這個橢圓的長軸長。

862. 在底面半徑爲 6 的圓柱內，有兩個半徑也爲 6 的球面，其球心距爲 13。今有一平面與這兩球面相切，且與圓柱面相交成一橢圓，則這個橢圓的長軸與短軸長之和爲 ________。 (99中正高中)

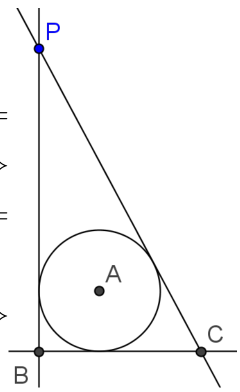
**答.** 25。

863. $\begin{cases} x^2+y^2 &= 4 \\ x+y+z &= 0 \end{cases}$，求兩焦點座標。 (97大里高中)

**答.** $\pm(\frac{-2\sqrt{3}}{3}, \frac{-2\sqrt{3}}{3}, \frac{4\sqrt{3}}{3})$。

864. 空間坐標中，光源自點 $P(-1,0,4)$ 發出，球 $S: x^2+y^2+(z-1)^2=1$ 在 $xy$ 平面上的影子形成一個橢圓， 則此橢圓的短軸長爲 ________。 (100麗山高中2招)

**答.** $2\sqrt{2}$。




**解.** 右圖爲 $xz$ 平面之剖面圖。令 $A$ 爲球 $S$ 之球心，則 $\overline{PA}^2 = 1+3^2 = 10 \Rightarrow P$ 至球的切線段長 $= \sqrt{10-1} = 3 \Rightarrow \tan\angle BPA = \frac{1}{3} \Rightarrow \tan\angle BPC = \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{9}} = \frac{3}{4} \Rightarrow \overline{BC} = 4\cdot\frac{3}{4} = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$。
注意球 $S$ 與 $xy$ 平面切線處，即焦點，因此 $a-c=1 \Rightarrow c=\frac{1}{2} \Rightarrow b=\sqrt{2} \Rightarrow 2b = 2\sqrt{2}$。

865. 設有一球心爲原點 $O$，半徑爲 1 的球面 $S$，一光源於 $P(2,0,1)$ 照射球面 $S$，投射在平面 $E: x+2=0$ 上所成的區域爲 $A$，若點 $Q(-2,u,v)$ 落在區域 $A$ 內，試求 $u$ 和 $v$ 的關係式。 (99育成高中)

**答.** $\frac{u^2}{\frac{3}{16}} + \frac{(v+\frac{5}{3})^2}{\frac{64}{9}} \le 1$。

866. 設兩曲面 $f(x,y,z)=x^2+y^2-2=0$ 及 $g(x,y,z)=x+z-4=0$，則此兩曲面之交集爲 $E$，則 $E$ 的形狀爲 ________，而在 $E$ 上點 $P(1,1,3)$ 的切線爲 ________。

**答.** 橢圓、$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-3}{-1}$。 (100內湖高工)

## 18.5 線性變換

867. 先在橢圓蛋糕 30cm 的長軸與 20cm 的短軸上各切一刀，若欲將蛋糕八等份，且每一刀均切過橢圓中心，則下一刀與長軸所夾銳角爲多少? (100香山高中)

**答.** $\theta = \tan^{-1}\frac{2}{3}$。

**解.** 壓扁成圓，切 45° 角，再拉成橢圓。

**評.** 線性變換，保面積比。

868. 在坐標平面上，已知直線 $y = mx$ 將區域 $\left\{(x,y) \mid \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4} \le 1,\, x \ge 0,\, y \ge 0\right\}$ 的面積二等分，則 $m =$ ________。 (100師大附中)

**答.** $m = \frac{2}{3}$。

869. 已知 $A$、$B$、$C$ 為橢圓 $\Gamma$ : $x^2+3y^2=156$ 上相異三點，若 $A$ 點之坐標為 $(12,-2)$ 且 $\triangle ABC$ 有最大面積，則 $\overline{BC}$ 邊之長為 ________。 (99建國高中)

**答.** $6\sqrt{5}$。

870. 設橢圓 $\Gamma$ : $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ 上兩點 $P$、$Q$ 其中點為 $(1,1)$，求 $PQ$ 直線方程式。

**答.** $9x+4y=13$。 (100松山家商2招)

**解 1.** 平行弦中點為過中心之線段，該組平行弦中點軌跡為 $(t,t)$.
令弦的端點坐標為 $(t,t)$ 代入 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$, 解得 $t=\pm\frac{6}{\sqrt{13}}$。
端點切線為 $\frac{2}{4}\cdot\frac{6}{\sqrt{13}}x+\frac{2}{9}\cdot\frac{6}{\sqrt{13}}y=\pm1$。
所求弦與該切線平行，又通過 $(1,1)$, 可得弦所在直線方程式為 $9x+4y=13$。

**解 2.** 令兩端點作標 $(x_1,y_1)$, $(x_2,y_2)$, 則 $\frac{x_1^2}{4}-\frac{x_2^2}{4}+\frac{y_1^2}{9}+\frac{y_2^2}{9}=0$ 和 $x_1+x_2=2$, $y_1+y_2=2$。
$\Rightarrow \frac{x_1-x_2}{4}+\frac{y_1-y_2}{9}=0 \Rightarrow \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{9}{4} \Rightarrow y=-\frac{9}{4}x+\frac{13}{4}$。

**解 3.** 將橢圓對 $(1,1)$ 做對稱可得另一橢圓 $\frac{(x-2)^2}{4}+\frac{(y-2)^2}{9}=1$。
而該弦兩端點在兩橢圓相交上。故將兩方程式相減即可得所求直線。

**解 4.** 利用線性變換，將橢圓映射至圓，弦中點仍是弦中點。
而新弦將於圓心到中點的線段垂直，可得新弦斜率或方程式。
再用線性變換，將圓還原成橢圓，同時也得到原本弦的斜率或方程式。

**類題.** 類似技巧在圓亦可使用，見 100彰化藝術暨田中高中11。

871. 兩端點在一橢圓上的線段，稱為該橢圓的弦。在橢圓 $25x^2+4y^2=100$ 的諸弦中，以點 $(1,-4)$ 為中點的方程式為何? (99桃園縣高中現職聯招)

**答.** $25x-16y=89$。

872. 已知橢圓 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$ 有一弦以 $(2,1)$ 為中點，則含此弦的直線方程式為 ____。

**答.** $x+2y=4$。 (98玉井工商)

873. 給定一橢圓 $\Gamma$ : $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ 及內部一點 $M(2,1)$，試求: (100松山工農)

(1) 以 $M$ 點為中點之弦 $\overline{AB}$ 斜率。

(2) 直線 $AB$ 的方程式及弦 $\overline{AB}$ 的長度。

**答.** (1) $-\frac{3}{2}$ (2) $3x+2y=8$, $\sqrt{78}$。

874. 橢圓之中心爲 $O$，長軸頂點爲 $A$、$B$，若 $P$ 爲橢圓上一點，過 $P$ 點作一切線 $L$，過 $A$ 點作一切線 $M$，且直線 $L$ 和直線 $M$ 交於 $Q$ 點，試證明：$\overline{BP}//\overline{OQ}$。 (97台中二中)

**證.** 做線性變化把橢圓變成圓，再利用圓周角等圓心角之一半，得同位角，證畢。

## 18.6 其它

875. 求橢圓 $\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{16}=1$ 上諸點在直線 $x-y+10=0$ 上的正射影長。(99萬芳高中)

**答.** $5\sqrt{2}$。

876. 設橢圓 $\Gamma$ : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，則外切矩形面積 $A$ 之範圍爲何？ (100松山家商)

**答.** $[4ab, 2(a^2+b^2)]$。

**解.** 切線：$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}, y=-\frac{x}{m}\pm\sqrt{\frac{a^2}{m^2}+b^2}$，
長、寬爲 $\frac{2\sqrt{a^2m^2+b^2}}{\sqrt{m^2+1}}$ 和 $\frac{2\sqrt{a^2+b^2m^2}}{\sqrt{m^2+1}}$。
$(a^2m^2+b^2)(b^2m^2+a^2)\geq(m^2ab+ab)^2$, 所以 $A\geq\frac{4(m^2ab+ab)}{m^2+1}=4ab$，
注意上式柯西之等號必不成立，但當 $m\to 0$ 或 $m\to\infty$ 時 $A\to 4ab$。
$\frac{(a^2m^2+b^2)+(a^2+b^2m^2)}{2}\geq\sqrt{(a^2m^2+b^2)\cdot(a^2+b^2m^2)}$，
所以 $A\leq\frac{4}{2}\cdot\frac{(a^2m^2+b^2)+(a^2+b^2m^2)}{m^2+1}=2(a^2+b^2)$。

877. 試求與橢圓 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{6}=1$ 相切且互相垂直的兩切線的交點軌跡方程式。 (97大安高工)

**答.** $x^2+y^2=a^2+b^2$。

878. 試求與橢圓 $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$ 相切且互相垂直的兩切線的交點軌跡方程式。 (97彰化藝術)

879. $a>b>0$，試證：雙曲線 $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$ 互相垂直二切線的交點必在圓 $x^2+y^2=a^2-b^2$ 上。 (98新港藝術)

880. 給定雙曲線 $\Gamma$ : $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{20}=1$ 與直線 $L$ : $3x+4y=k$，若在直線 $L$ 上存在唯一的點 $P$，使過點 $P$ 對雙曲線可作二條互相垂直之切線，則點 $P$ 座標 = ________。(99台中一中)

**答.** $\pm(\frac{12}{5},\frac{16}{5})$。

881. 直線 $y=mx-2$ 與雙曲線 $16x^2-9y^2=144$ 恰交於一點，則 $m=$ ________。

**答.** $m=\pm\frac{2\sqrt{5}}{3}$ 或 $\pm\frac{4}{3}$。 (97台南二中)

882. 設橢圓 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$ 與雙曲線 $\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}=1$ 有公共焦點。當以它們的「交點」爲頂點的四邊形面積爲最大時，則數對 $(A,B)=$ ________。 (100苑裡高中)

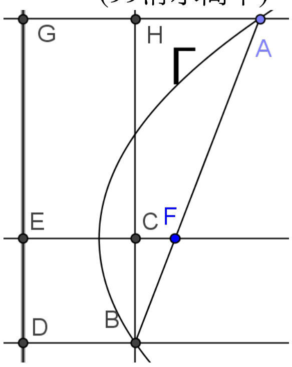
**答.** $(-\frac{7}{2},\frac{7}{2})$。

883. 設 $P(x,y)$ 爲雙曲線 $9x^2-16y^2=144$ 上一點，且點 $P$ 爲第一象限內，則 $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x|3x-y|}$ 值爲何？

題目有誤，應修正成 $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x|3x-4y|}$ 較爲合理。 (99家齊女中)

