وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه
گاوازنگ – زنجان

بررسی و شبیه‌سازی نکول‌های همبسته

پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد

کریم نوروزی‌پور

استاد راهنما: **دکتر شیوا زمانی**
و
دکتر حسن داداشی

اسفندماه ۱۳۹۰

بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

تشکر و قدردانی

بر خود لازم می‌دانم که از اساتید راهنمای خودم دکتر حسن داداشی آرانی و دکتر شیوا زمانی به خاطر تمامی زحماتشان در انجام این پایان‌نامه قدردانی نمایم. همچنین از دکتر علی فروش‌باستانی و دکتر آرش فهیم تشکر می‌کنم که در این فرصت درس‌های زیادی از این بزرگواران یاد گرفتم . از پدر و مادر عزیزم که اسوه‌ی ایثار و فداکاری و نمونه‌ی تمام خوبی‌ها، برای همیشه زندگی‌ام می‌باشند، تشکر کرده و دستان پر مهرشان را می‌بوسم. از برادرام و خواهرم که با حمایت و دلگرمی‌های خویش، همواره مشوّق من بودند و تمامی عزیزانم که بدون آنها رسیدن به این نقطه از هستی برایم ممکن نبود، تشکر می‌کنم.

چکیده

ریسک نکول‌های همبسته در بازارها و محیط‌های کسب و کار مالی اهمیت بسیاری دارد. چون در حالت کلی ریسک و به صورت خاص‌تر ریسک نکول‌های همبسته از عناصر پایه‌ای موثر بر رفتار مالی است. از لحاظ تئوری کارهای زیادی در زمینه ریسک اعتباری و ریسک نکول‌های همبسته انجام شده ولی از لحاظ شبیه‌سازی کمتر به آن توجه شده‌است و چالش برانگیز است.

در این پایان‌نامه به بررسی ریسک اعتباری، مدل‌های نکول و شبیه‌سازی ریسک نکول‌های همبسته می‌پردازیم. برای این کار ازمدل‌های شدت استفاده می‌کنیم که محاسبات روی این مدل‌ها با روش شبیه‌سازی مونت کارلو صورت می‌پذیرد. چون شبیه‌سازی مونت کارلو همه‌ی مسیر شبیه‌سازی زمانهای پیوسته را در بر نمی‌گیرد، لذا منجر به اریبی می‌شود. در این پایان‌نامه ما از یک روش دقیق که منجر به نااریبی می‌شود استفاده می‌کنیم، که شامل دو مرحله به شرح زیر است:

در مرحله‌ی اول یک زنجیر مارکوف که توزیع حاشیه‌ای آن با فرآیند توصیفی بیانگر وضعیت نکول باینری(صفر و یک) هر شرکت منطبق است می‌سازیم. با این ساختار مسأله اصلی ما به برآورد یک امید ریاضی از زنجیر مارکوف تبدیل می‌شود.

در مرحله‌ی دوم امید ریاضی بدست آمده در مرحله‌ی قبل را با استفاده از روش پذیرش/ رد محاسبه می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: *ریسک اعتباری، نکول، ریسک نکول‌های همبسته، شبیه‌سازی دقیق*

فهرست

لیست تصاویر

پیش گفتار

محققین مختلف ریسک را به نسبت مواجهه با آن و بسته به هدف مطالعاتی که در این موضوع داشتند به اشکال متفاوت ولی مشابه تعریف کرده‌اند، به عنوان مثال در کتاب "مالی"[۱] [۱۹] تعریفی که مرتون[۲] و بادی[۳] ارائه کردند عبارت است از:

"ریسک، عدم اطمینان در موضوعی است که باعث سلب آسایش شود و زمانی مطرح می‌شود که تغییر در آن، موجب تغییر عملکرد شخص شود". همچنین مک‌نیل[۴] و فری[۵] ریسک را به " هر فعالیت یا اتفاقی که ممکن است در توانایی سازمان در رسیدن به اهدافش اثر نامطلوب بگذارد" بیان کردند. البته همانطور که این محققین اشاره داشتند شاید هیچ تعریفی تمام جنبه‌های ریسک را پوشش ندهد ولی به جنبه‌های اصلی ریسک اشاره می‌کنند. عوامل مشترکی که برای ریسک می‌توان اشاره کرد عبارتند از:

۱) ریسک به فعالیت یا رویدادی اطلاق می‌شود که در آن جنبه عدم اطمینان وجود داشته باشد.

