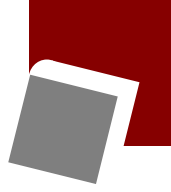


بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



# بهینه‌سازی سبد سرمایه مبتنی بر گشتاورهای مرتب‌بالا و معیارهای ریسک مختلف با در نظر گرفتن هزینه معامله

پایان‌نامه کارشناسی ارشد  
علی صادقی آبرزگه

استاد راهنما: دکتر علی فروش باستانی

شهریور ۸۹

تقدیم به پدرم قباد و مادرم حوری،  
تقدیم به روح کپارش عزیزم،  
و تقدیم به همه کسانی به این مرز و بوم  
خدمات ارزنده و صادقانه می کنند.

## قدردانی و تشکر

خدای بزرگ را سپاس می‌گویم که من را در مسیر علم و تعالی قرار داده است تا بدین جا برسم. از پدر و مادر عزیز و مهربانم و همه اعضای خانواده‌ام که همیشه حامیم بودند و در همه مراحل زندگی یاریم کردند، سپاسگزارم. از جناب آقای دکتر باستانی استاد راهنمای عزیز که همیشه با حوصله سؤالات من را جواب می‌دادند و دلسوزانه همکاری لازم را داشتند، تشکر فراوان دارم و برای ایشان آرزوی سلامتی و موفقیت می‌کنم. از جناب آقای پروفسور ثبوتی ریاست محترم دانشگاه به پاس زحمات و در اختیار گذاشتن امکانات لازم، سپاسگزارم. از همه دوستان به ویژه همکلاسی‌های عزیزم که در دوره کارشناسی ارشد صمیمانه در مواقع لازم به من کمک می‌کردند، تشکر می‌کنم و برای آنها موفقیت و بهروزی آرزو مندم. از جناب آقای پروفسور مهدوی امیری و دکتر ذاکر و دکتر داداشی که افتخار داوری این پایان‌نامه را به من دادند، کمال سپاسگزاری و تشکر را دارم.

## چکیده

مطالعه دقیق داده‌های موجود در بازارهای مالی ما را به این حقیقت مهم رهنمون می‌سازد که اگر بازده یک سبد سرمایه‌گذاری حول میانگین نامتقارن باشد، نظریه بهینه‌سازی کلاسیک سبد ارائه شده توسط مارکوویتز (۱۹۵۲)، کارایی لازم را نخواهد داشت. به منظور یافتن راه‌حلی برای رفع این نقیصه، کونودر سال ۱۹۹۳ روشی را برای افزودن چولگی در تابع هدف پیشنهاد داده است. همچنین بویل در سال ۲۰۰۶، با ارائه تقریب‌های خطی مناسب از گشتاور مرتبه سوم (چولگی) و همچنین ارائه الگوریتمی کارا جهت پیاده‌سازی این روش، گام عملی مفیدی برای گسترش این ایده در بازارهای مالی برداشته است. در این پایان‌نامه، علاوه بر معرفی روش بویل، ایده‌هایی جهت وارد کردن معیارهای ریسک مختلفی چون ارزش در معرض خطر (VaR) و ارزش در معرض خطر شرطی (CVaR) به مسئله بهینه‌سازی سبد معرفی می‌کنیم. به علاوه نشان می‌دهیم که با در نظر گرفتن هزینه معامله و افزودن آن به مدل‌های اخیر می‌توان رهیافتی جامع برای حل مسئله انتخاب سبد بهینه در دنیای واقعی ارائه داد.

# فهرست

چکیده	.....	پنج
مقدمه	.....	یازده

## ۱ انتخاب سبد و مدل مارکویتز

۱	.....	پیش‌گفتار	۱.۱
۲	.....	انتخاب سبد	۲.۱
۲	.....	مدل مارکویتز	۳.۱
۳	.....	پرداخت وقایع سپری‌شده در برابر پرداخت وقایع آینده	۱.۳.۱
۳	.....	داده‌های مورد نیاز	۲.۳.۱
۴	.....	بازده مورد انتظار کالا	۳.۳.۱
۴	.....	ریسک هر کالا	۴.۳.۱
۵	.....	بازده مورد انتظار سبد سرمایه‌گذاری	۵.۳.۱
۶	.....	ریسک سبد	۶.۳.۱

