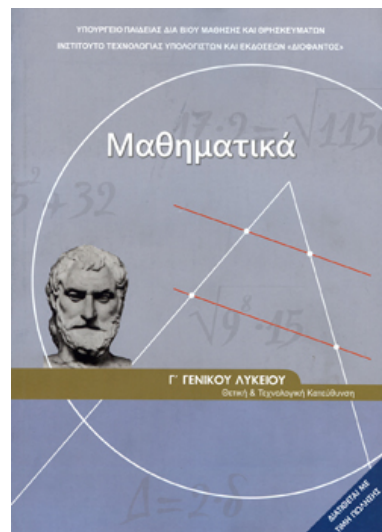




Τάξη Γ

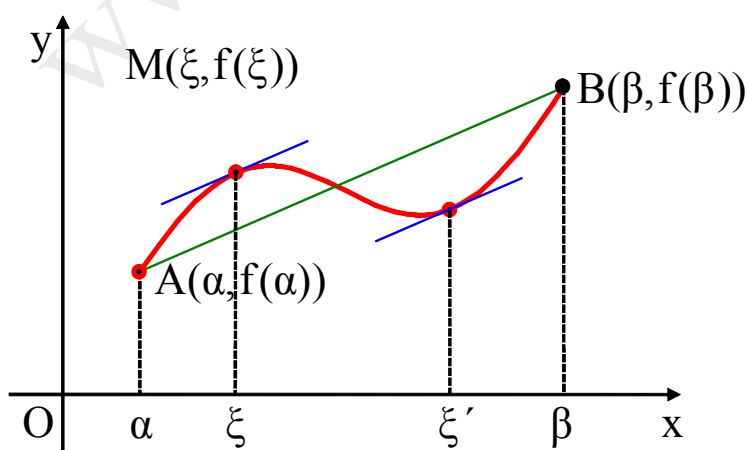
Μαθηματικά Κατεύθυνσης

Ανάλυση

Κεφάλαιο 2

Παράγωγοι

Προτεινόμενες Ασκήσεις



Μαθηματικές
Παρουσιάσεις

<http://www.perikentro.blogspot.gr/>



Προτεινόμενες Ασκήσεις

Παράγωγοι

Διδακτική Ενότητα:
Παράγωγος συνάρτησης σε σημείο

1

1.1. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση :

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + \eta\mu^2 x & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ \frac{x}{\ln x} & 0 < x < 1 \end{cases}$$

είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$

1.2. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ με $f'(0)=5$. Αν $g(x)=2f(x)-x$ να βρεθεί ο αριθμός $g'(0)$.

1.3. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:
 $f(x+y)=f(x)-f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

1.4. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $x_0=0$ και ισχύει $f(0)=g(0)$ και $f(x) \leq g(x) + \eta\mu x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να δείξετε ότι: $f'(0) = g'(0) + 1$

1.5. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $x_0=0$ και ισχύει $f^2(x) + g^2(x) = 2x^2, x \in \mathbb{R}$ να δειχθεί ότι:
 $[f'(0)]^2 + [g'(0)]^2 = 2$

1.6. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ με $f^3(x) + 2f(x) = x^2 - 3x + 2$. Να βρεθεί το $f'(1)$.

1.7. Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $f^2(x) + 4f(-x)\eta\mu x + \eta\mu^2(2x) \leq 0$. Να βρείτε την $f'(0)$.