**答.** $2\sqrt{6}$。

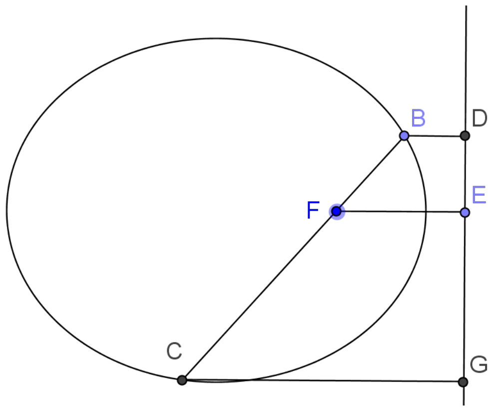
884. 設抛物線 $y^2=2px$ 的焦點 $F$，若焦弦 $\overline{AB}$ 滿足：$\overline{AF}=m$，$\overline{FB}=n$，試證：$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{2}{p}$。 (99清水高中)




**證.** 若 $\overline{AB}$ 平行 $y$ 軸，則 $m=n=p\Rightarrow\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{2}{p}$。
若 $\overline{AB}$ 不平行 $y$ 軸，不失一般性假設 $m>n$。如右圖，$\overline{BH}$ 和準線 $\overline{DG}$ 平行。有 $\triangle BCF\sim\triangle BHA$，
$\Rightarrow\overline{CF}=(m-n)\frac{n}{m+n}\Rightarrow p=\overline{EF}=n+\frac{mn-n^2}{m+n}=\frac{2mn}{m+n}\Rightarrow$
$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{2}{p}$。

885. 設橢圓曲線 $\Gamma:\ \frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1$ 與直線 $L:\ x=12$，若 $A_0$, $F$ 的坐標分別爲 $(6,0)$, $(3,0)$，在曲線 上另有 11 個點 $A_k$, $k=1,2,3,\ldots 11$ 使得 $\angle A_0FA_1=\angle A_1FA_2=\ldots=\angle A_{11}FA_0$，令 $d_k$ 爲 $A_k$ 到 $L$ 的距離，試求 $\sum\limits_{k=0}^{11}\frac{1}{d_k}$。 (100中壢高中2招)

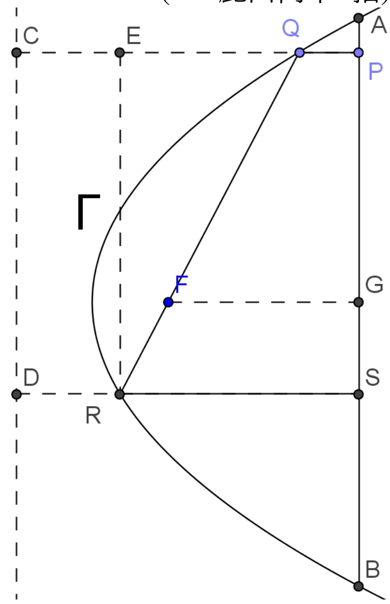
**答.** $\frac{4}{3}$。




**解.** 注意 $L$ 爲 $\Gamma$ 之右準線，有 $d(P,F)=ed(P,L)$，其中 $e=\frac{c}{a}$。如右圖，$\overline{BC}$ 爲一焦弦，$D$, $E$, $G$ 在 $L$ 上且爲 $B$, $F$, $C$ 到 $L$ 之垂足。可計算得 $\overline{FE}=\frac{\overline{BF}\cdot\overline{CG}+\overline{FC}\cdot\overline{BD}}{\overline{BF}+\overline{FC}}=\frac{2\overline{BD}\cdot\overline{CG}}{\overline{BD}+\overline{CG}}\Rightarrow\frac{1}{\overline{BD}}+\frac{1}{\overline{CG}}=\frac{2}{\overline{FE}}$。
由此性質，所求 $\sum\frac{1}{d_k}=\frac{12}{\overline{FE}}=\frac{12}{9}=\frac{4}{3}$。

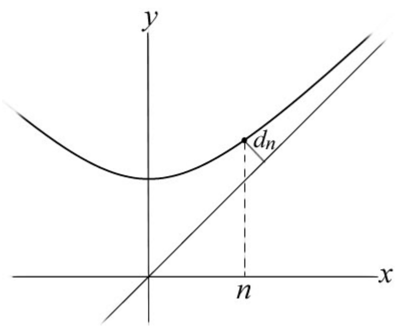
**評.** 用到離心率時，很漂亮，但不常考。

886. 有一撞球臺如右圖所示(原圖只有 $ABPQRS, \Gamma$)，曲線部分 $\Gamma$ 是一個拋物線，若 $\overline{AB}$ 與 $\Gamma$ 的軸垂直，$\overline{AB} = 20$，今小明自 $P$ 處將球平行 $\Gamma$ 之軸撞向$Q$，經反彈到 $R$，最後再反彈到 $S$，若 $\overline{AP} = 2, \overline{BS} = 8$，則拋物線 $\Gamma$ 的焦距爲 ________。 (100麗山高中2招)




**答.** 2。

887. 考慮雙曲線 $y^2 - x^2 = 1$ 圖形的上半部(如右圖)，取此雙曲線上 $x$ 坐標爲 $n$ 的點，此點與漸近線 $y = x$ 的距離記爲 $d_n$，其中 $n$ 爲正整數。則 $\lim\limits_{n\to\infty}(n \cdot d_n) =$ ________。 (101中科實中、98慈濟聯招)




**答.** $\frac{\sqrt{2}}{4}$。

888. 一橢圓之中心在原點，長軸在 $x$ 軸上，若此橢圓內切於梯形 $ABCD$，$AD // x$ 軸且 $\overline{AD} = \overline{AB} = \overline{CD} = 5, \overline{BC} = 11$，則橢圓之正焦弦長爲何？ (99大安高工2招)

889. 已知拋物線 $(x+1)^2 = 2py$ $(p > 0)$ 的焦點 $F$，$A$ 是拋物線上縱坐標爲 4 且在 $y$ 軸左方的點，$A$ 到拋物線準線的距離等於 5，過 $A$ 作 $x$ 軸的垂線，交 $x$ 軸於 $B$ 點，$O$ 爲原點，令 $M$ 爲 $\overline{OB}$ 中點，過 $M$ 作 $\overline{AF}$ 的垂線交 $\overline{AF}$ 於 $N$，則 $N$ 點坐標爲 ________。

**答.** $(\frac{37}{25}, \frac{34}{25})$。 (99中正高中)

890. 試求以橢圓 $\frac{(x+1)^2}{100} + \frac{(y-2)^2}{75} = 1$ 的右焦點爲圓心，且與雙曲線 $\frac{(x+1)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{16} = 1$ 之兩條漸近線都相切的圓的方程式。 (97台中高工)

**答.** $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 16$。

891. 給定一條橢圓曲線，如何利用尺規作圖的方法找出它們的焦點？ (97彰化藝術)

**解.** 平行弦中點過中心，找兩組，可得中心。
以中心，爲圓心，適當長爲半徑，畫圓，交橢圓於四點，四點爲一矩形。

矩形之邊長之中垂線即爲兩軸所在之直線。直線與橢圓交點即爲頂點。
以短軸上的頂點爲圓心，半長軸長爲半徑畫圓，交長軸於兩點，即爲兩焦點。

892. 給定拋物線，以尺規作圖出找焦點、對稱軸。 (102板橋高中)

**解.** 以下不詳述尺規步驟

(1) 做兩平行弦
(2) 取兩弦之中點，連成一直線 $L$。
(3) 在 $L$ 上適當處作 $L$ 之垂線交拋物線於 $A, B$ 兩點。
(4) 做 $\overline{AB}$ 之中垂線 $L'$，交拋物線於 $V$。$L'$ 即爲對稱軸。
(5) 做一矩形，$UVWX$，使得 $\overline{UV} = 2\overline{VW}$ 且 $W$ 在 $L'$ 上。
(6) 連 $\overrightarrow{VW}$ 交拋物線於 $Y$ 點。
(7) 過 $Y$ 作 $L'$ 之垂線交 $L'$ 於 $F$ 點，即爲焦點。

893. 平面上有一橢圓，已知其焦點爲 $(0,0)$ 和 $(4,4)$，且 $y = x + \sqrt{2}$ 爲此橢圓的切線。

(1) 設此橢圓方程式爲 $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey = 1$，求 $A$、$B$、$C$、$D$、$E$ 之值。
(2) 經過適當的平移及旋轉之後得方程式爲 $Mx^2 + Ny^2 = 1$，求數對 $(M,N) =$ ____。
(3) 過 $(1,0)$ 作此圖形之切線，求此切線方程式。 (97彰化藝術)

**答.** (1) $(A,B,C,D,E) = (5,-8,5,-4,-4)$ (2) $(M,N) = (9,1)$ 或 $(1,9)$
(3) $x - 2y = 1$。

## 19 矩陣、行列式

894. 設 $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\2&-1&2\\0&2&-1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix}$，若 $ABA=I_3$，其中 $I_3$ 爲三階單位矩陣，則 $b+d+i=$ ________。 (99嘉義高工)

**答.** $-13$。

895. 已知矩陣 $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\1&1&0\\0&3&2\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&0&1\\0&3&1\end{bmatrix}$ 且 $C$ 爲三階方陣，滿足 $ACA+BCB=ACB+BCA+I$，其中 $I=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，求 $C$。 (100師大附中)

**答.** $\begin{bmatrix}1&2&5\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}$。

896. 矩陣 $A=\begin{bmatrix}1&2&-1\\2&0&1\\-1&1&2\end{bmatrix}$，若 $A^3+aA^2+bA+cI=O$，求 $a+b+c$。(99彰化藝術)

**答.** 6。

**解.** Cayley-Hamilton 定理: 特徵多項式必爲零多項式。

$$p_A(x)=\begin{vmatrix}1-x&2&-1\\2&-x&1\\-1&1&2-x\end{vmatrix}=-(x^3-3x^2-4x+13)。$$

若其無重根，則爲最小多項式，可以微分和輾轉相除法檢驗之，得無重根。

$(a,b,c)=(-3,-4,13)$。所求 $a+b+c=6$。

897. 設矩陣 $A=\begin{bmatrix}3&3&3\\3&3&3\\3&3&3\end{bmatrix}$，矩陣 $I=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，若 $(A+I)^4=xA+I$，其中 $x,y$ 爲兩定實數，則 $x+y=$ ____。 (98嘉義高工)

**答.** 1112。

**解.** $A^2=9A\Rightarrow A$ 的最小零多項式 $t^2-9t$。令$f(t)=(t+1)^4$，則 $f(0)=1, f(9)=10^4\Rightarrow f(t)$ 除以 $t^2-9t$ 的餘式爲 $\frac{10^4-1}{9}t+1\Rightarrow x=1111, y=1\Rightarrow x+y=1112$。

898. 設 $A=\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ 且乘法反元素 $A^{-1}$ 存在，若 $A-A^{-1}=I_2$ ( $I_2$ 爲二階單位矩陣)，則 $A^6=xA+yI_2$，其中 $x,\ y\in\mathbb{R}$，試問數對 $(x,y)=$ ________。 (99中壢高中2招)

**答.** $(8,5)$。

899. 設矩陣 $A=\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$，試利用矩陣的對角化方法求 $A^n$，其中 $n$ 爲自然數。

