抽象的素数大富豪 (Abstract Prime Daifugo)

関 真一朗 (Shin-ichiro Seki)

2018 年 5 月 30 日

概 要

著者によって 2014 年 5 月 23 日に考案されたトランプゲーム『素数大富豪』の抽象化を行う.

1 Introduction

素数大富豪はトランプを使ったカードゲームの一種であり, 著者の書いたものも含めてルールの解説記事を複数 Web 上で見つけることができる. ところで, ルールを出来る限り厳密に書こうとすると素数大富豪を数学的に定義するしかないという考えに至ったため, ここに定義する. ここでは情報の公開・非公開については考察しない (通常, 素数大富豪は手札や山札は非公開でプレイされることが多いが, 公開でもよい). なお, 著者は恥ずかしながらゲーム理論を現状勉強したことがないため, ゲームに関する基本的な用語の使用法や考え方を間違っている箇所が多数あると思われるが, 勉強次第必要に応じて修正していくつもりである.

2 素数大富豪の定義

2.1 トランプ

T を有限集合, K を非負整数とし, $S := (\mathbb{Z} \cap [0, K]) \cup \{\mathrm{Joker}\}$ とする. $v\colon T \to S$ を任意の写像とする. 組 (T, v) を (スートを無視した) **トランプ**とよび, (v を固定して)T と略記する.

二つのトランプ $(T_1, v_1\colon T_1 \to S), (T_2, v_2\colon T_2 \to S)$ が同値であるとは, 全単射 $f\colon T_1 \to T_2$ が存在して任意の $a \in T_1$ に対して $v_1(a) = v_2(f(a))$ が成り立つことと定義する.

2.2 プレイヤー

$N \in \mathbb{Z}_{>0}$ とし, $P := \{1, 2, \ldots, N\}$ とする. $s\colon P \to P$ を

$$s(x) := \begin{cases} x+1 & (1 \le x \le N-1) \\ 1 & (x = N) \end{cases}$$

と定義する. $k \in \mathbb{Z}_{\ge 1}$ に対して, $s^k := \underbrace{s \circ \cdots \circ s}_{k}$ とする.

2.3 枚数制限, b 進法

M を $\mathbb{Z}_{>0} \cup \{\infty\}$ の元とする. また, b を 2 以上の整数とする.

2.4 手札, 山札, 場, 素因数場, 手番, 関数

有限集合 $H_x^{(n)}, D^{(n)}, F^{(n)}, PF^{(n)}$ $(n \in \mathbb{Z}_{>0}, x \in P)$, $H_x^{(\overline{n})}, D^{(\overline{n})}, F^{(\overline{n})}, V^{(\overline{n})}(n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, x \in P)$, 写像 $t = (t_1, t_2)\colon \mathbb{Z}_{>0} \to P \times \{\pm 1\}$ および関数 $f_x^{(n)}\colon T \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ $(n \in \mathbb{Z}_{>0}, x \in P)$ で以下の条件を満たすものを考える. $D^{(n)}, F^{(n)}, D^{(\overline{n})}, F^{(\overline{n})}$ には全順序が入っている.

2.5 初期手札

$H_x^{(\overline{0})}$ は T の部分集合で, 任意の $x, y \in P, x \neq y$ に対して $\# H_x^{(\overline{0})} = \# H_y^{(\overline{0})}$, $H_x^{(\overline{0})} \cap H_y^{(\overline{0})} = \varnothing$ である.

2.6 初期山札

$D^{(\overline{0})}$ は集合としては $T \setminus \bigsqcup_{x \in P} H_x^{(\overline{0})}$ に等しく, 全順序が入っているものとする.

2.7 関数 $f_x^{(n)}$

$T_{\#} := \{a \in T \mid v(a) \neq \mathrm{Joker}\}$ とするとき, n, x に依らず $f_x^{(n)}(a) = v(a)$ $(a \in T_{\#})$ である. $J := \{a \in T \mid v(a) = \mathrm{Joker}\}$ とするとき, $f_x^{(n)}(a) \in \mathbb{Z} \cap [0, K]$ $(n \in \mathbb{Z}_{>0}, x \in P, a \in J)$ を満たす.

2.8 初期手番, 初期場

$t(1) := (1, 1) \in P \times \{\pm 1\}$. $F^{(\overline{0})} = \varnothing, V^{(\overline{0})} = \varnothing$.