Παράγωγοι**Διδακτική Ενότητα:
Παράγωγος Συνάρτηση****2**

2.1. Να βρεθεί όπου ορίζεται η παράγωγος των συναρτήσεων:

α). $f(x) = \sqrt[3]{x}$

β). $f(x) = x^2 \sqrt{x}$

2.2. Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$|f(x) - 2 \ln x| \leq 3(x-1)^2, x > 0. \text{ Να δείξετε ότι:}$$

α). $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$

β). Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$

2.3. Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) \neq 0$,

$$x \in \mathbb{R}. \text{ Αν } \phi(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \text{ και η εξίσωση } \phi'(x) = 0 \text{ έχει ρίζα τον}$$

$$\text{αριθμό } \rho \text{ να δείξετε ότι: } \phi(\rho) = \frac{f'(\rho)}{g'(\rho)}, g'(\rho) \neq 0.$$

2.4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x^2 + x - 3)g(x)$, $x \in \mathbb{R}$ με $g(1) = 2$ και

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - 2}{x - 1} = 4. \text{ Να βρεθεί η } f'(1).$$

2.5. Δίνεται η συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη με $f(\ln x) = x^3, x > 0$. Να υπολογίσετε την $f''(3)$.

2.6. Δίνεται η συνάρτηση f η οποία είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(1) = 0$ και την ιδιότητα $f'(x) = 2007 + f^2(x)$.

Να δείξετε ότι:

$$\alpha). f''(1) = 0 \quad \beta). f'''(x) \geq 2f(x) \cdot f''(x) \quad \gamma). \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 2007.$$

2.7. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in \mathbb{R}$ με $f(x_0) = 0$.

Να δείξετε ότι η συνάρτηση $|f|$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 αν και μόνο αν $f'(x_0) = 0$

Παράγωγοι

Διδακτική Ενότητα:
Παράγωγος Συνάρτησης

3

3.1. Αν $f(x)=x^2 \ln x$ να δείξετε ότι: $f'(x) - xf''(x) + 2x = 0$

3.2. Αν $f(x)=e^{-\lambda x}$ να βρείτε τις τιμές του λ ώστε:
 $2f''(x) + f'(x) - 3f(x) = 0$

3.3. Έστω η συνάρτηση $f(x)=(x-\alpha)^3(x-\beta)^5$. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{3}{x-\alpha} + \frac{5}{x-\beta}, x \neq \alpha, x \neq \beta$$

3.4. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(\eta\mu x) + xf(x) = x^2 + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την $f'(0)$.

3.5. Έστω οι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f, g με $f(x_0)=0$
 $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Αν για τη συνάρτηση $h(x) = e^{\frac{f(x)}{g(x)}}$ είναι $h'(x_0) = 0$ να δείξετε ότι:
 $f'(x_0) = 0$.

3.6. Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει: $f(x)g(x) = e^{f(x)+g(x)}$, $x \in \mathbb{R}$.
 Να δείξετε ότι:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{g'(x)}{g(x)} = f'(x) + g'(x)$$

3.7. Έστω η παραγωγίσιμη $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης όταν:

i). $g(x) = f(x + \eta\mu x)$ ii). $g(x) = f^2(-x)$

3.8. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμες για τις οποίες ισχύουν: $f(x) = g(x) \sin x$ και $g'(\frac{\pi}{2}) = 1$. Να βρεθεί το

$$f''(\frac{\pi}{2})$$

Παράγωγοι

Διδακτική Ενότητα:
Παράγωγος Συνάρτησης

4

4.1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^3 & x \leq 0 \\ x^2 & x > 0 \end{cases}$. Να βρείτε τη δεύτερη παράγωγο της f .

4.2. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f^3(x) + x \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = \eta\mu(\pi x)$ για κάθε $x \neq 0$. Να βρείτε την $f'(1)$.

4.3. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης g όταν:

$$\begin{array}{ll} \text{i). } g(x) = f(x^2 + 1). & \text{ii). } g(x) = f(-x) + f\left(\frac{1}{x}\right) \\ \text{iii). } g(x) = \eta\mu f^2(x) & \text{iv). } g(x) = f(x)e^{f(x)} \end{array}$$

4.4. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

$$\begin{array}{lll} \text{i). } f(x) = \eta\mu^2 3x & \text{ii). } f(x) = \ln(1 + \sigma\upsilon\nu^2 x) & \text{iii). } f(x) = (x^2 + 1)^{\eta\mu x} \\ \text{iv). } f(x) = (1 + e^x)^{\ln x} & \text{v). } f(x) = \eta\mu x^x, x > 0 & \text{vi). } f(x) = (2 + \sigma\upsilon\nu x)^{\eta\mu x} \end{array}$$