**答.** $\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3\cdot 4^n+2\cdot(-1)^n & (-2)\cdot 4^n+2\cdot(-1)^n \\ (-3)\cdot 4^n+3\cdot(-1)^n & 2\cdot 4^n+3\cdot(-1)^n \end{bmatrix}$。 (99明倫高中)

900. 設 $A=\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$，$n\in\mathbb{N}$，求 $A^n$。 (100北港高中)

**答.** $\begin{bmatrix} -2^{n+1}+3 & 2^{n+1}-2 \\ -3\cdot 2^n+3 & 3\cdot 2^n-2 \end{bmatrix}$。

901. 若 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$，求 $A^{50}$。 (99清水高中)

**答.** $\begin{bmatrix} \frac{2^{51}+1}{3} & \frac{2^{50}-1}{3} \\ \frac{2^{51}-2}{3} & \frac{2^{50}+2}{3} \end{bmatrix}$。

902. $A=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$，$P=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$，若 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$，求 (1) $\delta=$ ____，(2) 求 $I+A+A^2+A^3+\ldots+A^n+\ldots=$ ____。 (98彰化女中)

**答.** (1) $-\frac{1}{4}$ (2) $(I-A)^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{16}{15} & \frac{2}{15} \\ \frac{8}{15} & \frac{16}{15} \end{bmatrix}$。

903. $a,b,c,x,y,z\in\mathbb{R}$，且 $a^2+b^2+c^2=16,\ x^2+y^2+z^2=25$，則 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix}$ 之絕對值的最大值爲 ________。 (100台南二中、99關西高中)

**答.** 60。

**解.** 三邊垂直時，平行六面體有最大體積 $4\cdot 5\cdot\sqrt{1+4+4}=60$。

904. 設 $a,b,c,d,e,f$ 爲實數，且 $a^2+b^2+c^2=9,\ d^2+e^2+f^2=14$，則 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}$ 的最大值爲 ________。 (100北港高中)

**答.** 42。

905. 設 $a,\ b,\ c,\ d,\ e$ 均爲實數且 $a^2+b^2+c^2=16, d^2+e^2+f^2=6$，則行列式 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ 的最大值爲 ________。 (100彰化藝術暨田中高中)

**答.** 24。

906. $a,b,c,d,e,f\in\mathbb{R}$，已知 $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2=50$，求 $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}$ 的最大值。

**答.** 75。 (99文華2招代理)

907. 若 $a^2+b^2=1, c^2+d^2=1, ac+bd=\frac{1}{2}$，則 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ 之值爲 ________。 (99中正預校)

**答.** $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$。

**另解.** 丟番圖恆等式：$(ac+bd)^2+(ad-bc)^2=(a^2+b^2)(c^2+d^2)\Rightarrow ad-bc=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$。

908. $a,\ b,\ c$ 爲 $x^3-2x^2+3x-1=0$ 之三根，則行列式 $\begin{vmatrix} a+b+c & -c & -b \\ -c & a+b+c & -a \\ -b & -a & a+b+c \end{vmatrix}=$ ________。 (100嘉義縣聯招)

**答.** 10。

909. 設 $a,b,c$ 爲方程式 $2x^3+4x^2+6x-1=0$ 的三個根，求行列式 $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$ 的值爲 ________。 (99桃園農工)

**答.** $-8$。

910. 設 $A=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$，且 $X$、$Y$ 均爲二階方陣，滿足 $X+Y=I, XY=O$，若 $aX+bY=A$，其中 $a>b$，且 $a,b$ 爲定數，試求 (1) 數對 $(a,b)$ (2) $X^{10}$。 (101高雄市聯招)

**解.** 由 $X+Y=I$ and $XY=O\Rightarrow X^2=X, Y^2=Y, YX=O$。
$A=aX+bY\Rightarrow AX=aX^2=aX\Rightarrow (A-aI)X=O$。
故 $a$ 爲 $A$ 之特徵值，且 $X$ 之兩行向量皆爲 $a$ 對應之特徵向量。$Y$ 亦同。

$\det(A-xI)=(x-5)(x+2)$ 故 $a=5>-2=b$。

計算特徵向量得 $X=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u & v\end{bmatrix}, Y=\begin{bmatrix}4\\-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w & z\end{bmatrix}$。

$X+Y=\begin{bmatrix}1 & 4\\1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u & v\\w & z\end{bmatrix}=I_2\Rightarrow\begin{bmatrix}u & v\\w & z\end{bmatrix}=\frac{1}{7}\begin{bmatrix}3 & 4\\1 & -1\end{bmatrix}$。

故 $X^{10}=X=\frac{1}{7}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{7} & \frac{4}{7}\\\frac{3}{7} & \frac{4}{7}\end{bmatrix}$。

911. 設兩矩陣 $P,Q$ 滿足 $\begin{cases}3P+4Q &= A\\P+Q &= I_2\end{cases}$，其中 $A=\begin{bmatrix}1 & -3\\2 & 6\end{bmatrix}, I_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$，若 $A^7=aP+bQ$，則 $\log_{12}\frac{1}{ab}=$ ________。 (101台中女中)

**答.** $-7$。

**解.** $p_A(x)=x^2-7x+12=(x-3)(x-4)$，由 Cayley-Hamilton 定理知 $p_A(A)=0$。

而 $P=4I-A=-(A-4I), Q=A-3I$，故 $PQ=O$。

$A^7=(3P+4Q)^7=3^7P^7+4^7Q^7$。

而 $P=\begin{bmatrix}3 & 3\\-2 & -2\end{bmatrix}$, $P^2=\begin{bmatrix}3 & 3\\-2 & -2\end{bmatrix}=P\Rightarrow P^7=P$，$Q=\begin{bmatrix}-2 & -3\\2 & 3\end{bmatrix}$,

$Q^2=\begin{bmatrix}-2 & -3\\2 & 3\end{bmatrix}=Q\Rightarrow Q^7=Q$。

故得 $A=3^7P+4^7Q$，因此 $ab=12^7, \log_{12}\frac{1}{ab}=-7$。

**另解.** 將 $A$ 可對角化，由特徵值及特徵向量找到 $B$，使得 $B^{-1}AB=\begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 4\end{bmatrix}$，令 $P'=B^{-1}AB, Q'=B^{-1}QB$，則 $\begin{cases}3P'+4Q' &= \begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 4\end{bmatrix}\\P'+Q' &= \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\end{cases}\Rightarrow P'=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$,

$Q'=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$。而 $\begin{bmatrix}3^7 & 0\\0 & 4^7\end{bmatrix}=3^7P'+4^7Q'\Rightarrow A=3^7P+4^7Q$。

912. 矩陣 $A=\begin{bmatrix}a & -b\\3 & 3-a\end{bmatrix}, I=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}, P=A-I$ 且 $P^2=P$。 (102中正高中)

(1) 求 $a$、$b$ 的關係式。

(2) $A^{-1}=sP+tI$，$s,\ t\in\mathbb{R}$，則數對 $(s,t)=$ ________。

**答.** (1) $-a^2+3a+3b=2$ (2) $(-\frac{1}{2},1)$。

**解1.** $P(P-I)=O \Rightarrow (a-I)(a-2I)=0$，顯然 $a-I$ 和 $a-2I$ 皆不為 $0$，故 $(x-1)(x-2)=x^2-3x+2$ 為 $A$ 的最小零多項式亦為其特徵多項式，故 $(x-a)(x+a-3)+3b=x^2-3x+2$。

展得得 $-a^2+3a+3b=2$。

**解2.** $A^2-3A+2I=O \Rightarrow A-3I+2A^{-1}=O \Rightarrow A^{-1}=\frac{3}{2}I-\frac{1}{2}A=-\frac{1}{2}P+I$。

# 20 微積分

## 20.1 極限

913. 若數列 $a_1=1,\ a_2=1,\ a_{n+2}=a_n+a_{n+1},\forall n\in\mathbb{N}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$。(100文華高中代理)

**答.** $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$。

914. 設數列 $\langle a_n\rangle$ 滿足 $a_n>0$，且 $a_{n+1}=\frac{a_n}{2}+\frac{2011}{2a_n}$，假設此數列收斂到某一實數，求此實數。(100香山高中)

915. 若 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^5+ax+b}{(x-1)^2}$ 的極限存在，則 $a^2+b^2=$ ________。(100永春高中代理)

**答.** $41$。

**解.** 令 $f(x)=x^5+ax+b$，則 $f(1)=f'(1)=0$，解得 $(a,b)=(-5,4)\Rightarrow a^2+b^2=41$。

**另解.** $x=(x-1)+1$，由二項式定理得 $\frac{x^5+ax+b}{(x-1)^2}=\frac{(a+5)(x-1)+(b+a+1)}{(x-1)^2}+(x-1)^3+5(x-1)^2+10(x-1)+10$。

**類題.** 99彰化藝術4。

916. 設 $a>0$ 且 $k$ 爲實數，若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n-1}+a^{n+k}}{5^{n+1}}=25$，則 $a+k=$ ________。(99嘉義高工)

**答.** $8$。

917. 設 $a_0=\frac{1}{2},\ a_n=\left(\frac{1+a_{n-1}}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$，$n=1,2,3,\ldots,$，則 $\lim\limits_{n\to\infty}4^n(1-a_n)$ 之值爲 ________。

**答.** $\frac{\pi}{18}$。(99師大附中)

**提示.** $a_0=\cos\frac{\pi}{3}$。

918. 已知某函數 $f(x)$ 滿足 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=a$ (定值)，試問以下選項何者正確或錯誤？請說明原因。
(1) $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=0$ (2) $(x-2)\mid f(x)$ (3) $f(x)$ 在 $x=2$ 處連續 (4) $f(x)$ 在 $x=2$ 可微分。(102景美女中)

**答.** 僅 (1) 正確，(2)(3)(4) 反例如 $f(x)=\begin{cases}x-2 & ,\ x\neq 2\\ 1 & ,\ x=2\end{cases}$。

919. 數據 $\sqrt{2},\sqrt{4},\sqrt{6},\ldots,\sqrt{2n}$ 的算術平均爲 $A_n$，標準差爲 $\sigma_n$。求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sigma_n}{A_n}$。

**答.** $\frac{\sqrt{2}}{4}$。(102台中女中)

**解.** $A_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{2k}=\sqrt{2n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sqrt{\frac{k}{n}}\Rightarrow\frac{A_n}{\sqrt{2n}}\to\int_0^1\sqrt{x}dx=\frac{2}{3}$。

$\sigma_n=\sqrt{\frac{1}{n}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}2k-nA_n^2\right)}=\sqrt{\frac{1}{n}\cdot(n(n+1)-nA_n^2)}=\sqrt{n}\sqrt{1+\frac{1}{n}-\frac{A_n^2}{n}}$。

由 $\frac{A_n}{\sqrt{2n}}\to\frac{2}{3}\Rightarrow\frac{A_n^2}{n}\to\frac{8}{9}$，所以 $\frac{\sigma_n}{\sqrt{n}}\to\frac{1}{3}$。

所求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sigma_n}{A_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sigma_n}{\sqrt{n}}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{A_n}=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$。