2.9 結合関数

関数 $\mathrm{Con}\colon \bigsqcup_{m=1}^{\infty} (\mathbb{Z}_{>0} \times \underbrace{\mathbb{Z}_{\geq 0} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{\geq 0}}_{m-1}) \to \mathbb{Z}_{>0}$ を

$$\mathrm{Con}(a_1, \ldots, a_m) := \sum_{i=1}^{m} a_{m-i+1} \cdot b^{\sum_{j=1}^{i-1} d(a_{m-j+1})}$$

と定義する. ただし, d は b 進法における桁数を返す関数.

2.10 写像 $F_x^{(n)}$

$\mathcal{C} := \bigsqcup_{m=1}^{M} T^m$ とする $(T^m = \underbrace{T \times \cdots \times T}_{m})$. $n \in \mathbb{Z}_{>0}, x \in P$ に対して写像 $\widetilde{F_x^{(n)}}\colon \mathcal{C} \to \bigsqcup_{m=1}^{\infty} \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$ を $\widetilde{F_x^{(n)}}(a_1, \ldots, a_m) := (f_x^{(n)}(a_1), \ldots, f_x^{(n)}(a_m))$ により定める. $\widetilde{F_x^{(n)}}$ を

$$\mathcal{C}_x^{(n)} := (\widetilde{F_x^{(n)}})^{-1} \left(\bigsqcup_{m=1}^{\infty} (\mathbb{Z}_{>0} \times \underbrace{\mathbb{Z}_{\geq 0} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{\geq 0}}_{m-1}) \right)$$

に制限した写像を

$$F_x^{(n)}\colon \mathcal{C}_x^{(n)} \to \bigsqcup_{m=1}^{\infty} (\mathbb{Z}_{>0} \times \underbrace{\mathbb{Z}_{\geq 0} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{\geq 0}}_{m-1})$$

とする.

2.11　関数 $\mathcal{F}_x^{(n)}$

$n \in \mathbb{Z}_{>0}, x \in P$ に対して関数 $\mathcal{F}_x^{(n)} \colon \mathcal{C}_x^{(n)} \cup J \to \mathbb{Z}_{>0} \cup \{\pm\infty\}$ を

$$\mathcal{F}_x^{(n)}(\boldsymbol{a}) := \begin{cases} \mathrm{Con} \circ F_x^{(n)}(\boldsymbol{a}) & (\boldsymbol{a} \notin J) \\ \infty & (\boldsymbol{a} \in J, t_2(n) = 1) \\ -\infty & (\boldsymbol{a} \in J, t_2(n) = -1) \end{cases}$$

と定義する．なお, 任意の整数 m に対して, $-\infty < m < \infty$ が成り立つと規定する．

2.12　関数 $\mathcal{G}_x^{(n)}$

$n \in \mathbb{Z}_{>0}, x \in P$ に対して関数 $\mathcal{G}_x^{(n)} \colon \mathcal{C}_x^{(n)} \setminus (F_x^{(n)})^{-1}(1) \to \mathbb{Z}_{\geq 2}$ を

$$\mathcal{G}_x^{(n)} := \mathrm{Con} \circ F_x^{(n)}\Big|_{\mathcal{C}_x^{(n)} \setminus (F_x^{(n)})^{-1}(1)}$$

で定義する．

2.13　$\mathcal{D}_x^{(n)}, \mathcal{E}_x^{(n)}$

$n \in \mathbb{Z}_{>0}, x \in P$ に対して $\mathcal{D}_x^{(n)}$ を

$$\mathcal{D}_x^{(n)} := \bigsqcup_{m=1}^{\infty} \underbrace{\mathcal{C}_x^{(n)} \setminus (F_x^{(n)})^{-1}(1) \times \cdots \times \mathcal{C}_x^{(n)} \setminus (F_x^{(n)})^{-1}(1)}_{m}$$

と定義し, $\mathcal{E}_x^{(n)}$ を

$$\mathcal{E}_x^{(n)} := \left(\bigsqcup_{m=1}^{\infty} \underbrace{\mathcal{D}_x^{(n)} \times \cdots \times \mathcal{D}_x^{(n)}}_{m} \right) \setminus \left(\mathcal{C}_x^{(n)} \setminus (F_x^{(n)})^{-1}(1) \right)$$