4.5. Αν μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = \alpha$ να δείξετε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) \ln x - f(\alpha) \ln \alpha}{x - \alpha} = \frac{f(\alpha)}{\alpha} + f'(\alpha) \ln \alpha$$

4.6. Αν η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f(xy) = f(x) \ln y + 2f(y) \ln x + \alpha$ $x, y > 0$ να δείξετε ότι:

$$\begin{array}{ll} \text{i). } f(1) = \alpha & \text{ii). } xf'(x) = f(x) + 2f'(1) \ln x, x > 0 \end{array}$$

4.7. Οι συναρτήσεις f, g είναι ορισμένες στο $\mathbb{R}$. Αν η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in \mathbb{R}$ και η συνάρτηση $x^2 g(x) + (1 + \eta\mu^2 x) f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 να δείξετε ότι η συνάρτηση g δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

Παράγωγοι**Διδακτική Ενότητα:
Εξίσωση Εφαπτομένης****5**

5.1. Να βρεθεί η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=x^2+3\eta\mu x+1$ στο σημείο με τετμημένη $x_0=0$.

5.2. Να βρεθεί η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x & x < 1 \\ x - 1 & x \geq 1 \end{cases} \text{ στο σημείο } A(1, f(1)).$$

5.3. Αν $f(x)=x^{\ln x}$, $x>0$ να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει με τους άξονες η κάθετη στην εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(e, f(e))$.

5.4. Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=f(2x^2-2x+1)$ όπου f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και η ευθεία $\varepsilon: y=2x+4$. Αν η ε εφάπτεται της γραφικής παράστασης της f στο $x_0=1$ να βρεθεί η εφαπτομένη της C_g στο σημείο $A(0, g(0))$.

5.5. Να βρεθεί η εφαπτομένη της συνάρτησης $f(x)=x^2-5x+5$ που σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα x'

5.6. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x(x-1)\dots(x-2006)$ και $g(x)=-x(x-1)\dots(x-2006)(x-2007)$. Να δείξετε ότι οι γραφικές τους παραστάσεις σε κοινό τους σημείο έχουν κοινή εφαπτομένη.

5.7. Να βρεθεί το $a \in \mathbb{R}^*$ ώστε η ευθεία $y=2x$ να εφάπτεται της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=a^x$.

5.8. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln x+2$ και $g(x)=x^2-3x+5$. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(1, f(1))$ εφάπτεται και στην C_g .

Παράγωγοι

Διδακτική Ενότητα:
Ρυθμός Μεταβολής

6

6.1. Σε ορθογώνιο το μήκος του ελαττώνεται με ρυθμό 3 cm/sec και το πλάτος του αυξάνεται με ρυθμό 1 cm/sec. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού και της περιμέτρου του τη χρονική στιγμή που έχει μήκος 12 cm και πλάτος 10 cm.

6.2. Μια δεξαμενή περιέχει νερό το οποίο διαφεύγει από μια βρύση έτσι ώστε μετά από t δευτερόλεπτα η ποσότητα που βρίσκεται

στη δεξαμενή είναι $V(t) = 1000 \left(1 - \frac{t^2}{20}\right)^2$ λίτρα. Να βρεθούν:

α. Πόσα λίτρα νερού υπάρχουν αρχικά στη δεξαμενή;

β. Με τι ρυθμό διαφεύγει το νερό μετά από 1 sec;

γ. Σε πόσο χρόνο θα αδειάσει η δεξαμενή; Με τι ρυθμό διαφεύγει το νερό τη χρονική στιγμή που αδειάζει;