۲) ریسک به مواردی اطلاق می‌شود که فعالیت یا رویداد مورد نظر در رسیدن به اهداف تعیین شده موثر باشد.

در یک تقسیم‌بندی می‌توان انواع ریسک را به ۵ دسته تقسیم کرد.

---

۱ Finance

۲ Robert C. Merton

۳ Zvi Bodie

۴ Alexander J. Mcneil

۵ Rudiger Frey

۱) ریسک اعتباری[۱]: ریسک تغییر کیفیت اعتباری طرف حساب (طرف حساب به تعهد خود به موقع عمل نکند.)

۲) ریسک بازار[۲]: ریسک تغییر قیمت‌ها و نرخ‌ها

۳) ریسک نقدشوندگی[۳]: زمانیکه تغییر موقعیت‌های مالی با هزینه زیادی همراه شوند و یا دسترسی به منابع مالی دچار مشکل شود.

۴) ریسک عملیاتی[۴]: ریسک تقلب، خطا و اشتباه، ریسک نیروی انسانی، ریسک مدل و مواردی مشابه آن.

۵) ریسک سیستمی[۵]: عدم کارکرد صحیح کل سیستم مالی به علت نکولهای گسترده، از بین رفتن نقدینگی در کل بازار و مواردی مشابه آن.

ریسک اعتباری را می‌توان به سه زیر شاخه تقسیم کرد: ریسک نکول[۶]، ریسک کاهش رتبه اعتباری[۷] و ریسک دامنه اعتباری.[۸]

۱) ریسک نکول: زمانیکه بدهکار به علت عدم علاقه یا عدم توانایی به تعهد خود در سر رسید عمل نکند. این مهمترین بخش ریسک اعتباری است و ما در این پایان‌نامه به مطالعه این مورد خواهیم

---

۱ Credit Risk

۲ Market Risk

۳ Liquidity Risk

۴ Operational Risk

۵ Systemic Risk

۶ Default Risk

۷ Downgrade Risk

۸ Credit Spread Risk

پرداخت.

۲) ریسک کاهش رتبه اعتباری: زمانیکه رتبه اعتباری بدهکار پایین بیاید.

۳) ریسک دامنه اعتباری: تغییر پیش بینی نشده در اختلاف عایدی بین اوراق بدون ریسک و اوراق ریسکی.

با این توضیحات به موضوع اصلی یعنی، نکول‌های همبسته می‌پردازیم:

ریسک نکول‌های همبسته [۱] یکی از فراگیرترین تهدیدها در بازارهای مالی[۲] به شمار می‌آید. مقابله و روبرو شدن با این تهدید، مشغله‌ای برای سرمایه‌گذاران و موسسات مالی از جمله بانک‌ها در پرداخت وام به افراد و شرکت‌ها می باشد. این سرمایه‌گذاران (بانک‌ها و موسسات مالی) برای کم کردن ریسک خود باید ریسک نکول را در سبد دارایی‌هایشان محاسبه کنند تا بتوانند استراتژی مناسب را در این مواقع برای کاهش ریسک خود لحاظ کنند.

از جمله کارهایی که این مؤسسات برای کاهش ریسک خود انجام می‌دهند عبارتند از:

۱) تخمین سرمایه در خطر[۳]

۲) محافظت کردن از اثرات نامطلوب ضررهای نکول در سطوح اطمینان بالا

۳) تخمین قیمت‌های مشتقات اعتباری سبد

که نمونه‌هایی از ابزارهای مالی برای بیمه کردن سرمایه‌گذاران اعتباری در برابر ریسک نکول‌های همبسته هستند.

برنامه‌های عملی و کاربردی مدیریت ریسک و قیمت‌گذاری کالاهای مشتقه نیاز به یک مدل تصادفی از زمان دقیق نکول‌های همبسته دارد. مدل‌های مبتنی بر شدت[۴] برای این منظور مورد استفاده قرار می‌گیرد.