۷	توابع مطلوبیت و منحنی‌های بی‌تفاوتی
۸	۱.۴.۱ معرفی دارایی بدون ریسک
۹	۲.۴.۱ خط بازار سرمایه
۹	۳.۴.۱ سبد بهینه
۱۱	۵.۱ چارچوب کلی انتخاب سبد با توابع مطلوبیت
۱۴	۶.۱ مدل‌های بهینه‌سازی مارکوویتز

## ۲ روش کونو

۱۹	۱.۲ تابع مطلوبیت
۲۰	۲.۲ دلایل انتخاب چولگی
۲۵	۳.۲ ارائه مدل میانگین-واریانس-چولگی
۲۶	۴.۲ میانگین و انحراف مطلق
۳۰	۵.۲ مدل میانگین و انحراف مطلق و چولگی

## ۳ ارزش در معرض خطر VaR و ارزش در معرض خطر شرطی CVaR

۳۵	۱.۳ اندازه‌های ریسک
۳۷	۲.۳ ارزش در معرض خطر (VaR)
۴۱	۳.۳ روشهای محاسبه VaR
۴۱	۱.۳.۳ روش واریانس - کواریانس

۴۲	.....	روش داده‌های تاریخی	۲.۳.۳
۴۲	.....	روش تصادفی	۳.۳.۳
۴۲	.....	CVaR	۴.۳
۴۶	.....	تفاوت‌های VaR و CVaR	۵.۳
۴۸	.....	مدل بهینه‌سازی دارای VaR	۶.۳

#### ۴ مدل‌های بهینه‌سازی با توابع هدف و قیود CVaR

۴۹	.....	ارزش در معرض خطر (CVaR)	۱.۴
۵۲	.....	مرز کارا و فرم‌های مختلف آن	۲.۴
۵۵	.....	فرم‌های معادل با متغیرهای کمکی	۳.۴
۵۸	.....	گسسته‌سازی	۴.۴
۵۹	.....	خطی‌سازی	۵.۴
۶۱	.....	مدل بهینه‌سازی سبک تک دوره‌ای با هزینه‌های معامله	۶.۴
۶۱	.....	توابع سود و ضرر	۱.۶.۴
۶۲	.....	قیود CVaR	۲.۶.۴
۶۳	.....	هزینه‌های معامله	۳.۶.۴
۶۳	.....	قیود ارزش	۴.۶.۴
۶۴	.....	تغییر در موقعیت‌های فردی (قیدهای نقدینگی) و کران‌ها روی موقعیت‌ها	۵.۶.۴
۶۵	.....	مسئله بهینه‌سازی	۶.۶.۴



۶۵ ..... تولید سناریو ۷.۶.۴

## ۵ رویکرد بویل

۶۷ ..... مقدمه ۱.۵

۶۸ ..... تقریب گشتاور سوم ۲.۵

۷۱ ..... تأثیر اختیار معامله در سبب ۳.۵

۷۱ ..... ۱.۳.۵ اختیار معامله

۷۲ ..... ۲.۳.۵ تخمین اختیار معامله

۷۶ ..... مدل بویل ۴.۵

۷۶ ..... الگوریتم روش ۵.۵

## ۶ مدیریت ریسک با قیود شبه CVaR

۷۹ ..... مقدمه ۱.۶

۷۹ ..... مسئله سبب دارایی-تعهد ۲.۶

۸۲ ..... بهینه‌سازی با قیود شبه CVaR ۳.۶

## ۷ نتایج محاسباتی

۸۶ ..... تحلیل داده‌ها ۱.۷

۸۸ ..... محاسبات و نتایج ۲.۷

۹۰ ..... پیوست (۱)

۹۳	.....	پیوست (۲)
۹۶	.....	پیوست (۳)
۹۹	.....	مراجع

## مقدمه

این پایان نامه به مدل‌های بهینه‌سازی برای مدیریت سبد می‌پردازد. تنوع روش‌های سرمایه‌گذاری و پیچیدگی تصمیم‌گیری‌ها در دهه‌های اخیر به شدت گسترش یافته است. این رشد گسترده، نیاز فزاینده‌ای به مدل‌های جامع ایجاد نموده است. برای پاسخگویی به این نیاز، مدل‌سازی مالی از پیوند رویکرد مالی و برنامه‌ریزی ریاضی بوجود آمد. این مدل از پیشرفت‌های برنامه‌ریزی ریاضی و مباحث مالی به موازات هم استفاده نموده است.