6.3. Σημείο M κινείται επί της παραβολής $y = x^2$, $x > 0$. Τη στιγμή που απέχει από την αρχή των αξόνων $3\sqrt{10}$ cm ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του είναι 0,2 cm/sec. Να βρεθούν

α. Ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του M

β. Ο ρυθμός μεταβολής της γωνίας $\theta = \widehat{MOx}$

6.4. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln x$ και A το σημείο της C_f που η εφαπτομένη ε'σ' αυτό διέρχεται από την αρχή των αξόνων

α). Να βρείτε την εξίσωση της ε

β). Αν ένα κινητό M κινείται κατά μήκος της καμπύλης της C_f και καθώς περνάει από το A η τετμημένη του x ελαττώνεται 2 μονάδες το δευτερόλεπτο, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του τη χρονική στιγμή που το κινητό περνάει από το A

6.5. Ο πληθυσμός μιας κοινωνίας βακτηριδίων αυξάνεται σύμφωνα

με τον τύπο $f(t) = 3e^{\frac{t}{2}}$ εκατοντάδες σε t ημέρες.

Να βρείτε το ρυθμό αύξησης του πληθυσμού τους την τέταρτη ημέρα.

Παράγωγοι

Διδακτική Ενότητα:
Θεώρημα Rolle-Θ.Μ.Τ

7

7.1. Βασική άσκηση. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

- α). Μεταξύ δυο διαδοχικών ριζών της εξίσωσης $f(x)=0$ υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα της εξίσωσης $f'(x)=0$
β). Μεταξύ δυο διαδοχικών ριζών της f' υπάρχει το πολύ μια ρίζα της f

7.2. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(x)=xf(\eta\mu x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:

- ι. Για τη συνάρτηση $g(x)=f(\eta\mu x)$ ισχύει το Θ. Rolle στο $[0, \pi]$.
ιι. Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, \pi)$ ώστε $f'(\xi) = g(\xi)$.

7.3. Να δείξετε ότι η εξίσωση $2007x^{2006} - 2006(\lambda+1)x^{2005} + \lambda = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 1)$.

7.4. Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[2, 4]$ με $f(2)=16$, $f(4)=4$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (2, 4)$ ώστε: $f'(\xi) + 2\xi = 0$.

7.5. Έστω μια συνάρτηση $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο. Αν $f'(0) > 0$ και $f(1)=2+f(0)$ να δείξετε ότι:

- α. Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 1)$ ώστε $f'(\xi) = 4\xi$
β. Υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, 1)$ ώστε: $f'(x_0) = 5x_0$

7.6. Δίνεται συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$

- Συνεχής στο $[\alpha, \beta]$
- Παραγωγίσιμη στο (α, β)
- $f(\alpha) = f(\beta)$

Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε: $f'(\xi) = \lambda f(\xi), \lambda \in \mathbb{R}^*$

7.7. Δίνεται συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) < 0$ και $f(\beta) = f'(\beta) = 0$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) < 0$.

Παράγωγοι

Διδακτική Ενότητα:
Θεώρημα Rolle-Θ.Μ.Τ.

8

8.1. Δίνεται $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη ώστε $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι η f έχει το πολύ δύο διαφορετικές ρίζες.

8.2. Δίνεται η συνάρτηση f με $x \cdot f'(x) - x \neq -1$ για κάθε $x > 0$. Αν $2 < 2f(x) < 3$ για κάθε $x \in [1, e]$ να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (1, e)$ ώστε $f(x_0) = x_0 - \ln x_0$

8.3. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $[-1, 1]$ με $f(-1)=1$ και $f(1)=3$. Να δείξετε ότι:

α. Υπάρχει $\xi \in (-1, 1)$ ώστε $f(\xi)=2-\xi$

β. Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (-1, 1)$ ώστε: $f'(\xi_1) \cdot f'(\xi_2) = 1$

8.4. Έστω η συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ με τις ιδιότητες