---

۱ Correlated Defaults

۲ Financial Markets

۳ Capital-at-Risk

۴ Intensity

فرآیند شدت از یک مدل تصادفی پیروی می‌کند که بازتاب دهنده اطلاعات در تمامی زمانهاست. نمونه‌ای از این اطلاعات شامل ارزش عامل‌های خارجی ریسک و وضعیت شرکت‌های دیگر در اقتصاد است. فرآیندهای شدت وابسته به شرکت‌های مختلف، همبسته هستند. روی این مدل‌ها از لحاظ تئوری کارهای زیادی انجام شده ولی از لحاظ محاسباتی به دلیل چالش بر انگیز بودن آنها مطالعات کمتری انجام شده است.

مهمترین فرآیند شدت مورد استفاده در مدل‌سازی ریسک نکول، فرآیند پواسن ناهمگن است و شبیه سازی مونت‌کارلو از رایج‌ترین ابزار مورد استفاده در شبیه‌سازی این فرآیندهاست. ما در این پایان‌نامه یک روش نمونه‌گیری دقیق را که برآورد نااریبی[۱] از مدل‌های مبتنی بر شدت است را بررسی و توسعه می‌دهیم. حال آنکه روش‌های مقیاس زمانی[۲] (گسسته کردن زمان به فاصله‌های Δt) ممکن است باعث اریبی برآوردها شود. علت آن هم این است که به این طریق نمی‌توانیم تمام مسیر فرآیند تصادفی پیوسته زمان را که از مدل شدت پیروی می‌کند بسازیم. اما روش دقیقی که ما در این پایان‌نامه بررسی می‌کنیم شامل دو بخش است: در بخش نخست ما یک زنجیر مارکوف باینری M پیوسته زمان و ناهمگن[۳] که در هر زمان t هم‌توزیع با فرآیند نقطه‌ای N است می‌سازیم. با این ساختار مسأله برآورد امید ریاضی تابع $f(N_t)$ به برآورد امید تابع $f(M_t)$ کاهش پیدا می‌کند.

در گام بعدی امید ریاضی بدست آمده را با روش پذیرش/رد[۴] محاسبه و بدست می‌آوریم. نتایج عددی، کارایی این روش دقیق را در مقایسه با روش‌های اویلر و روش "خی دو" از لحاظ اریبی و نااریبی نشان می‌دهد. می‌بینیم که روش دقیق از لحاظ محاسباتی به زمان کمتری احتیاج دارد و سرعت همگرایی بالایی نیز خواهد داشت.

طرح کلی این پایان‌نامه به این شرح است که: در فصل اول، به بیان مقدمات از جمله اصطلاحات

---

[۱] Unbiased

[۲] Time Scaling

[۳] Inhomogeneous

[۴] Acceptance/Rejection

آماری واحتمالاتی، روش شبیه‌سازی مونت‌کارلو و مفاهیم مالی و ریسک پرداخته و در فصل دوم به کارهایی که در زمینه‌ی اندازه‌های ریسک و ریسک نکول انجام شده خواهیم پرداخت. در فصل سوم ریسک نکول را با استفاده از زنجیر مارکوف و مدل‌های شدت شبیه‌سازی می‌کنیم. در فصل چهارم یعنی فصل آخر این پایان‌نامه احتمال نکول و شدت نکول ۱۰۰ شرکت فعال در بورس اوراق بهادار تهران را شبیه‌سازی می‌کنیم و مقادیر حاصل را با مقادیر واقعی شدت نکول شرکت‌ها مقایسه می‌کنیم.

فصل اول

مقدمات

در این فصل به بیان مطالبی که برای خواننده در مطالعه این پایان‌نامه لازم است، می‌پردازیم. (البته چون رشته‌ی ریاضیات مالی در ایران نوپا و جدید است سعی کردیم توضیحات اولیه‌ی مفاهیم مالی تا حد امکان کامل باشد.) چون در مباحث ریسک، آمار و احتمال هم نقش بسزایی دارد، پس در سه بخش به ترتیب، مفاهیم آمار و احتمال و روش مونت‌کارلو سپس مقدمات مربوط به مالی و ریسک را ارائه می‌نماییم.

۱.۱ مفاهیم آماری و احتمالی

در فضای ناتهی Ω، کلاس $\mathcal{F}$ از زیر مجموعه‌های Ω را میدان[۱] گوییم اگر شامل Ω باشد و تحت مکمل‌گیری[۲] و اجتماع متناهی[۳] بسته باشد. کلاس $\mathcal{F}$ از زیر مجموعه‌های Ω را میدان سیگمایی[۴] گوییم اگر میدان باشد و تحت اجتماع شمارش‌پذیر[۵] بسته باشد. میدان سیگمایی تولید شده توسط $\mathcal{F}$ را با $\sigma(\mathcal{F})$ نمایش می‌دهیم که دارای ویژگی‌های زیر است:

۱. $\mathcal{F} \subset \sigma(\mathcal{F})$.