と定義する．

2.14　選択可能な戦略

$H_x^{(n)}, D^{(n)}, F^{(n)}, PF^{(n)}, H_x^{(\overline{n})}, D^{(\overline{n})}, F^{(\overline{n})}, V^{(\overline{n})}, t$ の満たすべき条件は n に関して帰納的に定められる．

2.15　手番を持ったプレイヤーの行動

$D^{(\overline{n-1})}$ の最小元を a とする．また, $F^{(\overline{n-1})} \neq \varnothing$ のときに限って, $h(n)$ を

$$F^{(\overline{n-1})} = F^{(\overline{n-2})} = \cdots = F^{(\overline{n-h(n)})} \neq F^{(\overline{n-h(n)-1})}$$

を満たすような正整数と定める[1]．このとき, 次のいずれかを満たす．ただし, $H_{t_1(n)}^{(\overline{n-1})} = \varnothing$ の場合は (2.15.9) が成立する．

[1] (2.8) より $h(n)$ は存在する．また, (2.17.4) より $h(n) \leq N - 1$ である．

2.15.1 平常時, 山札からカードを引かないで場にカードを出す

$D^{(n)} = D^{(\overline{n-1})}$. $t_2(n) = 1$ であり, 或る $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_m) \in \mathcal{C}_x^{(n)} \cup J$ が存在して, $a_1, \ldots, a_m$ は $H_{t_1(n)}^{(\overline{n-1})}$ の相異なる元であり,

$$F^{(\overline{n-1})} \neq \varnothing \Longrightarrow \#(F^{(\overline{n-1})} \setminus F^{(\overline{n-h(n)-1})}) = m,$$
$$\mathcal{F}_{t_1(n)}^{(n)}(\boldsymbol{a}) > c, \quad ({}^\forall c \in V^{(\overline{n-1})})$$

が成り立ち, $H_{t_1(n)}^{(n)} = H_{t_1(n)}^{(\overline{n-1})} \setminus \{a_1, \ldots, a_m\}$, $F^{(n)} = F^{(\overline{n-1})} \cup \{a_1, \ldots, a_m\}$. $F^{(\overline{n-1})}$ の最大元 $< a_1 < \cdots < a_m$ と $F^{(n)}$ に全順序を入れる. $PF^{(n)} = \varnothing$.

2.15.2 平常時, 山札からカードを引いて場にカードを出す

$D^{(n)} = D^{(\overline{n-1})} \setminus \{a\}$. $t_2(n) = 1$ であり, 或る $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_m) \in \mathcal{C}_x^{(n)} \cup J$ が存在して, $a_1, \ldots, a_m$ は $H_{t_1(n)}^{(\overline{n-1})} \cup \{a\}$ の相異なる元であり,

$$F^{(\overline{n-1})} \neq \varnothing \Longrightarrow \#(F^{(\overline{n-1})} \setminus F^{(\overline{n-h(n)-1})}) = m,$$
$$\mathcal{F}_{t_1(n)}^{(n)}(\boldsymbol{a}) > c, \quad ({}^\forall c \in V^{(\overline{n-1})})$$

が成り立ち, $H_{t_1(n)}^{(n)} = (H_{t_1(n)}^{(\overline{n-1})} \cup \{a\}) \setminus \{a_1, \ldots, a_m\}$, $F^{(n)} = F^{(\overline{n-1})} \cup \{a_1, \ldots, a_m\}$. $F^{(\overline{n-1})}$ の最大元 $< a_1 < \cdots < a_m$ と $F^{(n)}$ に全順序を入れる. $PF^{(n)} = \varnothing$.

2.15.3 平常時, 山札からカードを引かないで場および素因数場にカードを出す

$D^{(n)} = D^{(\overline{n-1})}$. $t_2(n) = 1$ であり, 或る $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_m) \in \mathcal{C}_x^{(n)} \cup J$ および

$$\Big(\big((b_1^{(1,1)}, \ldots, b_{m_{1,1}}^{(1,1)}), \ldots, (b_1^{(1,l_1)}, \ldots, b_{m_{1,l_1}}^{(1,l_1)})\big), \ldots, \big((b_1^{(r,1)}, \ldots, b_{m_{r,1}}^{(r,1)}), \ldots, (b_1^{(r,l_r)}, \ldots, b_{m_{r,l_r}}^{(r,l_r)})\big)\Big) \in \mathcal{E}_{t_1(n)}^{(n)}$$