α. $f(\alpha)=f(\beta)=0$

β. Υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ με $f(x_0) < 0$

Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f''(\xi) > 0$

8.5. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $[0, 5]$ παραγωγίσιμη στο $(0, 5)$ και ισχύει: $f(5)=f(0)+1$. Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (0, 5)$ τέτοια ώστε: $2f'(\xi_1) + 3f'(\xi_2) = 1$

8.6. Για κάθε $x > 0$ να αποδειχθεί ότι:

$$\frac{1}{x+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$$

8.7. Να αποδειχθεί ότι για κάθε $x < 0$ ισχύει: $xe^x > e^x - 1 > x$

8.8. Να λύσετε την εξίσωση: $5^x - 4^x = 7^x - 6^x$

Παράγωγοι

Διδακτική Ενότητα:
Θέωρημα Μέσης Τιμής

9

9.1. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha)=3\beta$ και $f(\beta)=3\alpha$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε:

$$f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = -6$$

9.2. Έστω μια συνεχής συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ και $f(\alpha) \neq f(\beta)$. Να δείξετε ότι:

i). Υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ώστε: $3f(x_0) = f(\alpha) + 2f(\beta)$.

ii). Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε:

$$f'(\xi_1)(x_0 - \alpha) = 2f'(\xi_2)(\beta - x_0)$$

iii). Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (\alpha, \beta)$ ώστε: $\frac{2}{f'(\xi_1)} + \frac{1}{f'(\xi_2)} = \frac{3}{f'(\xi_3)}$

9.3. Αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$ και ισχύει $f(0)=0$ να δείξετε ότι: $f'(x) < \frac{f(x)}{x}$ για κάθε $x > 0$.

9.4. Να δείξετε ότι: $\frac{x-1}{x} < \ln x < x-1$ για κάθε $x > 1$.

9.5. Έστω μια συνάρτηση f της οποίας η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, \alpha]$.

Να δείξετε ότι: $f'(x) > \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$ για κάθε $x < \alpha$.

9.6. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $[1, 7]$ και παραγωγίσιμη στο $(1, 7)$. Αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(1, 7)$ να δείξετε ότι: $f(1) + f(7) > f(3) + f(5)$.

9.7. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(0)=0$ και $f'(x) = \frac{1}{x^2 + 1}, x \geq 0$. Να δείξετε ότι:

$$x \leq f(x)(x^2 + 1) \leq x(x^2 + 1)$$

Παράγωγοι

Διδακτική Ενότητα:
Σταθερή Συνάρτηση - Μονοτονία

10

10.1. Έστω η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν
 $f(x) = x^2 \cdot f'(x)$ για κάθε $x > 0$ και $f(1) = 1$.

- α. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot f(x)$, $x > 0$ είναι σταθερή.
 β. Να βρείτε τον τύπο της f .

10.2. Να βρείτε τον τύπο της $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ όταν ισχύουν $f'(x) = 3x^2 + x + 1$
 $x \in \Delta = \mathbb{R}$ και $f(0) = 2$

- 10.3.** ι. Να λύσετε την εξίσωση $x^2 + \ln x = 1$
 ιι. Να λύσετε την ανίσωση $\ln \frac{1}{x} + 1 < \sqrt{x}$
 ιιι. Να δείξετε ότι: $e^{2x} > 1 - x$, για κάθε $x > 0$

10.4. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία
 ισχύει: $f^3(x) + f(x) = e^{-x} - 1$, $x \in \mathbb{R}$
 ι. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.
 ιι. Να λύσετε την εξίσωση: $f(\ln x) = f(1 - x)$.

10.5. Έστω f, g δυο συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ για τις
 οποίες υποθέτουμε $g'(x) = f'(x) + \eta \mu^2 x + e^x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
 Να δείξετε ότι: $g(x) + f(0) > f(x) + g(0)$ για κάθε $x > 0$

10.6. Έστω $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(\pi) = 0$. Αν για κάθε $x > 0$ ισχύει:
 $x \cdot f'(x) < f(x) + x^2 \sigma \upsilon \nu x$ να δείξετε ότι: $f(x) < x \eta \mu x$ για κάθε $x > \pi$.