920. $\langle F_n\rangle$ 爲費氏數列，即 $F_1=F_2=1$ 且 $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$ 在 $n\in\mathbb{N}$ 均成立。令 $\lambda_n=\frac{F_{2n}}{F_{2n-1}}$，

(1) 證明 $\lambda_{n+1}=2-\frac{1}{1+\lambda_n}$。 (97台南二中)

(2) 證明 $\langle\lambda_n\rangle$ 爲增數列。

(3) 證明 $\langle\lambda_n\rangle$ 收斂。

(4) 求 $\langle\lambda_n\rangle$ 之極限。

**證.** (1) $\lambda_{n+1}=\frac{F_{2n+2}}{F_{2n+1}}=1+\frac{F_{2n}}{F_{2n+1}}=1+\frac{F_{2n}}{F_{2n}+F_{2n-1}}=2-\frac{F_{2n-1}}{F_{2n}+F_{2n-1}}=2-\frac{1}{1+\lambda_n}$。

(2) 數學歸納法易證。

(3) 上界 2，遞增有上界，因此收斂。

**解.** (4) $a=2-\frac{1}{1+a}\Rightarrow a^2-a-1=0\Rightarrow a=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$。$\lambda_n$ 皆正，取正，得 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$。

## 20.2 有理式極限

921. (1) $\lim\limits_{x\to1}\frac{a\sqrt{x+3}-b}{x-1}=1$，則 $(a,b)=$ ________。 (100基隆女中代理)

(2) 已知 $\lim\limits_{x\to4}\frac{ax-(6b+2)}{\sqrt{x}-2}=20$，則 $(a,b)=$ ____。 (97台中高工)

(3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+5x+2}+2x\right)=$ ________。 (99中壢家商)

(4) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(5n-\sqrt{an^2-bn+c}\right)=2$，則數對 $(a,b)=$ ________。 (99清水高中)

(5) 設 $k$ 爲定數，若 $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{2x^2+a}-x+b}{(x-1)^2}=k$，求實數 $a+b+k$ 之值 $=$ ________。

**答.** (1) $(4,8)$ (2) $(5,3)$ (3) $-\frac{5}{4}$ (4) $(25,20)$ (5) $\frac{5}{4}$。 (99中興高中)

**另解(3)** 若 $t\gg1$，$c$ 爲常數，則 $\sqrt{t^2+c}=t\sqrt{1+\frac{c}{t^2}}=t\cdot(1+\frac{c}{2t^2}+o(\frac{1}{t^2}))=t+O(\frac{1}{t})$。

$4x^2+5x+2=(2x+\frac{5}{4})^2-\frac{9}{8}$，故所求 $=-2x-\frac{5}{4}+2x=-\frac{5}{4}$。

922. 設 $a>0$ 點 $P(2a,a^2)$ 在 $\Gamma$：$y=\frac{1}{4}x^2$ 上，又點 $Q$ 在 $x$ 軸正向上且 $\overline{OP}=\overline{OQ}$，直線 $\overleftrightarrow{PQ}$ 交 $y$ 軸於 $R$ 點，當點 $P$ 沿曲線趨近於原點時，則點 $R$ 的極限位置座標爲何？

答. 8。 (99大安高工2招)

解. 作 $P$ 到 $x$ 軸的垂足 $S(2a,0)$，則 $\triangle QPS \sim \triangle QRO \Rightarrow R_y = \frac{a^2}{\overline{OQ}-2a}\cdot\overline{OQ}$。
而 $\overline{OQ}=\overline{OP}=\sqrt{4a^2+a^4} \Rightarrow R_y = \frac{\sqrt{4a^2+a^4}}{\sqrt{4a^2+a^4}-2a}a^2 = \sqrt{4+a^2}(\sqrt{4+a^2}+2) \to 8$, as $a\to 0$。

## 20.3 夾擠定理

923. (1) $a_n = \sum_{k=1}^{n}\sqrt{k(k+1)}$，則 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2} =$ ________。 (98玉井工商)

(2) 試求 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\sqrt{k(k+2)}\right) =$ ________。 (97中和高中)

(3) 已知數列 $\langle a_n\rangle$ 中，若 $a_n = \frac{1}{\sqrt{3n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{3n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{3n^2+3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{3n^2+2n}}$，則 $\lim_{n\to\infty}a_n =$ ________。 (98嘉義高工)

答. (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{2}{\sqrt{3}}$。

924. 設 $a_n = \sum_{k=97}^{2008}k^n$，求 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$ 之值。 (97松山家商)

答. 2008。

## 20.4 微分

925. (1) 設 $f(x) = \frac{(x-2)(x-4)(x-6)(x-8)(x-10)}{(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)(x-9)}$，則 $f'(6) =$ ________。 (100新竹高工)

(2) 設 $f(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{4}$，求導函數 $f'(1) =$ ________。 (99中興高中)

(3) $f(x) = \frac{100x\cos x}{(x+1)(x+2)(x+3)\cdots(x+100)}$，求 $f'(0)$。 (99清水高中)

(4) 若 $f(x) = \frac{\sqrt{4x+9}\cdot e^{x^2}\cdot(x^2+1)^{12}\cdot x}{\sqrt[3]{3x+8}}$，則 $f'(0) =$ ________。 (98內湖高工)

(5) 設 $f(x) = \frac{\prod_{k=0}^{50}(x-2k)}{\prod_{k=0}^{50}(x+k)}$，求 $\log_2 f'(0)$ 值 $=$ ________。 (102文華高中)

答. (1) $\frac{64}{45}$ (2) $-\frac{3}{2}$ (3) $\frac{1}{99!}$ (4) $\frac{3}{2}$ (5) 50。

解(1) 注意 $f(6)=0,\ f'(6) = \lim_{x\to 6}\frac{f(x)}{x-6} = \frac{4\cdot 2\cdot(-2)\cdot(-4)}{5\cdot 3\cdot 1\cdot(-1)\cdot(-3)} = \frac{64}{45}$。

評. 考微分不考定義，難道要考大家都會的微分乘法規則嗎?

926. 求 $\lim_{x\to 1}\frac{1}{1-x}(\frac{1-x^{2010}}{1-x}-2010)$。 (99彰化藝術)

答. $C_2^{2010} = 2019045$。

**解.** 通分後，使用 L'Hospital rule 兩次。

**另解.** 令 $x=1+t$, 以二項式定理展開之得
$\lim_{t\to 1}\frac{1}{-t}(\frac{-2010t-C_2^{2010}t^2+\ldots}{-t}-2010)=-C_2^{2010}=2019045$。

927. 試求 $\lim_{x\to\pi}\frac{\sin^2 x}{1+\cos 3x}$。 (100全國聯招)

**答.** $\frac{2}{9}$。

928. 設多項式函數 $f(x)$ 之導函數為 $f'(x)$，已知 $f(1)=5$，$f'(1)=3$，求 $\lim_{x\to 1}\frac{x^2f(1)-f(x^2)}{x^2-1}$。

**答.** 2。 (100基隆女中代理)

## 20.5 微積分基本定理、均值定理

929. (1) $\lim_{x\to 4}\frac{\int_4^x\frac{1}{t+\sqrt{t}}dt}{x-4}$。 (100文華高中代理)

(2) 若 $f(x)=\int_0^{\sqrt{x}}\frac{t^2}{1+t^2+t^4}dt$，試求 $f''(1)$。 (100文華高中代理)

**答.** (1) $\frac{1}{6}$ (2) $-\frac{1}{12}$。

**解(1)** 該極限即微分，由微積分基本定理得所求 $=\frac{1}{4+\sqrt{4}}=\frac{1}{6}$。

930. $\lim_{x\to 0}\frac{\int_{x^2}^{x^3}\sqrt{1+t^2}dt}{x^2}=$ ________。 (99家齊女中)

**答.** $-1$。

**解.** 由中間值定理，得上式 $\int_{x^2}^{x^3}\sqrt{1+t^2}dt=(x^3-x^2)\sqrt{1+\xi^2}$，其中 $\xi$ 在 $x^3$ 和 $x^2$ 之間。
故所求 $\frac{\int_{x^2}^{x^3}\sqrt{1+t^2}dt}{x^2}\to -1$。

931. 求值 $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}=$ ________。 (99明倫高中)

**答.** 1。

**解.** 由 Mean-Value Theorem 得 $\frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}=\frac{(x-\sin x)e^{\xi}}{x-\sin x}=e^{\xi}$，其中 $\xi$ 在 $x$ 和 $\sin x$ 之間。
故得 $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}=e^0=1$。

## 20.6 函數方程

932. (1) 設 $f, g$ 為可微分函數，且 $f(x+2y)=f(x)+g(y), \forall x, y\in\mathbb{R}$。試問：若 $f(0)=1, f'(0)=2$，求 $g(5)$。 (100中壢高中)

(2) 同上，求 $g(10)$。 (100鳳山高中)

(3) $f(x+2y)=f(x)+2g(y)$，$f(0)=4, f'(0)=1$，求 $g(10)$。 (100南科實中)

**答.** (1) 20 (2) 40 (3) 10。

**解(1)** 對 $x$ 偏微得 $f'(x+2y)=f'(x), \forall x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) \equiv 2 \Rightarrow f(x)=1+2x$。
$f(0+10)=f(0)+g(5) \Rightarrow g(5)=20$。

933. (1) 設 $f(x)$ 表一實係數多項式，若 $f(x)=5x^4-3x^2[\int_0^1 f(x)dx]+6x-5$，求 $f(x)=$ ________。 (100北港高中)

(2) 設 $f(x)=x+1+\int_0^2 g(x)dx$，$g(x)=2x-3+\int_0^1 f(x)dx$，試求 $g(x)$ 除以 $(4x-1)$ 之餘式。 (100全國聯招)

**答.** $5x^4+\frac{3}{2}x^2+6x-5$ (2) $-2$。

**註.** $\int_0^1 f(x)dx$ 應修正成 $\int_0^1 f(t)dt$ 以避免符號混用。

934. 假設存在一個函數對於所有的實數 $x$ 與 $y$，都滿足 $f(x+y)=f(x)+f(y)+x^2y+y^2x$，且已知 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$，則 $f'(x)=$ ________。 (100桃園新進聯招)

**答.** $1+x^2$。

935. 設有一函數 $f(x)$ 滿足 $\int_1^x f(t)dt=\frac{1}{3}x^3-x^2+ax+b$，自點 $P(1,1)$ 作曲線 $y=f(x)$ 的二切線互相垂直，求 $a$、$b$ 值。 (100鳳山高中)

**答.** $(a,b)=(\frac{9}{4},\frac{-19}{12})$。

936. 若 $f(x)$ 是可微分的實函數，滿足 $(x^4-1)f(x)-(f(x))^3=10x^5-75x^4+125x^3-x^2+5x$ 對任意實數 $x$ 均成立，則導數 $f'(1)$ 之值為 ________。 (99桃園縣高中現職聯招)