در مدل‌های سبد، معیارهای بازده و ریسک از مباحث مالی و روش‌های اندازه‌گیری و بهینه‌سازی از مباحث برنامه‌ریزی ریاضی برگرفته است. در این مدل‌ها عموماً کالاهای مختلف به نسبتی با هم ترکیب می‌شوند که سبد به ازای بازده معین از کمترین ریسک برخوردار بوده، یا به ازای ریسک معین از بیشترین بازده برخوردار باشد. در فضای دو بعدی ریسک و بازده، سبدهایی که دارای این ویژگی باشند، روی منحنی به نام «مرز کارا»<sup>۱</sup> قرار می‌گیرند. مقیاس سنجش بهینه‌بودن سبد دارایی که از طریق یک مدل بهینه‌سازی تشکیل می‌شود، فاصله آن با مرز کارا و به عبارت بهتر قرار گرفتن آن در روی مرز کارا است. افزون بر این به دلیل پویایی بازارهای سرمایه، همواره فرآیندها و نیازهای جدیدی در ارتباط با مدل‌های سبد دارایی‌ها مورد شناسایی قرار می‌گیرد.

مارکوویتز خصوصیت سبد کارا را به این صورت تعریف نمود: سبد کارا، سبدي است که دارای حداقل واریانس در ازای بازده معین یا دارای حداکثر بازده در ازای ریسک معین باشد. او مکان هندسی سبدهای کارا (با ریسک‌های مختلف) را تحت عنوان مرز کارا تعریف نمود و از برنامه‌ریزی ریاضی درجه دوم (تابع هدف درجه دوم به علاوه دو محدودیت خطی) برای بدست آوردن حداقل واریانس و بازده معین استفاده نمود.

این رویکرد در پی بهینه‌سازی تخصیص مبالغ مورد سرمایه‌گذاری بر روی هر کالا است. مسئله بهینه‌سازی عبارت از این است که مقادیر متغیرها را به گونه‌ای بیابیم که تابع هدف با ارضای محدودیت‌ها، کمینه یا بیشینه گردد. علاوه بر این به دلیل پویایی بازارهای سرمایه، مدل‌سازی مالی باید الزامات و نیازهای جدید را از طریق مدل‌های تصمیم‌گیری قابل انعطاف‌تر برآورده سازد. این مدل‌ها باید معیارهای مختلفی، علاوه بر معیارهای بازده و ریسک را در نظر بگیرند.

---

<sup>۱</sup> Efficient Frontier

وقتی که دو سبد دارای گشتاورهای اول و دوم مساوی داشته باشیم و تابع مطلوبیت سرمایه‌گذار بر اساس میانگین و واریانس باشد، طبیعی است که نمی‌توان سبدهای را نسبت به سبد دیگر ترجیح داد. همچنین با توجه به اینکه در نظریه میانگین - واریانس، توزیع بازده‌ها متقارن فرض می‌شوند، بنابراین گشتاور سوم (چولگی)<sup>۲</sup> نقش مهمی را ایفا می‌کند. در این صورت سبدهای که چولگی بالاتری داشته باشد مرجح خواهد بود.

در سال ۱۹۹۳، کونو<sup>۳</sup> رهیافت جدیدی برای حل مسئله بهینه‌سازی سبد معرفی کرد که هدف آن وارد کردن گشتاورهای بالاتر در ساختار مسئله بود. در مدل کونو هدف بیشینه‌کردن چولگی است و قیدهای مدل روی میانگین مورد انتظار و واریانس ثابت و معقول پایه‌ریزی می‌شود. در واقع کونو با وارد کردن معیار آماری گشتاور سوم (چولگی) گام مهمی در زمینه بهینه‌سازی برداشت و ایراداتی را که به مدل مارکوویتز وارد بود را رفع کرد.