10.7. Δίνεται συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη ώστε να
 ισχύουν
 α. $xf'(\ln x) = x \sigma \upsilon \nu x - \eta \mu x$ για κάθε $x > 1$
 β. $f(1) = \frac{\eta \mu e}{e}$
 Να βρείτε το $f(\pi)$

Παράγωγοι

Διδακτική Ενότητα:
Μονοτονία - Ακρότατα
11

- 11.1.** Έστω μια συνάρτηση $f : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει: $xf(x) \leq \eta\mu x + \ln(x+1)$ για κάθε $x > -1$.
 Να δείξετε ότι: $f(0)=2$.
- 11.2.** ι. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x-ex$. Να εξετάσετε την f ως προς τα ακρότατα και να βρείτε τις ρίζες της f και το προσημό της.
 ιι. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $g(x)=2e^{x-1}-x^2$ ως προς τη μονοτονία
- 11.3.** ι. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης $f(x)=\ln x - \lambda x$, $\lambda > 0$
 ιι. Να βρείτε τη μικρότερη τιμή του $\lambda > 0$ για την οποία ισχύει: $\ln x \leq \lambda x$, $x > 0$
 ιιι. Για την τιμή του λ που βρήκατε παραπάνω να αποδείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon: y=\lambda x$ εφάπτεται της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x)=\ln x$.
- 11.4.** Έστω η συνάρτηση $f(x)=x \cdot e^{\frac{1}{x}}$
 ι. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία
 ιι. Να αποδειχθεί ότι: $x^x \geq e^{x-1}$ για κάθε $x > 0$.
- 11.5.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x+e^x$.
 ι. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία
 ιι. Να λύσετε τις εξισώσεις:
 α. $e^{x^3+x} - e^{2x} = x - x^3$ β. $e^{x^2+x+1} - e^{x+1} + x^2 = 0$
- 11.6.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=ax^2-2\ln a \cdot x+1$, $a \geq 1$
 α. Να βρεθεί η παράγωγος της f
 β. Να βρεθεί η τιμή του a , ώστε το ελάχιστο της f να είναι ελάχιστο
- 11.7.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{2}e^{2x} + (1-\alpha)e^x - \alpha + 5$
 ι. Να βρεθούν οι τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η f να έχει κρίσιμα σημεία.
 ιι. Για τις τιμές του α του ερωτ. i). να εξεταστεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Παράγωγοι**Διδακτική Ενότητα:**
Μονοτονία – Ακρότατα- Κυρτότητα**12**

12.1. Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f(1)=2$ και $x \cdot f'(x) - f(x) = x$, $x > 0$.

Να αποδείξετε ότι:

α. Η συνάρτηση g με τύπο $g(x) = \frac{f(x)}{x} - \ln x$ είναι σταθερή στο $(0, +\infty)$

β. $f(x) = x \ln x + 2x$, $x > 0$

γ. Η εξίσωση $f(x) = 2006$ έχει μια μόνο πραγματική ρίζα στο διάστημα $(1, 1003)$.

δ. Η συνάρτηση P με $P(x) = f(x) - e^{x-1}$ έχει ένα μόνο σημείο καμπής το οποίο και να βρείτε.

12.2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + \ln x + x - 1$.

α. Να βρεθούν τα όρια: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

β. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f .

δ. Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = e$

ε. Να λυθεί η εξίσωση $e^{x^2+1} - e^{2x} = \ln 2x - \ln(x^2 + 1) - x^2 + 2x - 1$

12.3. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = e^x + e^{-x} - x^2 - 2$

α. Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

β. Να δείξετε ότι η f' είναι κοίλη στο $(-\infty, 0]$ και κυρτή στο $[0, +\infty)$.