**答.** $\frac{5}{6}$。

## 20.7 函數圖形

937. 已知方程式 $2x^3-3(k+1)x^2+6kx-2k=0$ 有三相異實根，求實數 $k$ 的範圍。

**答.** $k>2 \vee k<0$。 (100嘉義高中)

**解.** 令 $f(x)=2x^3-3(k+1)x^2+6kx-2k=0$，則 $f'(x)=0$ 有兩根 $1, k$。
$f(1)f(k)<0 \Leftrightarrow k(k-1)^2(k-2)>0 \Leftrightarrow k>2 \vee k<0$。

938. $x^3-6x^2-15x-k=0$ 有三個相異實根，則 $k$ 之範圍為 ____。 (97台中高工)

**答.** $-100<k<8$。

939. 若 $f(x)=x^3-3x^2-9x+k$，$k\in\mathbb{R}$，且 $f(x)=0$ 有相異 2 負根及 1 正根，則 $k$ 的範圍為 ________。 (100南港高工)

答. $-5 < k < 0$。

940. $2x^3 - 3x^2 - 12 + k = 0$ 有二相異負根及一正根，求實數 $k$ 範圍爲 ________。

答. $-7 < k < 0$。 (99中興高中)

941. 若兩曲線 $y = x^2 - x + a$ 與 $y = x^3 - 2x^2 - 10x + 4$ 交於相異三點，求實數 $a$ 的範圍。

答. $-23 < a < 9$。 (99高雄市聯招)

942. 若直線 $y = 3x + a$ 與曲線 $y = x^3 + 2$ 有三相異交點，則 $a$ 的範圍爲 ________。

答. $0 < a < 4$。 (100成淵高中)

**另解.** 以圖形觀之，$y = x^3 + 2$ 有兩斜率爲 3 之切線。若直線在此二切線之間則爲 三相異交點。
$\frac{d}{dx}(x^3 + 2) = 3 \Rightarrow x = \pm 1, y = (\pm 1)^3 + 2 = 3$ or $1$。
兩切線 $y = 3x, y = 3x + 4 \Rightarrow 0 < a < 4$。

**類題.** 當三次方程式，缺 2 次項，或 1 次項時，可以判別式處理之，見 100南湖高中代理3。

943. $\Gamma:\ y = x^2 - \frac{1}{2}$，已知 $A(a, 3)$ 可對 $\Gamma$ 作三條法線，求 $a$ 的範圍。 (100豐原高中)

答. $-4 < a < 4$。

944. 三次函數 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$ 之圖形爲曲線 $\Gamma$，由點 $A(2, \frac{2}{3})$ 作曲線 $\Gamma$ 的切線。

**解.** 令切點爲 $(t, f(t))$，則切線可表示爲 $y - \frac{t^3}{3} + t = (t^2 - 1)(x - t)$。 (99桃園高中)
將 $a$ 代入，解得 $t = 1$ or $1 \pm \sqrt{3}$。故有三條切線。

945. 設過原點 $(0, 0)$ 有三條相異直線與 $f(x) = x^3 + kx^2 + 1$ 相切，則實數 $k$ 值的範圍爲 ________。 (100楊梅高中、99台中二中)

答. $k > 3$。

**評.** 從圖形看就是原點必須落在過反曲點之切線和函數圖形之間(縱向)。

946. 三次曲線 $y = x^3 + ax^2 + x + 1$，若由原點可作三條相異之切線，試求實數 $a$ 的範圍。

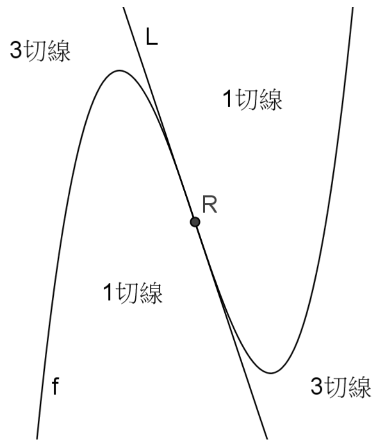
答. $a > 3$。 (101中科實中)

947. $a \in \mathbb{R}$，過 $P(a, 2)$ 作 $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ 的切線，若所作的切線恰有一條，求 $a$ 的範圍。 (97大里高中)

**答.** $\frac{1}{3} < a < 3$。

**評.** $(\frac{1}{3}, 2)$ 和 $(3, 2)$ 分別爲 $y = 2$ 和過反曲點之切線與 $y = f(x)$ 之交點。

**小結.** 以上數題，平面上一點，對三式多項式之圖形作切線之數量如圖，其中 $R$ 爲反曲點，$L$ 爲過反曲點之切線，若點在 $y = f(x)$ 或 $L$ 且不爲 $R$，則爲兩切線。而 $R$ 點僅一切線，其餘區域如圖所標示。




948. 設函數 $f(x) = 2x^3 - 3ax^2 + 6(a-1)x - 4$ 的圖形與 $x$ 軸正向相切，且在切點處 $f(x)$ 有極小值，求 $a$ 之值。 (100台南二中、99松山家商2招)

**答.** 3。

949. 拋物線 $\Gamma$ : $y = P(x)$ 的對稱軸平行於 $y$ 軸，且 $\Gamma$ 與 $x$ 軸交於點 $(2, 0)$，並在 $x = 1$ 時與函數 $y = x^4 + 1$ 的圖形相切，試求 $P(x)$。 (100永春高中代理)

**答.** $-6x^2 + 16x - 8$。

950. $f(x)$ 爲三次函數，若 $f(x)$ 在 $x = 1$ 處的切線方程式 $4x - y - 3 = 0$，又在 $x = -1$ 處有極小值 $-7$，則 $f(x) =$ ________。 (99嘉義高工)

**答.** $-x^3 + x^2 + 5x - 4$。

951. 設 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$，若曲線 $y = f(x)$ 上，以 $(2, -10)$ 爲切點的切線斜率爲最小，且此時之切線通過原點，求 $a, b, c$ 之值及切線方程式。 (98家齊女中)

**答.** $a = -6, b = 7, c = -8$, 切線 $y = -5x$。

952. 已知拋物線 $y^2 = 2ax$ 上的點 $P$ 到直線 $x - y = -3$ 的最短距離爲 $\frac{5\sqrt{2}}{4}$，求點 $P$ 的座標。

**答.** $(\frac{1}{2}, 1)$。 (99松山工農)

953. 已知三次多項式函數 $y = f(x)$ 的圖形與某一條直線交於相異三點 $(a, f(a)), (b, f(b)), (c, f(c))$，試證：函數 $y = f(x)$ 圖形的反曲點坐標爲 $(\frac{a+b+c}{3}, f(\frac{a+b+c}{3}))$。

**證.** 令直線 $L$: $y = \alpha x + \beta$ 過 $(a, f(a)), (b, f(b)), (c, f(c))$。 (100華江高中)
則 $f(x) - (\alpha x + \beta) = 0$ 有三相異根 $a, b, c$，又 $\deg f = 3 \Rightarrow f(x) = r(x-a)(x-b)(x-c) + (\alpha x + \beta)$。
$f''(x) = r \cdot (6x - 2(a+b+c)) \Rightarrow f''(\frac{a+b+c}{3}) = 0$ 且 $f''(x) > 0$ 當 $x > \frac{a+b+c}{3}$ 和 $f''(x) < 0$ 當 $x < \frac{a+b+c}{3}$。
所以 $(\frac{a+b+c}{3}, f(\frac{a+b+c}{3}))$ 是 $f(x)$ 函數圖形的反曲點。

954. 若兩圖形 $y = f(x) = a^x$ 與 $y = g(x) = \log_a x$ 有唯一的交點，則不爲 1 的正實數 $a$之範圍爲 ________。 (99建國高中)

**答.** $e^{-e} \leq a < 1$ 或 $a = e^{\frac{1}{e}}$。

**解.** 見數學傳播 函數 y=a^x 與 y=log_a x 的圖形交點個數的探索。

955. 指數函數 $y = f(x) = a^x$ 與對數函數 $y = g(x) = \log_a x$，若已知 $f(x)$ 與 $g(x)$ 相交三點，求實數 $a$ 的範圍。 (97台中一中)

**答.** $0 < a < e^{-e}$。

**解.** 見數學傳播 函數 y=a^x 與 y=log_a x 的圖形交點個數的探索。

956. 若 $|x^2 - 3| - x + 2 - k = 0$ 恰有兩相異實根，則 $k$ 值範圍爲 ________。(99關西高中)

**答.** $k < \frac{21}{4}$ 或 $2 - \sqrt{3} < k < 2 + \sqrt{3}$。

**提示.** 畫圖。

957. 設 $a, b, c \in \mathbb{R}$，$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$，若 $\lim\limits_{x \to -1} \frac{f(x)}{x+1} = 3$ 且 $y = f(x)$ 無極值時，求 $a$ 值範圍爲何？ (99台中一中)

**答.** $0 \leq a \leq 6$。

958. 設三次函數 $f(x) = \frac{1}{3}ax^3 + (b-1)x^2 + (2-a)x + 1$，已知 $f(x)$ 無極值，且對任意實數 $x$ 恆有 $f''(x) \leq |x|$，求滿足件之所有點 $(a, b)$ 所圍成之面積。 (99台中二中)

**答.** $\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}$。

**解.** $f''(x)$ 爲一次式，又 $f''(x) \leq |x|$，所以其一次項係數絕對值 $\leq \frac{1}{2}$，常數項非正，得 $|a| \leq \frac{1}{2}, b \leq 1$。
$f'(x) = ax^2 + (b-1)x + 2 - a$，欲使 $f$ 無極值，即判別式非正 $\Rightarrow (a-1)^2 + (b-1)^2 \leq 1$。又 $|a| \leq \frac{1}{2}$和 $b \leq 1$。可計算得面積 $\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}$。

959. 已知三次函數 $f(x)=ax^3+bx^2+cx$ 係數 $a,b,c$ 皆爲正數且其極值不存在，試求 $\frac{f(1)}{f''(0)}$ 的最小值 ________。 (99中壢高中2招)

**答.** $\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{3+2\sqrt{3}}{6}$。

960. 設 $m$ 爲實數，若四次方程式 $3x^4-4mx^3+1=0$ 無實數根，則 $m$ 的範圍爲 ________。

**答.** $-1<m<1$。 (99基隆女中、98嘉義高中、97台南二中)

**另解.** 顯然 $x=0$ 不是方程式之解。

若 $|m|<1,\ x\neq 0$。算幾不等式得 $\frac{x^4+x^4+x^4+1}{4}\geq |x|^3>mx^3 \Rightarrow 3x^4-4mx^3+1>0 \Rightarrow$無實根。

若 $|m|\geq 1$，令 $f(x)=3x^4-4mx^3+1$，$f(0)=1, f(m)=3m^4-4m^4+1<0$，由勘根定理得至少一實根。

961. 兩曲線 $\Gamma_1: y=x^3+x$、曲線 $\Gamma_2: y=x^3+x+k$，若直線 $L$ 爲兩曲線 $\Gamma_1$、$\Gamma_2$ 之公切線且直線 $L$ 之斜率大於 4，試求實數 $k$ 之範圍。 (97台中女中)