در حال حاضر معمول‌ترین اندازه ریسک موجود در بازار، روش ارزش در معرض خطر<sup>۴</sup> است. ارزش در معرض خطر، حداکثر زیانی است که ممکن است در یک دوره زمانی معین (معمولاً یک روزه) و با در نظر گرفتن یک سطح اطمینان مشخص در سبدهای دارایی‌ها رخ دهد. به عنوان مثال، وقتی گفته می‌شود که ارزش در معرض خطر یک دارایی در سطح اطمینان ۹۹ درصد روزانه ۱۰ میلیون دلار است به این معنا است که از هر ۱۰۰ روزی که مبادلات تجاری در آنها صورت می‌گیرد، تنها در یک روز به طور متوسط یک زیان بالاتر از ۱۰ میلیون دلار خواهیم داشت. یکی از مزایای ارزش در معرض خطر این است که محاسبه ریسک سبدهای متشکل از انواع دارایی‌های مختلف، تنها با این روش قابل اندازه‌گیری است. امروزه محاسبه پروژه‌ها در بانک‌ها، مؤسسات بیمه‌ای، صندوق‌های سرمایه‌گذاری و سایر موسسات مالی و اعتباری با استفاده از این روش صورت می‌پذیرد. ضمن آنکه محاسبه حد کفایت سرمایه در بانک‌ها نیز بر اساس این معیار انجام می‌شود. مزیت دیگر این روش، سهولت محاسبه و سادگی فهم و تفسیر آن می‌باشد. ارزش در معرض خطر شرطی، اندازه ریسک جدیدی است که بعد از ارزش در معرض خطر مطرح شده است و به لحاظ خصوصیات ریاضی و پایداری تخمین‌های آماری نسبت به ارزش در معرض خطر برتری دارد و اولین بار توسط اوریسایف<sup>۵</sup> و راکفلار<sup>۶</sup> مطرح شده است. در فصل اول این پایان‌نامه، ابتدا تعاریفی از ادبیات سبد بهینه را مرور می‌کنیم و سپس نظریه معروف هری مارکوویتز را در مورد انتخاب سبد توضیح می‌دهیم. در این فصل، مفاهیم مهم ریاضی را که مارکوویتز در

Skewness<sup>۲</sup>

Konno<sup>۳</sup>

Value at Risk<sup>۴</sup>

Uryasev<sup>۵</sup>

Rockeflar<sup>۶</sup>

مورد سبد مطرح کرده و همچنین مدل مارکویتز را که به صورت یک مسئله برنامه‌ریزی درجه دوم فرمول‌بندی شده است را ارائه می‌کنیم. در فصل دوم تأکید ما بیشتر روی روش کونو خواهد بود. در ابتدای این فصل دیدگاه تابع مطلوبیت به مسئله بهینه‌سازی سبد را معرفی می‌کنیم. اینکه چرا و با چه توجیهی ما چولگی را به مسئله اضافه می‌کنیم را به طور مفصل شرح می‌دهیم و تا رسیدن به مدل اصلی کونو چند مدل معروف دیگر مثل مدل میانگین - انحراف مطلق را نیز در این فصل معرفی می‌کنیم.

در فصل سوم، اندازه‌های ریسک مثل اندازه ریسک منسجم و ناسازگار را در مفاهیم بنیادی و گسترده تعریف می‌کنیم. سپس به شناسایی شاخص‌های مهم آماری ارزش در معرض خطر و ارزش در معرض خطر شرطی که ابزارهای بسیار مهمی برای مدیریت ریسک مدرن به شمار می‌آیند، می‌پردازیم. بعد از تعریف، شناسایی کامل، بیان تفاوتها و همچنین روش‌های محاسبه، به کاربردهای آنها اشاره خواهیم کرد. نشان می‌دهیم که عمده تفاوت‌های بین این دو اندازه ریسک در خصوصیات ریاضی، پایداری تخمین‌های آماری، سادگی فرایندهای بهینه‌سازی، پذیرش بوسیله ناظران و غیره می‌باشد و سپس یک مدل با تابع هدف VaR را معرفی می‌کنیم.