Παράγωγοι

Διδακτική Ενότητα:
Μονοτονία - Κυρτότητα

13

13.1. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x)$ γνησίως αύξουσα για κάθε $x \geq 0$ και $f(0)=0$. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $g(x) = x^{2006} + \frac{f(x)}{x} + \ln x + 2006$ είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x > 0$

13.2. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγίσιμη και κοίλη στο $\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:

$$f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \geq \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} \text{ για κάθε } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

13.3. Δίνεται η πραγματική συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ώστε: $f(x) > 0$ και $f''(x) \cdot f(x) - (f'(x))^2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Να δείξετε ότι:

α. Η συνάρτηση $\frac{f'}{f}$ είναι γνησίως αύξουσα.

β. $f\left(\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2}\right) \leq \sqrt{f(x_1) \cdot f(x_2)}$ για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

13.4. Η συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = \frac{f(x) + 2x}{x}$, $x \in (0, +\infty)$. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f σε κάθε σημείο της βρίσκεται κάτω από την C_f .

13.5. Αν για την παραγωγίσιμη συνάρτηση f ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η σχέση: $f'(x) + (e^x - 1)f^2(x) = 0$ να αποδειχθεί ότι το $f(0)$ είναι μέγιστο αυτής

Παράγωγοι

Διδακτική Ενότητα:
 Ασύμπτωτες –Κανόνες De l' Hospital

14

14.1. Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

$$\text{i). } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x}{x^2 - 1} \quad \text{ii). } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{e^x} \quad \text{iii). } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x) \quad \text{iv). } \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln x$$

$$\text{v). } \lim_{x \rightarrow 0} x e^{\frac{1}{x}} \quad \text{vi). } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\eta_{\mu x}} \quad \text{vii). } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + e^x)^{\frac{1}{x}} \quad \text{viii). } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

$$\text{ix). } \lim_{x \rightarrow 0} (\eta_{\mu x} \ln x) \quad \text{x). } \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + x)^{\sigma_{\phi x}}$$

14.2. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και η $g(x) = x f(e^{-x})$. Αν η ευθεία $y = 2x + 1$ εφάπτεται της C_f στο σημείο $x_0 = 0$ να βρείτε την ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$

14.3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - \alpha^2}{2\alpha x} - \ln x + \ln \alpha, \alpha > 0$

α. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία

β. Να λυθεί η εξίσωση $x^2 - \alpha^2 = 2\alpha x (\ln x - \ln \alpha)$.

γ. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της C_f .

δ. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f

ε. Να μελετηθεί η f ως προς τα κοίλα και να βρεθούν τα σημεία καμπής της C_f .

14.4. Για μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$2x + 3 \leq f(x) \leq \frac{2x^3 + 3x^2 + 1}{x^2} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}^*. \text{ Να εξεταστεί αν η } C_f \text{ έχει πλάγια ασύμπτωτη}$$