**答.** $|k|>4$。

## 20.8 積分

### 基本技巧

962. 試求 $\int_1^2 (x^3-5x^2+x-6)(x-1)^3dx$ 的值。 (101文華高中)

**解.** $-\frac{1529}{420}$。

**提示.** $x=y+1$，或 $x-1$ 連續綜合除法。

963. 試求 $\int_0^2 x^2(1-x)^{23}dx$。 (100文華高中)

**答.** $\frac{-4}{25}$。

**解.** $\int_0^2 x^2(1-x)^{23}dx=\int_{-1}^1(1-y)^2y^{23}dy=\int_{-1}^1 y^{23}-2y^{24}+y^{25}dy=\frac{-4}{25}$。

**另解.** 亦可分部積分兩次。

964. Evaluate the integral $\int_0^2 \frac{2x+4}{x^2+4x+3}dx=$ ____。 (98南科雙語)

**答.** $\ln 5$。

**解.** 注意 $(x^2+4x+3)'=2x+4$。因此 $\int_0^2 \frac{2x+4}{x^2+4x+3}dx=\ln|x^2+4x+3|\,\Big|_{x=0}^{x=2}=\ln\frac{15}{3}=\ln 5$。

965. 試求 $\int_{-1}^2 \frac{3x^5}{\sqrt{x^3+1}}dx$。 (97台中高工)

**答.** 12。

966. 積分 $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^2}$ 的值爲 ____。 (97嘉義高中)

**答.** $\pi$。

**解.** 極坐標代換: $\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\frac{rd\theta dr}{(1+r^2)^2}=\frac{-\pi}{1+r^2}\Big|_0^{\infty}=\pi$。

967. 在坐標平面上，心臟線 $r=1-\cos\theta$ 所包圍的面積是 ____。 (97嘉義高中)

**答.** $\frac{3\pi}{2}$。

**解.** $\int_0^{2\pi}\int_0^{1-\cos\theta}rdrd\theta=\int_0^{2\pi}\frac{(1-\cos\theta)^2}{2}d\theta=\pi+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta=\frac{3\pi}{2}$。

968. 空間坐標中，設 $0\le x+2y\le 6, -1\le x-3y+z\le 3, 1\le x+3y-2z\le 7$ 所圍成的平行 六面體爲 Γ，則 Γ 的體積 ________。 (100文華高中)

**答.** 16。

**解.** 令 $\mathbf{x}=(x,y,z)$, $\mathbf{a}=(\alpha,\beta,\gamma)=(x+2y,x-3y+z,x+3y-2z)$。

$$J=\mathbf{x_a}=\begin{vmatrix}1&2&0\\1&-3&1\\1&3&-2\end{vmatrix}=9,$$

所求$=\int_\Gamma dxdyxdz=\int_1^7\int_{-1}^3\int_0^6|J^{-1}|d\alpha d\beta d\gamma=\frac{6\cdot4\cdot6}{9}=16$。

969. 階乘函數的定義是 $\Gamma(x)=\int_0^{\infty}t^{x-1}e^{-t}dt, x>0$。 (97嘉義高中)

(1) 計算 $\Gamma(1)$。

(2) 計算 $\Gamma(\frac{1}{2})$。

(3) 證明 $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$。

(4) 對正整數 $n$，求 $\Gamma(n+1)$ 的值。

**答.** (1) 1 (2) $\sqrt{\pi}$ (4) $n!$。

**解.** (1) $\Gamma(1)=\int_0^{\infty}e^{-t}dt=1$。

(2) $\Gamma(\frac{1}{2})=\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-t}dt=2\int_0^{\infty}e^{-s^2}ds=\sqrt{\pi}$。

(3) $\Gamma(x+1)=\int_0^{\infty}t^xe^{-t}dt=\lim\limits_{a\to\infty}-t^xe^{-t}|_0^a+x\int_0^{\infty}t^{x-1}e^{-t}=x\Gamma(x)$。

(4) 由數歸可得 $\Gamma(n+1)=n!$。

**其它例題**

970. $\int_0^2 \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2-x)(x+x^n)}{1+x^n}dx$ 之値爲 ________。 (99彰化女中、99中正預校)

**答.** $\frac{7}{6}$。

971. 在坐標平面上，設曲線 $y = x + \frac{1}{x}$ 及兩直線 $x = 2$，$y = 2$ 所圍成的區域爲 $S$，則 $S$ 的面積爲 ________。 (100新北聯招)

**答.** $\ln 2 - \frac{1}{2}$。

972. 抛物線 $y = -x^2 + 4x - 3$ 上；分別以 $(0, -3)$ 及 $(3, 0)$ 兩點爲切點作切線，此兩切線與抛物線所圍區域面積 ________。 (99嘉義高工、98彰化女中)

**答.** $\frac{9}{4}$。

973. 試由 $(-1, -3)$ 對抛物線 $y = x^2$ 作切線，得兩切線 $L_1, L_2$，則由 $\Gamma, L_1, L_2$ 所圍成的面積爲 ________。 (99中壢高中2招)

**答.** $\frac{16}{3}$。

974. 考慮不等式 $x + 2 \geq y \geq \frac{1}{4}x^2 + x + 1$ 所決定的圖形 $A$。若直線 $y = ax + 1$ $(a < 0)$ 將 $A$ 的面積分成 $1 : 2$，則 $a =$ ________。 (100松山工農)

**答.** $-\frac{1}{8}$。

**解.** 先解交點 $x + 2 = \frac{x^2}{4} + x + 1 \Rightarrow x = \pm 2$，令交點爲 $A(-2, 0), B(2, 4)$。

取 $P(0, 1)$ 在抛物線上。則 $A$ 的面積 $= \frac{4}{3}\triangle ABP = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2}|\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}| = \frac{8}{3}$。

$y = ax + 1$ 與 $x + 2$ 和 $y = \frac{x^2}{4} + x + 1$ 分別交於 $C(\frac{1}{a-1}, \frac{1}{a-1} + 2), P$。

取 $Q(1, \frac{9}{4})$ 在抛物線上。則 $A$ 在直線 $y = ax + 1$ 右側之面積 $= \triangle PBC+$弓形 $BPQ$。

計算得該面爲 $\frac{4}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-a}$，其超過 $\frac{1}{3} \cdot \frac{8}{3}$，因此令其等於 $\frac{16}{9}$，解得 $a = -\frac{1}{8}$。

**評.** 本題中，運用阿基米德的弓形面積結果。

975. 球 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 被平面 $x + 2y + 2z + 2 = 0$ 分成兩部分，其體積分別爲 $V_1, V_2$ $(V_1 < V_2)$，則 $V_1 : V_2 =$ ________。 (99苗栗高中)

**答.** $2 : 25$。

976. 若球 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ 被平面 $3x + 2y + 2\sqrt{3}z = 5$ 分割成兩部分，求較小部分之體積。

**答.** $\frac{5\pi}{3}$。 (99中壢高中)

977. $y = x^2 - 1$，一直線通過 $(1,2)$，求此直線與拋物線所圍的最小面積。 (100台中二中)

**答.** $\frac{8\sqrt{2}}{3}$。

**解.** 令直線 $y = mx - m + 2$，交點 $x$ 坐標滿足方程式 $x^2 - mx + m - 3 = 0$。
令兩根 $\alpha < \beta$。則 $\alpha + \beta = m, \alpha\beta = (m-3) \Rightarrow \beta - \alpha = \sqrt{m^2 - 4m + 12}$。
所圍面積 $= -\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx$，分部積分，再積分可得 $\frac{(\beta-\alpha)^3}{6}$。
當 $m = 2$ 時，有最小面積 $= \frac{8\sqrt{2}}{3}$。

**評.** 此技巧稱設而不求，在二次式中，常利用根與係數化簡之，類似運用見 100育成高中代理11。

978. 已知拋物線 $\Gamma:\ y = 4 - x^2$ 與一點 $A(1,2)$，設 $L$ 爲過 $A$ 的任一直線，求 $\Gamma$ 與 $L$ 所圍成區域之面積的最小值，及此時 $L$ 的方程式。 (98嘉義女中)

**答.** $\min = \frac{32}{3}, L:\ y = -2x + 4$。

979. 過點 $(1,2)$ 之直線交雙曲線 $xy = 1$ 於 $P$、$Q$ 兩點，求 $\overline{PQ}$ 長度的最小值。

**答.** 3。 (98嘉義女中)

980. 設四次多項式 $f(x) = -x^4 + x^3 - x^2 + x$，選取積分區間 $a \le x \le b$，使得定積分 $\int_a^b f(x)dx$ 得到 最大值，求此最大值爲 ________。 (101中科實中)

**答.** $\frac{13}{60}$。

981. (1) $x$ 爲實數，求 $\cos x \sin x$ 的最大值及最小值分別爲何？ (98台北縣聯招)

(2) $x$ 爲實數，求 $\frac{\sin x + \cos x}{1 + \sin x \cos x}$ 的最大值及最小值分別爲何？

(3) 求 $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x + \cos x}{1 + \sin x \cos x} dx$。

**答.** (1) $-\frac{1}{2}$ (2) $\max = 1, \min = -1$ (3) $\frac{-\ln(16 - 9\sqrt{3})}{\sqrt{3}}$。

**解.** (1) $\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$，所以最大值爲 $\frac{1}{2}$，最小值爲 $\frac{-1}{2}$。

(2) 令 $y=\sin x+\cos x$，則 $\sin x\cos x=\frac{y^2-1}{2}$。由和角可得 $-\sqrt{2}\le y\le\sqrt{2}$。
令 $t=\frac{\sin x+\cos x}{1+\sin x\cos x}=\frac{y}{1+\frac{y^2-1}{2}}=\frac{2y}{y^2+1}\Rightarrow ty^2-2y+t=0$，判別式$\ge 0\Rightarrow$ $-1\le t\le 1$。
代入解 $y$ 檢驗，可得 $y=1,y=-1$。因此最大最小值分別爲 $1,-1$。

(3) 令 $y=\sin x-\cos x$，則 $\sin x\cos x=\frac{1-y^2}{2}, y'=\sin x+\cos x$。

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin x+\cos}{1+\sin x\cos x}dx&=\int_{-1}^{\frac{1-\sqrt{3}}{2}}\frac{dy}{1+\frac{1-y^2}{2}}=\int_{-1}^{\frac{1-\sqrt{3}}{2}}\frac{2dy}{3-y^2}\\&=-\frac{1}{\sqrt{3}}\int_{-1}^{\frac{1-\sqrt{3}}{2}}\frac{1}{y-\sqrt{3}}-\frac{1}{y+\sqrt{3}}dy\\&=-\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{y-\sqrt{3}}{y+\sqrt{3}}\right|\Bigg|_{-1}^{\frac{1-\sqrt{3}}{2}}\\&=\frac{-\ln(16-9\sqrt{3})}{\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

982. 求滿足 $\begin{cases}x^2+y^2 & \le 1\\ y^2+z^2 & \le 1\end{cases}$ 之共同部分體積。 (98彰化女中)

**答.** $\frac{16}{3}$。

**解.** $x^2\le 1-y^2, z^2\le 1-y^2$,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}dxdzdy&=8\int_0^1 1-y^2dy\\&=\frac{16}{3}.\end{aligned}$$