در فصل چهارم، مدل‌های بهینه‌سازی مبتنی بر CVaR را معرفی می‌کنیم و چگونگی استفاده از این اندازه به صورت یک قید در مسئله را بررسی می‌کنیم. در فصل پنجم، به مدل بویل که مدل توسعه‌یافته‌ای کونواست، می‌پردازیم. همچنین پس از تعریف اختیارات معامله به تأثیر آنها در بالابردن چولگی اشاره می‌کنیم.

در فصل ششم، با اضافه کردن یک قید شبیه CVaR به مدل مارکویتز، مدل جدیدی را معرفی می‌کنیم که به مدل شبه - CVaR معروف است.

در فصل هفتم، ابتدا در مورد داده‌ها بحث می‌کنیم و فرض نرمال بودن داده‌ها را با استفاده از تست‌های آماری، امتحان می‌کنیم. سپس نتایج، محاسبات و کدهای پیاده‌سازی شده در مورد مدل‌های مطرح شده در فصل‌های قبل را ارائه می‌کنیم.

# فصل اول

## انتخاب سبد و مدل مارکویتز

### ۱.۱ پیش‌گفتار

رویکرد سرمایه‌گذاری در چارچوب سبد دارایی‌ها، در پرتواندیشه‌های مارکویتز و شارپ<sup>۱</sup> روند تکاملی پیموده و کاربرد برنامه‌ریزی ریاضی، دقت سرمایه‌گذاری در سبد را افزایش داده است. مدل‌های مختلفی برای هدایت سرمایه‌گذاری در چارچوب سبد با استفاده از برنامه‌ریزی ریاضی ارائه شده است. مدل مارکویتز به نام مدل میانگین - واریانس، از دو معیار بازده و ریسک در قالب برنامه‌ریزی درجه دوم استفاده نموده است.

مدل‌سازی مالی که از ترکیب رویکرد مالی و برنامه‌ریزی ریاضی و در پاسخ به نیاز تصمیم‌گیری بهینه سرمایه‌گذاری و مالی پدید آمده است. مارکویتز بهینه‌سازی تصمیم‌گیری سبد را نخستین بار بر اساس معیارهای میانگین و واریانس مطرح نمود. او واریانس سبد را بصورت مجموع موزون واریانس‌ها و کواریانس‌های کالاهای درون سبد تعریف و نشان داد که تنوع‌بخشی<sup>۲</sup> سبد قادر است ریسک آن را کاهش دهد.

---

<sup>۱</sup> Sharpe

<sup>۲</sup> Diversification

توسعه مدل بهینه‌سازی سبد، در درجه اول بر مفروضات پایه‌ای مارکویتز مبتنی هستند: سرمایه‌گذاران نسبت به بازده علاقمند و نسبت به ریسک بی‌علاقه‌اند، در تصمیم‌گیری رفتار عقلایی دارند و بر مبنای بیشینه‌کردن مطلوبیت منتظره خویش تصمیم می‌گیرند. بنابراین، مطلوبیت سرمایه‌گذار تابع ریسک و بازده مورد انتظار است.

## ۲.۱ انتخاب سبد

به مطالعه چگونگی سرمایه‌گذاری دارایی‌ها انتخاب سبد می‌گویند که در واقع فرایند موازنه بین بازده مورد انتظار<sup>۲</sup> و ریسک، برای پیدا کردن بهترین سبد کالاها و تعهدات<sup>۴</sup> است.

تعریف خاص‌تر از انتخاب سبد این است که شامل تصمیمات تنها در مورد چگونه سرمایه‌گذاری در سهام، اوراق قرضه و دیگر کالاهای مشتق است. اگر بخواهیم تعریف وسیع‌تری از انتخاب سبد داشته باشیم این است که آیا خانه و ماشین بخریم یا اجاره کنیم یا چه نوع و چه مقدار بیمه بخریم و چطور تعهداتمان را مدیریت کنیم.