۲. $\sigma(\mathcal{F})$ میدان سیگمایی است.

۳. اگر $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ باشد، آن‌گاه $\sigma(\mathcal{F}) \subset \sigma(\mathcal{A})$ است.

تابع $\mathcal{P}$ روی $\mathcal{F}$ را تابع اندازه احتمال[۶] می‌گوییم اگر شرایط زیر برای آن برقرار باشد:

۱. برای هر $A \in \mathcal{F}$، $۰ \leq \mathcal{P}(A) \leq ۱$ باشد.

۲. $\mathcal{P}(\oslash) = ۰$ و $\mathcal{P}(\Omega) = ۱$ باشد.

۳. اگر $\{A_۱, A_۲, ...\} \in \mathcal{F}$ دنباله‌ای جدا[۷] از هم باشند به طوری‌که $\bigcup_{k=۱}^{\infty} A_k \in \mathcal{F}$ ، آن‌گاه عبارت

---

[۱] Field

[۲] Formation of Complements

[۳] Finite Unions

[۴] σ-Field

[۵] Formation of Countable Unions

[۶] Probability Measure

[۷] Disjoint Sequence

زیر برقرار باشد:

$$\mathcal{P}(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{P}(A_k).$$

حال اگر $\mathcal{P}$ تابع اندازه احتمال و میدان سیگمایی $\mathcal{F}$ روی فضای Ω ناتهی باشد آن‌گاه سه‌تایی $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ را **فضای احتمال**[1] می‌خوانیم. تابع حقیقی f روی Ω را اندازه پذیر ($\mathcal{F}$-اندازه پذیر) گوییم اگر برای هر $A \in R$ تساوی $f^{-1}(A) = [w : f(w) \in A] \in \mathcal{F}$ برقرار باشد. تابع حقیقی اندازه‌پذیر روی $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ را **متغیر تصادفی** می‌گوییم. فرض می‌کنیم X متغیر تصادفی روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ باشد و $\mathcal{G}$ میدان سیگمایی موجود در $\mathcal{F}$ باشد. در این صورت متغیر تصادفی $E[X|\mathcal{G}]$ با خصوصیات زیر وجود دارد:

* $E[X|\mathcal{G}]$، $\mathcal{G}$ اندازه پذیر است.

* $E[X|\mathcal{G}]$ برای هر $G \in \mathcal{G}$ در تساوی $\int_G E[X|\mathcal{G}] d\mathcal{P} = \int_G X d\mathcal{P}$ صدق می‌کند.

متغییر تصادفی $E[X|\mathcal{G}]$ را امید شرطی X به شرط $\mathcal{G}$ می‌گوییم. فرض کنید T مجموعه از نقطه‌های زمانی باشد. آن‌گاه مجموعه‌ای از متغیرهای تصادفی به صورت

$$(X(t), t \in T) = (X(t, w), t \in T, w \in \Omega),$$

را فرآیند تصادفی روی Ω می‌نامیم. T می‌تواند بازهٔ زمانی $[a, b]$ و یا مجموعه‌ای از زمان‌های گسسته باشد. فرض کنید $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ مجموعه از میدان‌های سیگمایی $\mathcal{F}$ در Ω باشد.

مجموعهٔ $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ را پالایه[2] می‌خوانیم اگر برای هر $t \leq s \leq 0$، رابطه $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$ برقرار باشد.

---

[1] Probability Space

[2] Filtration

فرآیند تصادفی $(X(t), t \geq 0)$، فرآیند مارکوف در زمان پیوسته است اگر برای هر $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_k \leq u$ و $k \geq 1$ تساوی

$$\mathcal{P}[X(u)|X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_k)] = \mathcal{P}[X(u)|X(t_k)],$$

برقرار باشد. فرآیند تصادفی $(X(t), t \geq 0)$، مارتینگل زمان پیوسته[1] نسبت به فیلتر $\mathcal{F}_t, t \geq 0$ است اگر در شرایط زیر صدق کند:

۱. برای هر $t \geq 0$، $E[|X(t)|] < \infty$.