983. 試證：半徑爲 $r$ 的球體的體積爲 $\frac{4}{3}\pi r^3$。 (100全國聯招、97彰化藝術)

984. 在直徑 12 公分的半球形容器內裝滿水，將此容器傾斜 $30^\circ$，求流出去的水量爲多少立方公分？ (99高雄市聯招、98清水高中)

**答.** $99\pi$。

985. 正四面體的容器裝了一些水，當正四面體的一個面放置於水平桌面時，容器內水高爲容器高的 $\frac{1}{2}$，現將它上下倒置後水位高爲容器高的 ____ 倍。 (97師大附中)

**答.** $\frac{\sqrt[3]{7}}{2}$。

**解.** 水的量爲體積的 $1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$ 倍。所求爲 $\sqrt[3]{\frac{7}{8}}=\frac{\sqrt[3]{7}}{2}$。

986. 設 $x>-1, F(x)=\int_0^1 \frac{t^z-1}{\ln t}dt$，則 $\frac{d}{dx}F(x)=$ ____。 (102建國中學)

**答.** $\frac{1}{x+1}$。

**解.** $t^x-1=\ln t\int_0^x t^s ds \Rightarrow F(x)=\int_0^1\int_0^x t^s ds dt=\int_0^x\int_0^1 t^s dt ds=\int_0^x \frac{1}{s+1}ds=\ln(x+1)$。

故 $\frac{d}{dx}F(x)=\frac{1}{x+1}$。

## 20.9 旋轉體

987. $y=\sin x, x=0, x=\pi$，與 $x$ 軸所圍區域繞 $y=1$ 旋轉的旋轉體體積為 ________。

**答.** $4\pi-\frac{\pi^2}{2}$。 (99建中市內)

988. 求由 $y^2=4x$ 與 $x^2=4y$ 所圍成之區域繞 $x$ 軸旋轉所得之旋轉體體積為 ________。

**答.** $\frac{96\pi}{5}$。 (99中興高中)

989. 求 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 繞 $x$ 軸所得旋轉體 $\tau$ 的表面積。 (98彰化女中)

**答.** $32\pi+\frac{200\pi}{3}\sin^{-1}(\frac{3}{5})$。

990. 設聯立不等式 $\begin{cases}\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}\le 1\\ |y|\le 2\end{cases}$ 在坐標平面上所圍成的區域為 $R$，求此區域 $R$ 繞 $x$ 軸旋轉所得旋轉體體積為 ________。 (100彰化女中)

**答.** $\left(\frac{320}{3}-40\sqrt{3}\right)\pi$。

991. 在坐標平面上，設 $S=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 2x \text{ 且 } x\le y\}$，求區域 $S$ 繞直線 $x=2$ 旋轉一周所得的旋轉體體積。 (100桃園現職聯招)

**答.** $\frac{\pi^2}{2}-\frac{2\pi}{3}$。

992. 求二橢圓 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ 與 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$ 所圍成區域的公共部分區域繞 $x$ 軸旋轉一周所得體積。 (99彰化女中)

**答.** $\frac{208}{5}\pi$。

993. 求拋物線 $y=-x^2+2x$ 與直線 $y=-x$ 的圖形所圍成之封閉區域繞 $x$ 軸旋轉一圈所得之旋轉體的體積為 ________。 (100桃園高中)

**答.** $\frac{20\pi}{3}$。

**解.** 畫圖，注意 $y$ 的範圍，應分成三段 $[0,1],[1,2],[2,3]$。
所求 $=\pi\left[\int_0^1(-x^2+2x)^2dx+\int_0^1(-x)^2dx+\int_0^1\left((-x)^2-(-x^2+2x)^2\right)dx\right]=\frac{20\pi}{3}$。

**評.** 分段分段，這根本是是在考驗我們計算錯誤的能力。

994. 設曲線 $y=ax^2$ $(a<0,x\geq 0)$ 與曲線 $y=x^2-1$ 交於 $P$ 點，$L$ 爲過原點 $O$ 和點 $P$ 的直線，$S$ 爲 $L$ 與曲線 $y=ax^2$ 圍成的區域，且 $T$ 爲 $S$ 繞 $x$ 軸旋轉一周所得的旋轉體。則當 $a$ 爲何值時，$T$ 有最大的體積？最大體積爲何？ (100師大附中)

**答.** $a=-1$，$T_{\max}=\frac{1}{24}$。

995. 一曲線 $\Gamma$ : $y=\sqrt{2ax}$ 上一點 $P$，已知 $\overline{PO}=1$，$P$ 對 $x$ 軸做垂足 $H$，求被 $\Gamma$、$\overline{PH}$、$x$ 軸圍住，繞 $x$ 軸旋轉的旋轉體體積 $V(a)$ 的最大值。 (100豐原高中)

**答.** $\frac{\sqrt{3}}{9}\pi$。

996. 設直線 $L$ : $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{-1}$ 在平面 $E$ : $x-y+2z-1=0$ 上的投影直線爲 $M$，將直線 $M$ 繞 $y$ 軸旋轉一周所成的曲面方程式爲 ________。 (100桃園現職聯招)

**答.** $4x^2-17y^2+4z^2+2y-1=0$。

997. $A(1,3,6),B(5,6,6)$，且 $S=\{P \mid \Delta PAB$ 面積大於 10 且周長小於 $15\}$，求 $S$ 的體積爲多少？ (102板橋高中)

**答.** $\frac{11}{3}\sqrt{\frac{11}{3}}\pi$。

**解.** 首先注意到 $\overline{AB}=5$，因此兩限制條件可轉換成 $P$ 到 $AB$ 的距離大於 4，以及 $P$ 在某橢球內，其該該橢球爲一轉旋體，以 $\overline{AB}$ 爲轉軸，將某個以 $A$, $B$ 爲焦點，長軸爲 10 的橢圓旋轉一圈。
我們可以平移及轉動這個圖形，其體積保持不變，故可重新假設 $A(-\frac{5}{2},0,0)$, $B(\frac{5}{2},0,0)$, $P(x,y,z)$。
$\triangle PAB\geq 10\Leftrightarrow\sqrt{y^2+z^2}>4$，周長 $<15\Leftrightarrow\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2+z^2}{\frac{25}{4}\cdot 3}<1$。
令 $R=\{(x,y,z)\mid\sqrt{y^2+z^2}>4,\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2+z^2}{\frac{25}{4}\cdot 3}<1\}$，$\int_R dydzdx=\int_{-\sqrt{\frac{11}{3}}}^{\sqrt{\frac{11}{3}}}\int_4^s\int_0^{2\pi}rd\theta drdx$，其中 $s=\sqrt{\frac{75-3x^2}{4}}$。
故其體積爲 $2\pi\int_0^{\sqrt{\frac{11}{3}}}r^2\Big|_4^s dx=2\pi\int_0^{\sqrt{\frac{11}{3}}}\frac{11-3x^2}{4}dx=2\pi(\frac{11}{4}\sqrt{\frac{11}{3}}-\frac{11}{12}\sqrt{\frac{11}{3}})=\frac{11}{3}\sqrt{\frac{11}{3}}\pi$。

**Pappus 定理**

998. 求由 $y=\sqrt{x}$ 與 $y=x$ 所圍成的區域 $R$，繞下列直線旋轉一週所形的立體的體積。
(a) $x$ 軸 (b) $y=1$ (c) $y$ 軸 (d) $x=1$。 (100內湖高工2招)

**答.** $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{2\pi}{15}$, $\frac{\pi}{5}$。

**解.** $\int_0^1(\sqrt{x}-x)dx=\frac{1}{6}$. $\bar{x}=6\int_0^1 x(\sqrt{x}-x)=\frac{2}{5}$. $\bar{y}=6\int_0^1 y(y-y^2)dy=\frac{1}{2}$.
用 Pappus 定理可得以下
(a) $\frac{1}{6}\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$. (b) $\frac{1}{6}\cdot 2\pi\cdot(1-\frac{1}{2})=\frac{\pi}{6}$. (c) $\frac{1}{6}\cdot 2\pi\cdot\frac{2}{5}=\frac{2\pi}{15}$. (d) $\frac{1}{6}\cdot 2\pi\cdot(1-\frac{2}{5})=\frac{\pi}{5}$。

999. 平面上坐標系上兩個函數圖形 $y=f(x)=\sqrt{x}, y=g(x)=\frac{x}{2}$ 所圍成的區域假設爲 $R$，試分別求出將 $R$
(1) 繞 $x$ 軸 (2) 繞 $y$ 軸一圈所得之旋轉體體積。 (99明倫高中)

**答.** (1) $\frac{8}{3}\pi$ (2) $\frac{64}{15}\pi$。

1000. 將 $xy$ 平面上的區域 $\begin{cases} x^2+y^2\le 1 \\ x\le 0,\ y\ge 0 \end{cases}$ 繞 $xy$ 平面上的直線 $x=y$ 在空間中旋轉一圈所得的旋轉體體積 = ________。 (99松山家商)

**答.** $\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}$。

**解.** 可計算得形心 $(-\frac{4}{3\pi},\frac{4}{3\pi})$，其到 $x=y$ 的距離爲 $\frac{4\sqrt{2}}{3\pi}$。
由 Pappus 定理得所求 $=\frac{1}{4}\pi\cdot\frac{4\sqrt{2}}{3\pi}\cdot 2\pi=\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$。

## 20.10 黎曼和

1001. (1) 令 $s=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{10000}}$，若 $n\le\frac{s}{10}\le n+1$，其中 $n$ 爲自然數，則 $n=$ ________。 (100中正高中2招)

(2) 同上，求 $[S]$。 (100北一女中)

(3) 若 $k=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{120}}$，求 $[k]=$ ________。 (100文華高中)

**答.** (1) 19 (2) 198 (3) 20。

**解.** (1) 從積分的上下和，可得不等式：$\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{10000}}\le\int_1^{10000}\frac{1}{\sqrt{x}}dx=198\le 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{9999}}$。
計算積分得 $198.01\le s\le 199\Rightarrow n=19$。

(3) 從積分的上下和，可得不等式：$\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{120}}+\frac{1}{\sqrt{121}}\le\int_1^{121}\frac{1}{\sqrt{x}}dx\le 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{120}}$。因此 $20\le k\le 20+1-\frac{1}{11}<21-\frac{1}{11}\Rightarrow[k]=20$。

1002. (1) 若 $k=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{80}}$，求 $[k]$。 (100香山高中)

(2) 求 $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{900}}$ 的整數部分。 (99台中一中)

(3) $a_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots++\frac{1}{\sqrt{n}}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{n}}$。 (99左營高中)

**答.** (1) 16 (2) 58 (3) 2。

1003. (1) 求 $\frac{1}{\sqrt{n^3}}(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{n})$。 (98高雄市聯招、97陽明高中)

(2) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}=$ ____。 (97台南女中)

(3) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{2\sqrt{nk}}\right)$。 (100中科實中)

**答.** (1) $\frac{2}{3}$ (2) 2 (3) $\sqrt{2}-1$。

1004. (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n+n}}\right)=$ ________。 (100成淵高中)