## ۳.۱ مدل مارکویتز

در اوایل دهه ۱۹۵۰، هری مارکویتز در رساله دکتری خود نظریه بنیادی سبد را مطرح کرد که نظریه نوین سبد<sup>۵</sup> بر آن استوار است. پیش از مارکویتز، سرمایه‌گذاران با مفهوم بازده و ریسک با مسامحه برخورد می‌کردند. سرمایه‌گذاران از سال‌ها پیش می‌دانستند که تنوع‌بخشی سبد، رویکردی هوشمندانه است: ضرب‌المثلی که گفته می‌شد «تخم مرغ‌ها را در یک سبد نگذاریم» اهمیت تنوع‌بخشی در سبد را نشان می‌دهد. اما مارکویتز نخستین کسی بود که مفهوم تنوع‌بخشی در سبد سرمایه‌گذاری را به طور رسمی توسعه داد. او بطور کمی نشان داد که چرا و چگونه، تنوع‌بخشی سبد سرمایه‌گذاری، ریسک آن را برای سرمایه‌گذار کاهش می‌دهد.

پخش‌پذیری یا تنوع‌بخشی آن اندازه اهمیت دارد که می‌توان گفت نخستین قاعده مدیریت سبد است. به

---

<sup>۲</sup> Expected Return

<sup>۴</sup> Liabilities

<sup>۵</sup> Modern Portfolio Theory

دلیل اینکه سرمایه‌گذاران نمی‌توانند در مورد آینده مطمئن باشند، لذا اگر مایل باشند ریسک را کاهش دهند باید به تنوع‌بخشی مبادرت ورزند. مارکویتز نخستین کسی بود که معیار خاصی برای ریسک سبد تدوین نمود و بازده منتظره و ریسک یک سبد را استخراج نمود. مدل او بر پایه مشخصه‌های بازده منتظره و ریسک بنا شده و دراصل یک چارچوب نظری برای تحلیل گزینه‌های ریسک و بازده است.

سبد سرمایه‌گذاری کارا، سبدي است که در یک سطح معین ریسک، دارای بیشترین بازده است یا دارای کمترین ریسک به ازای سطح معین بازده است. مجموعه سبدهای کارا را مرز کارا می‌گویند. سرمایه‌گذاران عقلایی، در پی سبدهای کارا خواهند بود، زیرا این سبدها بیشترین بازده را برای سطح معین ریسک، یا کمترین ریسک برای سطح معین بازده نوید می‌دهند. برای تعیین مجموعه سبدهای کارا، ضروری است که بازده مورد انتظار و انحراف معیار بازده برای هر سبد را تعیین کنیم. برای انجام این کار باید مدل مارکویتز را درک کنیم. مارکویتز برای توسعه مدل خویش، برخی مفروضات پایه‌ای را برای سرمایه‌گذاران در نظر می‌گرفت:

(۱) نسبت به بازده علاقمند و نسبت به ریسک بی‌علاقه‌اند

(۲) در تصمیم‌گیری رفتار عقلایی نشان می‌دهند

(۳) بر مبنای بیشینه‌کردن مطلوبیت منتظره خویش تصمیم می‌گیرند

پس مطلوبیت سرمایه‌گذار تابع ریسک و بازده مورد انتظار اوست که دو پارامتر عمده تصمیم‌گیری است.

### ۱.۳.۱ پردازش وقایع سپری‌شده در برابر پردازش وقایع آینده

سبد سرمایه‌گذاری برای نگهداری در دوره زمانی آینده ایجاد می‌شود. نظریه سبد با رویدادهای مورد انتظار در آینده مرتبط است. اگر بخواهیم تصمیمات سرمایه‌گذاری را برای آینده اتخاذ کنیم باید از داده‌های تاریخی استفاده کنیم.

### ۲.۳.۱ داده‌های مورد نیاز

تحلیل مارکویتز، سبدهای سرمایه‌گذاری را بر مبنای مجموعه داده‌های تأمین‌شده توسط سرمایه‌گذار تولید می‌کند.

(۱) بازده مورد انتظار که با  $E(R)$  برای هر کالای مورد نظر نشان می‌دهند



۲) انحراف معیار بازده را که با  $\sigma(R)$  نمایش می دهند

۳) کواریانس، به عنوان معیار همراهی و ارتباط حرکتی بین نرخ های بازده کالاهای مختلف

که در آن  $R$  متغیر تصادفی نشان دهنده بازده مورد انتظار است.