۲. $X(t)$، $\mathcal{F}_t$-اندازه پذیر باشد.

۳. $E[X(t)|\mathcal{F}_s] = X(s) \;\; \forall \;\; 0 \leq s \leq t.$

فرآیند تصادفی $(W(t), t \geq 0)$ را حرکت براونی[2] یا فرآیند وینر[3] گوییم، اگر در شرایط زیر صدق کند:

۱. $W(0) = 0$.

۲. $W(t) - W(s),$ برای هر $t > s \geq 0$، دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس $(t - s)$ باشد.

۳. برای $t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_n$، نموهای

$$W(t_2) - W(t_1) \;, W(t_3) - W(t_2), \ldots, W(t_n) - W(t_{n-1})$$

[1] Continuous-time Martingale

[2] Brownian Motion

[3] Wiener Process

از هم مستقل باشند.

فرآیند $Y(t) = \mu t + \sigma W(t)$ را حرکت براونی با رانش[۱] می‌خوانیم. فرآیند $S(t) = e^{\mu t + \sigma W(t)}$ حرکت براونی هندسی[۲] گفته می‌شود و به طور مختصر آن را با نماد $GBM(\mu, \sigma)$ نمایش می‌دهیم. اگر X یک متغیر تصادفی و ϕ یک تابع محدب باشد، آن‌گاه نامساوی ینسن به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\phi(E[X]) \leq E[\phi(X)].$$

فرآیند تصادفی $(X(n),\ n = ۰, ۱, \ldots)$ سوپرمارتینگل[۳] است اگر در شرایط زیر صدق کند:

$$E[X(n+۱)|X(۱), X(۲), ..., X(n)] \leq X(n).$$

$\{N(t) : t \geq ۰\}$ را فرایند پواسن با نرخ λ می‌گوییم هرگاه دارای شرایط زیر باشد:

۱) $N(۰) = ۰$

۲) نموهای مستقل از هم و پایا در بازه‌های زمانی مجزا داشته باشد.

۳) $\lim_{h \to ۰} \frac{P(N(h)=۱)}{h} = \lambda$

۴) $\lim_{h \to ۰} \frac{P(N(h) \geq ۲)}{h} = ۰$

$N(t)$ تعداد پیشامدها در بازه‌ی $[۰, t]$ می‌باشد.

---

۱ Drift

۲ Geometric Brownian Motion

۳ Supermartingale

۲.۱ شبیه‌سازی مونت‌کارلو

این روش برای حل عددی مسائلی که حل آنها به روش تحلیلی پیچیده است، مورد استفاده قرار می‌گیرد که توسط اولام[1] در سال ۱۹۴۶ نام‌گذاری شده است. اساس کار این روش، مقایسه‌ی بین احتمال و حجم است. به عنوان مثال، مسئله‌ی تخمین انتگرال تابع f روی بازه‌ی واحد را در نظر بگیرید. با توجه به امید ریاضی، انتگرال:

$$\alpha = \int_{۰}^{۱} f(x)dx$$

را می توانیم به صورت $E[f(U)]$ بیان کنیم که U، متغیر تصادفی با توزیع یکنواخت استاندارد است. براي تخمین α به روش مونت کارلو، که آن را با $\widehat{\alpha}$ نشان می دهیم، به صورت زیر عمل می‌کنیم: دنباله متغیرهای تصادفی $U_۱, U_۲, \ldots, U_N$ را که مستقل از هم و دارای توزیع یکنواخت استاندارد هستند تولید می‌کنیم. مقدار تابع f را در تمام این نقاط بدست می‌آوریم و α را با میانگین‌گیری تخمین می‌زنیم، یعنی:

$$\widehat{\alpha} = \frac{۱}{N} \sum_{i=۱}^{N} f(U_i).$$

در حالت کلی برای محاسبه

$$\alpha = \int_{a}^{b} f(x)dx.$$

به روش مونت کارلو توزیع دلخواهی بر $[a, b]$ با چگالی $g(x)$ اختیار می‌کنیم. علاوه بر متغیر تصادفی X، که بر فاصله $[a, b]$ با چگالی $g(x)$ تعریف شده است احتیاج به متغیر تصادفی

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)},$$

---

[1] Ulam