が存在して, $a_1, \ldots, a_m, b_1^{(1,1)}, \ldots, b_{m_{r,l_r}}^{(r,l_r)}$ は $H_{t_1(n)}^{(\overline{n-1})}$ の相異なる元であり,

$$F^{(\overline{n-1})} \neq \varnothing \Longrightarrow \#(F^{(\overline{n-1})} \setminus F^{(\overline{n-h(n)-1})}) = m,$$
$$\mathcal{F}_{t_1(n)}^{(n)}(\boldsymbol{a}) > c, \quad ({}^\forall c \in V^{(\overline{n-1})})$$

が成り立ち, $H_{t_1(n)}^{(n)} = H_{t_1(n)}^{(\overline{n-1})} \setminus \{a_1, \ldots, a_m, b_1^{(1,1)}, \ldots, b_{m_{r,l_r}}^{(r,l_r)}\}$, $F^{(n)} = F^{(\overline{n-1})} \cup \{a_1, \ldots, a_m\}$. $F^{(\overline{n-1})}$ の最大元 $< a_1 < \cdots < a_m$ と $F^{(n)}$ に全順序を入れる.

$$PF^{(n)} = \Big\{\Big(\big((b_1^{(1,1)}, \ldots, b_{m_{1,1}}^{(1,1)}), \ldots, (b_1^{(1,l_1)}, \ldots, b_{m_{1,l_1}}^{(1,l_1)})\big), \ldots, \big((b_1^{(r,1)}, \ldots, b_{m_{r,1}}^{(r,1)}), \ldots, (b_1^{(r,l_r)}, \ldots, b_{m_{r,l_r}}^{(r,l_r)})\big)\Big)\Big\}.$$

2.15.4 平常時, 山札からカードを引いて場および素因数場にカードを出す

$D^{(n)} = D^{(\overline{n-1})} \setminus \{a\}$. $t_2(n) = 1$ であり, 或る $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_m) \in \mathcal{C}_x^{(n)} \cup J$ および

$$\Big(\big((b_1^{(1,1)}, \ldots, b_{m_{1,1}}^{(1,1)}), \ldots, (b_1^{(1,l_1)}, \ldots, b_{m_{1,l_1}}^{(1,l_1)})\big), \ldots, \big((b_1^{(r,1)}, \ldots, b_{m_{r,1}}^{(r,1)}), \ldots, (b_1^{(r,l_r)}, \ldots, b_{m_{r,l_r}}^{(r,l_r)})\big)\Big) \in \mathcal{E}_{t_1(n)}^{(n)}$$

が存在して, $a_1, \ldots, a_m, b_1^{(1,1)}, \ldots, b_{m_{r,l_r}}^{(r,l_r)}$ は $H_{t_1(n)}^{(\overline{n-1})} \cup \{a\}$ の相異なる元であり,

$$F^{(\overline{n-1})} \neq \varnothing \Longrightarrow \#(F^{(\overline{n-1})} \setminus F^{(\overline{n-h(n)-1})}) = m,$$
$$\mathcal{F}_{t_1(n)}^{(n)}(\boldsymbol{a}) > c, \quad ({}^\forall c \in V^{(\overline{n-1})})$$

が成り立ち, $H_{t_1(n)}^{(n)} = (H_{t_1(n)}^{(\overline{n-1})} \cup \{a\}) \setminus \{a_1, \ldots, a_m, b_1^{(1,1)}, \ldots, b_{m_{r,l_r}}^{(r,l_r)}\}$, $F^{(n)} = F^{(\overline{n-1})} \cup \{a_1, \ldots, a_m\}$. $F^{(\overline{n-1})}$ の最大元 $< a_1 < \cdots < a_m$ と $F^{(n)}$ に全順序を入れる.

$$PF^{(n)} = \Big\{\Big(\big((b_1^{(1,1)}, \ldots, b_{m_{1,1}}^{(1,1)}), \ldots, (b_1^{(1,l_1)}, \ldots, b_{m_{1,l_1}}^{(1,l_1)})\big), \ldots, \big((b_1^{(r,1)}, \ldots, b_{m_{r,1}}^{(r,1)}), \ldots, (b_1^{(r,l_r)}, \ldots, b_{m_{r,l_r}}^{(r,l_r)})\big)\Big)\Big\}.$$