### ۳.۳.۱ بازده مورد انتظار کالا

سرمایه گذاران کالای مالی را به خاطر بازده آتی آن خریداری می کنند. بنابراین مدل های سبد باید بصورت آینده نگر فرمول بندی شود. بدلیل عدم قطعیت بازده ها، در بازارهای مالی، آنچه عملاً در دسترس ماست بازده ها در واقع قضاوت های احتمالی هستند. برای محاسبه بازده منتظره کالای  $i$ ، علاوه بر احتمال وقوع هر بازده، سرمایه گذار به تخمین بازده واقعاً قابل دستیابی نیاز دارد. فرمول زیر برای محاسبه این بازده منتظره قابل بکارگیری است:

$$E(R_i) = \sum_{k=1}^m P_k P(R_k)$$

در این رابطه داریم:

$$E(R_i) = \text{بازده مورد انتظار هر کالا}$$

$$P_k = \text{احتمال وقوع هر نرخ بازده}$$

$$P(R_k) = \text{بازده بالقوه یک کالا}$$

$$m = \text{تعداد بازده های هر کالا}$$

### ۴.۳.۱ ریسک هر کالا

برای اندازه گیری ریسک هر کالا، واریانس بازده مورد انتظار آن را به کار می بریم. از نظر آماری واریانس نشان دهنده پراکندگی یا تغییرپذیری حول میانگین است. هر چه مقدار پراکندگی بازده بیشتر باشد، ریسک

(واریانس و انحراف معیار آن) بزرگتر است. بنابراین واریانس یک معیار منطقی و سازگار برای اندازه‌گیری ریسک یک کالا توسط سرمایه‌گذار است.

واریانس کالای  $i$ -ام از فرمول زیر بدست می‌آید:

$$Var(R_i) = \sigma_i^2 = \sum_{k=1}^m [P(R_k) - E(R_i)]^2 P_k$$

که در آن  $\sigma_i$  انحراف معیار  $i$ -ام است.

### ۵.۳.۱ بازده مورد انتظار سبد سرمایه‌گذاری

بازده مورد انتظار یک سبد، میانگین موزون بازده منتظره کالاهای منفرد درون سبد است و به سادگی محاسبه می‌شود. وزن‌ها براساس نسبت مبالغ سرمایه‌گذاری شده در مورد هر کالا، به کل مبلغ سرمایه‌گذاری بدست می‌آیند و مجموع اوزان یک فرض می‌شود. به عبارت ریاضی خواهیم داشت:

$$E(R_p) = \sum_{k=1}^m w_k E(R_k)$$

در این رابطه داریم:

$$E(R_p) = \text{بازده مورد انتظار سبد}$$

$$w_i = \text{وزن سبد برای } i \text{ امین کالا}$$

$$1 = \sum_{k=1}^m w_k$$

$$E(R_i) = \text{بازده مورد انتظار هر کالا}$$

### ۶.۳.۱ ریسک سبد

محاسبه دیگر مدل پایه‌ای سبد، عبارت است از ریسک سبد در مدل مارکوویتز. ریسک سبد سرمایه‌گذاری با واریانس بازده سبد سرمایه‌گذاری اندازه گرفته می‌شود. برای محاسبه ریسک سبد سرمایه‌گذاری باید دو عامل را در نظر گرفت:

(۱) ریسک موزون کالای منفرد

(۲) همبستگی موزون بین کالاها

یکی از خدمات واقعی مارکوویتز به نظریه، بصیرت وی در خصوص اهمیت نسبی این دو عامل است. با افزایش شمار کالاهای درون یک سبد اهمیت واریانس (ریسک) هر کالای منفرد کاهش پیدا می‌کند در حالیکه اهمیت کواریانس افزایش می‌یابد. مثلاً در سبد سرمایه‌گذاری متشکل از پانصد کالای مختلف، ریسک هر کالا در برابر ریسک سبد مقدار کوچکی است. تمام ریسک سبد تقریباً در این مورد تمام ریسک ناشی از کواریانس (همبستگی) بین کالاها خواهد بود. برای ملاحظه این امر رابطه زیر را در نظر بگیرید:

$$Var(R_p) = \sum_{i=1}^n w_i^2 Var(R_i) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j r_{ij} \sigma_i \sigma_j$$