Ερωτήσεις Κατανόησης

Να χαρακτηρίσετε με Σωστό ή Λάθος τις προτάσεις

1. Έστω η συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Αν υπάρχει ο αριθμός $f'(x_0) \in \mathbb{R}$ τότε $x_0 \in A$
2. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \neq \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, τότε δεν υπάρχει το $f'(x_0)$
3. Αν $f'(3) = 1$ τότε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(3, f(3))$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\frac{\pi}{4}$
4. Αν η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(1, f(1))$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ τότε $f'(1) = 0$
5. Αν η συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $x_0 \in A$, τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0
6. Αν η συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in A$ τότε η f δεν είναι συνεχής στο x_0
7. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ έχει κοινό σημείο με την C_f μόνο το M .
8. Αν μια ευθεία έχει με την C_f μόνο ένα κοινό σημείο, τότε η ευθεία αυτή είναι πάντοτε εφαπτομένη της C_f
9. Αν οι γραφικές παραστάσεις δυο παραγωγίσιμων συναρτήσεων τέμνονται, τότε στο κοινό τους σημείο δέχονται κοινή εφαπτομένη.
10. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και $f'(x_0) = g'(x_0)$ για κάποιο $x_0 \in \mathbb{R}$, τότε στο x_0 δέχονται κοινή εφαπτομένη.
11. Υπάρχει συνάρτηση για την οποία ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano και συγχρόνως οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[a, b]$
12. Αν η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη τότε μεταξύ δυο ριζών ρ_1, ρ_2 της f υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της f'
13. Αν η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη τότε μεταξύ δυο διαδοχικών ριζών της f' υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της f .
14. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και δεν είναι "1-1", τότε η γραφική παράσταση της f' τέμνει τον άξονα $x'x$ τουλάχιστον σε ένα σημείο.
15. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[a, b]$, τότε για την f ισχύει το συμπέρασμα του Θ.Μ.Τ. στο $[a, b]$
16. Αν για τη συνάρτηση f ισχύει το θεώρημα Rolle στο διάστημα $[a, b]$, τότε ισχύει για την f το συμπέρασμα του Θ.Μ.Τ. στο $[a, b]$.
17. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και εφαρμόζεται το θεώρημα Bolzano στο $[a, b]$ τότε εφαρμόζεται και το Θ.Μ.Τ. στο $[a, b]$.
18. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε και $f'(x) = g'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

19. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν $f'(x) = g'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε και $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
20. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν $f(x) < g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε και $f'(x) < g'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
21. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$. Αν $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$, τότε η συνάρτηση f είναι σταθερή στο $\mathbb{R}^*$.
22. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$ και $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (a, b)$, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[a, b]$.
23. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, και η f' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, τότε η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη.
24. Κάθε τοπικό μέγιστο μιας συνάρτησης είναι μεγαλύτερο από κάθε τοπικό ελάχιστο.
25. Το ολικό ακρότατο μιας συνάρτησης είναι συγχρόνως και τοπικό ακρότατο.
26. Τα άκρα a, b του διαστήματος $[a, b]$ στο οποίο ορίζεται μια συνεχής συνάρτηση f μπορεί να είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης.
27. Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατο στο εσωτερικό σημείο ξ του πεδίου ορισμού της, τότε ισχύει οποσδήποτε $f'(\xi) = 0$.
28. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ και στο εσωτερικό σημείο x_0 του Δ είναι $f'(x) \neq 0$, τότε η f δεν παρουσιάζει ακρότατο στο x_0 .
29. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ και στο εσωτερικό σημείο x_0 του Δ παρουσιάζει ακρότατο, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(x_0, f(x_0))$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.
30. Η γραφική παράσταση C_f μιας πολυωνυμικής συνάρτησης f 3^{ου} βαθμού, έχει οποσδήποτε σημείο καμπής.
31. Το σημείο $A(\xi, f(\xi))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης C_f μιας συνάρτησης f δυο φορές παραγωγίσιμης, όταν η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του ξ .
32. Αν η συνάρτηση f είναι κοίλη στο Δ και δυο φορές παραγωγίσιμη, τότε $f''(x) < 0$.
33. Αν η συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ και $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$, τότε η C_f δεν παρουσιάζει σημείο καμπής.
34. Η γραφική παράσταση πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$, βαθμού ≥ 2 , έχει ασύμπτωτες.
35. Η C_f μιας συνεχούς συνάρτησης f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.
36. Αν $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, τότε η C_f δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$.
37. Η C_f μιας συνάρτησης f μπορεί να έχει μια οριζόντια και δυο πλάγιες ασύμπτωτες.
38. Η C_f μιας συνάρτησης f μπορεί να έχει άπειρες κατακόρυφες ασύμπτωτες.
39. Η C_f μιας συνάρτησης f μπορεί να έχει κοινά σημεία με μια πλάγια ασύμπτωτή της.
40. Η κατακόρυφη ασύμπτωτη μιας συνάρτησης f δεν τέμνει την C_f .