2.15.5 革命時, 山札からカードを引かないで場にカードを出す

$D^{(n)} = D^{(\overline{n-1})}$. $t_2(n) = -1$ であり, 或る $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_m) \in \mathcal{C}_x^{(n)} \cup J$ が存在して, $a_1, \ldots, a_m$ は $H_{t_1(n)}^{(\overline{n-1})}$ の相異なる元であり,

$$F^{(\overline{n-1})} \neq \varnothing \Longrightarrow \#(F^{(\overline{n-1})} \setminus F^{(\overline{n-h(n)-1})}) = m,$$
$$\mathcal{F}_{t_1(n)}^{(n)}(\boldsymbol{a}) < c, \quad ({}^{\forall}c \in V^{(\overline{n-1})})$$

が成り立ち, $H_{t_1(n)}^{(n)} = H_{t_1(n)}^{(\overline{n-1})} \setminus \{a_1, \ldots, a_m\}$, $F^{(n)} = F^{(\overline{n-1})} \cup \{a_1, \ldots, a_m\}$. $F^{(\overline{n-1})}$ の最大元 $< a_1 < \cdots < a_m$ と $F^{(n)}$ に全順序を入れる. $PF^{(n)} = \varnothing$.

2.15.6 革命時, 山札からカードを引いて場にカードを出す

$D^{(n)} = D^{(\overline{n-1})} \setminus \{a\}$. $t_2(n) = -1$ であり, 或る $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_m) \in \mathcal{C}_x^{(n)} \cup J$ が存在して, $a_1, \ldots, a_m$ は $H_{t_1(n)}^{(\overline{n-1})} \cup \{a\}$ の相異なる元であり,

$$F^{(\overline{n-1})} \neq \varnothing \Longrightarrow \#(F^{(\overline{n-1})} \setminus F^{(\overline{n-h(n)-1})}) = m,$$
$$\mathcal{F}_{t_1(n)}^{(n)}(\boldsymbol{a}) < c, \quad ({}^{\forall}c \in V^{(\overline{n-1})})$$

が成り立ち, $H_{t_1(n)}^{(n)} = (H_{t_1(n)}^{(\overline{n-1})} \cup \{a\}) \setminus \{a_1, \ldots, a_m\}$, $F^{(n)} = F^{(\overline{n-1})} \cup \{a_1, \ldots, a_m\}$. $F^{(\overline{n-1})}$ の最大元 $< a_1 < \cdots < a_m$ と $F^{(n)}$ に全順序を入れる. $PF^{(n)} = \varnothing$.

2.15.7 革命時, 山札からカードを引かないで場および素因数場にカードを出す

$D^{(n)} = D^{(\overline{n-1})}$. $t_2(n) = -1$ であり, 或る $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_m) \in \mathcal{C}_x^{(n)} \cup J$ および

$$\Big(\Big((b_1^{(1,1)}, \ldots, b_{m_{1,1}}^{(1,1)}), \ldots, (b_1^{(1,l_1)}, \ldots, b_{m_{1,l_1}}^{(1,l_1)})\Big), \ldots, \Big((b_1^{(r,1)}, \ldots, b_{m_{r,1}}^{(r,1)}), \ldots, (b_1^{(r,l_r)}, \ldots, b_{m_{r,l_r}}^{(r,l_r)})\Big)\Big) \in \mathcal{E}_{t_1(n)}^{(n)}$$

が存在して, $a_1, \ldots, a_m, b_1^{(1,1)}, \ldots, b_{m_{r,l_r}}^{(r,l_r)}$ は $H_{t_1(n)}^{(\overline{n-1})}$ の相異なる元であり,

$$F^{(\overline{n-1})} \neq \varnothing \Longrightarrow \#(F^{(\overline{n-1})} \setminus F^{(\overline{n-h(n)-1})}) = m,$$
$$\mathcal{F}_{t_1(n)}^{(n)}(\boldsymbol{a}) < c, \quad ({}^{\forall}c \in V^{(\overline{n-1})})$$

が成り立ち, $H_{t_1(n)}^{(n)} = H_{t_1(n)}^{(\overline{n-1})} \setminus \{a_1, \ldots, a_m, b_1^{(1,1)}, \ldots, b_{m_{r,l_r}}^{(r,l_r)}\}$, $F^{(n)} = F^{(\overline{n-1})} \cup \{a_1, \ldots, a_m\}$. $F^{(\overline{n-1})}$ の最大元 $< a_1 < \cdots < a_m$ と $F^{(n)}$ に全順序を入れる.