(2) 計算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{(2n+1)^2}+\frac{n}{(2n+2)^2}+\frac{n}{(2n+3)^2}+\ldots+\frac{n}{(2n+n)^2}\right)$ 的值。 (100彰化女中)

(3) 試求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(k+n)\sqrt{2kn+k^2}}{n^3}$ 之值。 (100慈濟聯招)

**答.** $2\sqrt{2}-2$ (2) $\frac{1}{6}$ (3) $\sqrt{3}$。

1005. (1) 求值 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\frac{n}{n^2+3^2}+\ldots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)=$ ________。 (99明倫高中)

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k^2}=$ ________。 (99全國聯招)

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+k^2}=$ ________。 (99建中市內)

**答.** (1) $\frac{\pi}{4}$ (2) $\frac{1}{2}\ln 2$ (3) $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$。

1006. 試求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{2k-1}{2}}\right)$。 (101高雄市聯招)

**答.** $\frac{2}{3}$。

1007. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^5+3^5+\ldots+(2n-1)^5}{n^6}$。 (100文華高中)

**答.** $\frac{16}{3}$。

**另解.** $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^5=2^5\sum_{k=1}^{n}k^5+\ldots=\frac{32}{6}n^6+\ldots$。因此極限 $\frac{32}{6}=\frac{16}{3}$。

1008. 設 $n$ 爲自然數；試證：$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}\leq 2\sqrt{n}$。 (97高雄市聯招)

1009. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)(1^5+2^5+3^5+\ldots+n^5)}{(1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3)(1^4+2^4+3^4+\ldots+n^4)}=$ ________。 (99彰化女中)

**答.** $\frac{10}{9}$。

**解.** 上下同除 $n^9$ 得 $\frac{\frac{1}{n}\sum(\frac{k}{n})^2\cdot\frac{1}{n}\sum(\frac{k}{n})^5}{\frac{1}{n}\sum(\frac{k}{n})^3\cdot\frac{1}{n}\sum(\frac{k}{n})^4}\to\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}}=\frac{10}{9}$。

1010. 設 $a_n=\left[(\frac{n+1}{n})(\frac{n+2}{n})(\frac{n+3}{n})\cdots(\frac{n+n}{n})\right]^{\frac{1}{n}}$，試求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$。 (100香山高中)

**答.** $\frac{4}{e}$。

1011. 設有編號 1, 2, 3, ..., $n$ 的 $n$ 個盒子，在第 $k$ 個盒子內裝有 $n+k$ 個紅球與 $n-k$ 個白 球，現在隨便選出一個盒子，且由此盒子內每次隨機抽取 1 個球，取後放回，連取 3 次， 若 3 次皆爲紅球的機率爲 $P_n$ ，則 $\lim\limits_{n\to\infty}P_n=$ ________。 (99彰化女中)

**答.** $\frac{15}{32}$。

1012. 假設連續函數 $f(x)$ 在區間 $[a,b]$ 中的平均值 $w(f)$ 可以定義如下:
$w(f)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(c_1)+f(c_2)+\ldots+f(c_n)}{n}$，其中 $c_k$ 爲 $[a,b]$ 作 $n$ 等分分割時，從第 $k$ 個區間中任意取出來的一個數。那麼，函數 $f(x)=x^2$ 在 $[0,6]$ 中的平均值爲 ________。

**答.** 12。 (99桃園縣高中現職聯招)

1013. 判斷收斂並說明

(1) $\left\langle\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\rangle$

(2) $\left\langle\frac{4}{\sqrt{n^4+4n^2}}+\frac{8}{\sqrt{n^4+16n^2}}+\frac{12}{\sqrt{n^4+36n^2}}+\ldots+\frac{4n}{\sqrt{5n^4}}\right\rangle$ (102武陵高中)

**答.** (1)(2) 皆收斂。

**解.**

(1) $\frac{\overbrace{\frac{n+1}{n}+\frac{n+1}{n}+\ldots+\frac{n+1}{n}}^{n\text{ 個}}+1}{n+1}\geq\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{n}{n+1}}\Rightarrow\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\geq\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$，因此此數列遞增。

而 $(1+\frac{1}{n})^n=1+C_1^n\cdot\frac{1}{n}+C_2^n\cdot\frac{1}{n^2}+C_3^n\cdot\frac{1}{n^3}\leq 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots+\frac{1}{n!}<e$。

(亦可比例判別式知，$1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots+\frac{1}{n!}$ 收斂)

因此得 $\left\langle(1+\frac{1}{n})^n\right\rangle$ 遞增有上界，故收斂。

(2) $\frac{4k}{\sqrt{n^4+4k^2n^2}}=\frac{2}{n}\cdot\frac{\frac{2k}{n}}{\sqrt{1+\left(\frac{2k}{n}\right)^2}}$，故 $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{4k}{\sqrt{n^4+4k^2n^2}}=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{2}{n}\cdot\frac{\frac{2k}{n}}{\sqrt{1+\left(\frac{2k}{n}\right)^2}}$

其中 $\int_0^2\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$ 之黎曼和，故其極限爲 $\int_0^2\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx=\sqrt{1+x^2}\Big|_0^2=\sqrt{5}-1$。

## 20.11 泰勒展式、級數斂散

1014. 求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n-2}$ 的值。 (100彰化女中)

**答.** $\frac{\pi}{8}$。

**解.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n-2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{10} - \frac{1}{4} + \ldots = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots\right) = \frac{1}{2} \tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{8}$。

1015. 試求無窮級數 $1 - \frac{\pi^2}{2} + \frac{\pi^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{\pi^{2n}}{(2n)!} + \ldots$ 之和 ________。 (99文華高中)

**答.** $-1$。

1016. 求 $\ln(1 + x^2)$ 在 $x = 0$ 的泰勒展開式。 (97嘉義高中)

**答.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^{2k}$。

1017. 設函數 $y = f(x) = \frac{x^2}{1-x}$，求 $\frac{f^{(6)}(0)}{f^{(4)}(0)}$。 (101中科實中)

**答.** 30。

1018. 下列各無窮級數，何者爲發散級數? (100桃園現職聯招)
(A) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$ (B) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ (C) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^n}$ (D) $\sum_{n=1}^{\infty} \tan^{-1} \frac{1}{n^2+n+1}$。

**答.** (A)

**註.** $\tan^{-1} \frac{1}{n^2+n+1} = \tan^{-1}(n+1) - \tan^{-1} n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \tan^{-1} \frac{1}{n^2+n+1} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$。

1019. 試證無窮級數 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收斂。 (99松山家商)

## 20.12 其它例題

1020. 設 $x^4 + mx^2 + 4x + n$ 被 $(x-1)^2$ 整除，則 $m =$ ____, $n =$ ____。 (98新營高工)

**答.** $m = -4, n = -1$。

**解.** 令 $f(x) = x^4 + mx^2 + 4x + n$，則 $f(1) = 1 + m + 4 + n = 0$ 和 $f'(1) = 4 + 2m + 4 = 0$，

1021. 已知 $(x+1)^2$ 爲 $px^{10} + qx^9 + 1$ 的因式，求數對 $(p, q)$。 (97文華高中)

**答.** $(9, 10)$。

**解.** 利用除法原理(定理)和微分得:

$$\begin{cases} p-q+1 &= 0 \\ -10p+9q &= 0 \end{cases}$$

解得 $(p,q)=(9,10)$。

1022. 函數 $f(x)=\frac{4x^2+4x-24}{x^4-2x^3-9x^2+18x}$，有幾條垂直漸近線? (100桃園新進聯招)

**答.** 2 條。

1023. 已知 $f(x)=\left|\frac{1}{4}x^2-x[x]\right|$，求 $f'(\frac{3}{2})$。 (100慈濟聯招)

**答.** $\frac{1}{4}$。

1024. 試問曲線 $x^2+y^2-6x=6\sqrt{x^2+y^2}$ 上 $P(x,y)$ 有多少個點與 $A(8,0)$ 距離是整數?

**答.** 18。 (99建國高中)

**解.** 以極坐標寫之可得 $r=6(1+\cos\theta)$, 利用餘弦定理可計算曲線到 $(8,0)$ 之距離平方

$$\begin{aligned} d(\theta)^2 &= 36(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)+64-96(\cos\theta+\cos^2\theta) \\ &= 100-24\cos\theta-60\cos^2\theta \\ &= -60(\cos^2\theta+\frac{2}{5}\cos\theta+\frac{1}{25})+100+\frac{60}{25} \\ &= -60(\cos\theta+\frac{1}{5})^2+\frac{512}{5}. \end{aligned}$$

所以 $16\le d^2\le\frac{512}{5}$，且在 $[-1,-\frac{1}{5}]$ 和 $[-\frac{1}{5},1]$ 皆爲單調函數。

$d(-1)=8, d(-\frac{1}{5})=\frac{32}{\sqrt{10}}<11, d(1)=4$。

從單調就可數出 5-10, 10-9 上下對稱，及 $x$ 軸上的 4, 8。

因此共 $8\times 2+2=18$。

1025. 若 $\frac{n}{100}<2\cos\frac{2\pi}{7}<\frac{n+1}{100}, n\in\mathbb{N}$，則 $n=$ ________。 (99建國高中)

**答.** 124。

**解.** 令 $x=\cos\frac{2\pi}{7}+i\sin\frac{2\pi}{7}$，則 $x+\frac{1}{x}=2\cos\frac{2\pi}{7}$ 且 $x^6+x^5+x^3+x^2+x+1=0$。
令 $y=x+\frac{1}{x}$，則 $y^3+y^2-2y-1=0$。令 $f(y)=y^3+y^2-2y-1$。
牛頓法解之: 取 $y_1=1, 1-\frac{f(1)}{f'(1)}=\frac{4}{3}$，取 $y_2=$; $y_2-\frac{f(y_2)}{f'(y_2)}=\frac{4}{3}-\frac{13}{162}\approx 1.25$，取 $y_3=1.25$; $y_3-\frac{f(y_3)}{f'(y_3)}=\frac{5}{4}-\frac{1}{332}\approx 1.246$。$f(1.24)\approx -0.04, f(1.25)\approx 0.02\Rightarrow n=124$。
注意該方程式有三根: $2\cos\frac{2\pi}{7}, 2\cos\frac{4\pi}{7}, 2\cos\frac{6\pi}{7}$，僅 $2\cos\frac{2\pi}{7}$ 爲正根。

**評.** 這是給人算的嗎?

1026. 設函數 $y=f(x)=\frac{(x-1)^2}{2-x}$，求 $\frac{f^{(7)}(1)}{f^{(5)}(1)}=$ ________。 (102文華高中)

**答.** $42$。

**解.** $f(x)=\frac{(x-1)^2}{1-(x-1)}=(x-1)^2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(x-1)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(x-1)^{n+2}$, for $0<|x-1|<1$。

由泰勒定理及冪級數之唯一性得 $\frac{f^{(5)}(1)}{5!}=\frac{f^{(7)}(1)}{7!}=1\Rightarrow\frac{f^{(7)}(1)}{f^{(5)}(1)}=42$。