در این رابطه ریسک قابل مشاهده است به طوری که نخستین عبارت سمت راست در این تساوی مجموع موزون ریسک‌های کالای منفرد است. دومین عبارت رابطه موزون بین بازده‌های کالاها است که می‌تواند بر حسب رابطه دقیق بین کالاها مقادیر مثبت یا منفی و یا صفر اختیار کند. نکته: ضریب همبستگی مورد استفاده در نظریه پرتفولیو یا سبد یک مقیاس آماری برای میزان ارتباط بین بازده‌های هر جفت کالا درون سبد است. هر چند، این مقیاس نشانگر همراهی است. و رابطه علت و معلولی را نشان نمی‌دهد و بین +۱ و -۱ محدود می‌شود.

## ۴.۱ توابع مطلوبیت و منحنی‌های بی‌تفاوتی

وقتی که دو یا چند انتخاب موجود هست چندین موقعیت برای نهادهای مالی (شخصی یا شرکتی) وجود دارد. وقتی که نهادهای مالی با مجموعه انتخاب‌ها مواجه باشند «نظریه انتخاب»<sup>۶</sup> از دیدگاه اقتصادی، مفهوم تابع مطلوبیت<sup>۷</sup> برای توصیف روش‌های تصمیم‌گیری این نهادها به کار می‌رود.

تابع مطلوبیت، به هر انتخاب ممکن شرکت‌های سرمایه‌گذاری مقداری اختصاص می‌دهد. این مقادیر را اغلب شاخص مطلوبیت می‌گویند، و دارای ویژگی ترجیحی است بدین معنا که  $a$  را نسبت به  $b$  مرجح گویند، اگر و فقط اگر، مطلوبیت  $a$  از مطلوبیت  $b$  بزرگتر باشد. در واقع مرجح بودن یک انتخاب خاص بزرگ‌تر بودن مطلوبیت آن انتخاب را نشان می‌دهد، انتخابی که از پیشینه‌کردن مطلوبیت با توجه به مجموعه محدودیت‌هایی که شرکت‌های سرمایه‌گذاری با آن مواجه هستند، بدست می‌آید.

پارتو<sup>۸</sup> در قرن هجدهم فرضی را مطرح کرد که فرآیند تصمیم‌گیری سرمایه‌گذار بتواند به عنوان بهینه‌سازی تابع مطلوبیت نمایش داده شود. در هر صورت، تا سال ۱۹۴۴ تابع مطلوبیت به صورت ریاضی فرمول‌بندی نشده بود تا اینکه فون - نیومن<sup>۹</sup> و مورگنشرن<sup>۱۰</sup> این کار مهم را انجام دادند.

در نظریه سبد، نهاد مالی با مجموعه انتخاب‌ها روبرو است. سبدهای مختلف سطوح مختلف از بازده مورد انتظار و ریسک دارند. نهادهای مالی یک سبد را از بین همه ترکیب‌های ریسک - بازده انتخاب می‌کنند. مطلوبیت بدست آمده از هر ترکیب ریسک - بازده ممکن با تابع مطلوبیت بیان می‌شود. تابع مطلوبیت می‌تواند به صورت رسم منحنی‌های بی‌تفاوتی<sup>۱۱</sup> نمایش داده شود.

شکل (۱)، منحنی‌های بی‌تفاوتی به صورت  $u_1, u_2$  و  $u_3$  نمایش داده شود. که در آن محور افقی نشان‌دهنده ریسک و محور عمودی بازده مورد انتظار را نشان می‌دهد. هر منحنی مجموعه‌ای از سبدهای با ریسک و بازده

<sup>۶</sup> Theory of Choice

<sup>۷</sup> Utility Function

<sup>۸</sup> Pareto

<sup>۹</sup> Von - Neumann

<sup>۱۰</sup> Morgenstern

<sup>۱۱</sup> Indifference Curves