$$PF^{(n)} = \Big\{\Big(\Big((b_1^{(1,1)}, \ldots, b_{m_{1,1}}^{(1,1)}), \ldots, (b_1^{(1,l_1)}, \ldots, b_{m_{1,l_1}}^{(1,l_1)})\Big), \ldots, \Big((b_1^{(r,1)}, \ldots, b_{m_{r,1}}^{(r,1)}), \ldots, (b_1^{(r,l_r)}, \ldots, b_{m_{r,l_r}}^{(r,l_r)})\Big)\Big)\Big\}.$$

2.15.8 革命時, 山札からカードを引いて場および素因数場にカードを出す

$D^{(n)} = D^{(\overline{n-1})} \setminus \{a\}$. $t_2(n) = -1$ であり, 或る $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_m) \in \mathcal{C}_x^{(n)} \cup J$ および

$$\Big(\Big((b_1^{(1,1)}, \ldots, b_{m_{1,1}}^{(1,1)}), \ldots, (b_1^{(1,l_1)}, \ldots, b_{m_{1,l_1}}^{(1,l_1)})\Big), \ldots, \Big((b_1^{(r,1)}, \ldots, b_{m_{r,1}}^{(r,1)}), \ldots, (b_1^{(r,l_r)}, \ldots, b_{m_{r,l_r}}^{(r,l_r)})\Big)\Big) \in \mathcal{E}_{t_1(n)}^{(n)}$$

が存在して, $a_1, \ldots, a_m, b_1^{(1,1)}, \ldots, b_{m_{r,l_r}}^{(r,l_r)}$ は $H_{t_1(n)}^{(\overline{n-1})} \cup \{a\}$ の相異なる元であり,

$$F^{(\overline{n-1})} \neq \varnothing \Longrightarrow \#(F^{(\overline{n-1})} \setminus F^{(\overline{n-h(n)-1})}) = m,$$
$$\mathcal{F}_{t_1(n)}^{(n)}(\boldsymbol{a}) < c, \quad ({}^{\forall}c \in V^{(\overline{n-1})})$$

が成り立ち, $H_{t_1(n)}^{(n)} = (H_{t_1(n)}^{(\overline{n-1})} \cup \{a\}) \setminus \{a_1, \ldots, a_m, b_1^{(1,1)}, \ldots, b_{m_{r,l_r}}^{(r,l_r)}\}$, $F^{(n)} = F^{(\overline{n-1})} \cup \{a_1, \ldots, a_m\}$. $F^{(\overline{n-1})}$ の最大元 $< a_1 < \cdots < a_m$ と $F^{(n)}$ に全順序を入れる.

$$PF^{(n)} = \Big\{\Big(\Big((b_1^{(1,1)}, \ldots, b_{m_{1,1}}^{(1,1)}), \ldots, (b_1^{(1,l_1)}, \ldots, b_{m_{1,l_1}}^{(1,l_1)})\Big), \ldots, \Big((b_1^{(r,1)}, \ldots, b_{m_{r,1}}^{(r,1)}), \ldots, (b_1^{(r,l_r)}, \ldots, b_{m_{r,l_r}}^{(r,l_r)})\Big)\Big)\Big\}.$$

2.15.9 山札からカードを引かないでパスする

$D^{(n)} = D^{(\overline{n-1})}, H_{t_1(n)}^{(n)} = H_{t_1(n)}^{(\overline{n-1})}, F^{(n)} = F^{(\overline{n-1})}, PF^{(n)} = \varnothing.$

2.15.10 山札からカードを引いてパスする

$D^{(n)} = D^{(\overline{n-1})} \setminus \{a\}, H_{t_1(n)}^{(n)} = H_{t_1(n)}^{(\overline{n-1})} \cup \{a\}, F^{(n)} = F^{(\overline{n-1})}, PF^{(n)} = \varnothing.$

2.16 手番でないプレイヤー

$x \neq t_1(n)$ に対して $H_x^{(n)} = H_x^{(\overline{n-1})}$.

2.17 素数判定員による判定とペナルティ

2.17.1 (2.15.1), (2.15.2), (2.15.5), (2.15.6) であり, $\mathcal{F}_{t_1(n)}^{(n)}(\boldsymbol{a})$ が素数の場合

$H_x^{(\overline{n})} = H_x^{(n)}$ $({}^\forall x \in P)$, $D^{(\overline{n})} = D^{(n)}$, $F^{(\overline{n})} = F^{(n)}$, $V^{(\overline{n})} = V^{(\overline{n-1})} \cup \{\mathcal{F}_{t_1(n)}^{(n)}(\boldsymbol{a})\}$, $t(n+1) = (s(t_1(n)), t_2(n))$.

2.17.2 (2.15.1), (2.15.2), (2.15.5), (2.15.6) であり, $\mathcal{F}_{t_1(n)}^{(n)}(\boldsymbol{a})$ が 57 または $\pm\infty$ の場合

$H_x^{(\overline{n})} = H_x^{(n)}$ $({}^\forall x \in P)$, $D^{(\overline{n})} = D^{(n)} \cup F^{(n)}$. $D^{(n)}$ の最大元 $<$ $F^{(n)}$ の最小元となるように $D^{(\overline{n})}$ に全順序を入れる. $F^{(\overline{n})} = \varnothing$, $V^{(\overline{n})} = \varnothing$. $t(n+1) = t(n)$.

2.17.3 (2.15.1), (2.15.2), (2.15.5), (2.15.6) であり, $\mathcal{F}_{t_1(n)}^{(n)}(\boldsymbol{a}) = 1729$ の場合

$H_x^{(\overline{n})} = H_x^{(n)}$ $({}^\forall x \in P)$, $D^{(\overline{n})} = D^{(n)}$, $F^{(\overline{n})} = F^{(n)}$, $V^{(\overline{n})} = \{1729\}$, $t(n+1) = (s(t_1(n)), -t_2(n))$.

2.17.4 (2.15.1), (2.15.2), (2.15.5), (2.15.6) であり, $\mathcal{F}_{t_1(n)}^{(n)}(\boldsymbol{a})$ が素数, $57, 1729$, $\pm\infty$ 以外の場合

2.17.4.1 $\#D^{(n)} \geq m$ かつ「$F^{(\overline{n-N+1})} = \cdots = F^{(\overline{n-1})}$ でない」場合

小さい方から数えて最初の m 個の $D^{(n)}$ の元を $d_1, \ldots, d_m$ とする. $H_x^{(\overline{n})} = H_x^{(n)}$ $({}^\forall x \in P, x \neq t_1(n))$, $H_{t_1(n)}^{(\overline{n})} = H_{t_1(n)}^{(\overline{n-1})} \cup \{d_1, \ldots, d_m\}$. $D^{(\overline{n})} = D^{(n)} \setminus \{d_1, \ldots, d_m\}$, $F^{(\overline{n})} = F^{(\overline{n-1})}$, $V^{(\overline{n})} = V^{(\overline{n-1})}$. $t(n+1) = (s(t_1(n)), t_2(n))$.

2.17.4.2 $\#D^{(n)} \geq m$ かつ $F^{(\overline{n-N+1})} = \cdots = F^{(\overline{n-1})}$ の場合

小さい方から数えて最初の m 個の $D^{(n)}$ の元を $d_1, \ldots, d_m$ とする. $H_x^{(\overline{n})} = H_x^{(n)}$ $({}^\forall x \in P, x \neq t_1(n))$, $H_{t_1(n)}^{(\overline{n})} = H_{t_1(n)}^{(\overline{n-1})} \cup \{d_1, \ldots, d_m\}$. $D^{(\overline{n})} = (D^{(n)} \setminus \{d_1, \ldots, d_m\}) \cup F^{(\overline{n-1})}$. $D^{(n)}$ の最大元 $<$ $F^{(\overline{n-1})}$ の最小元となるように $D^{(\overline{n})}$ に全順序を入れる. $F^{(\overline{n})} = \varnothing$, $V^{(\overline{n})} = \varnothing$. $t(n+1) = (s(t_1(n)), t_2(n))$.

2.17.4.3 $\#D^{(n)} < m$ かつ「$F^{(\overline{n-N+1})} = \cdots = F^{(\overline{n-1})}$ でない」場合

$x \in P, x \neq t_1(n)$ に対して或る相異なる $c_1^{(x)}, \ldots, c_{m_x}^{(x)} \in H_x^{(n)}$ が存在して, $m_x = \min\{\#H_x^{(n)}, m - \#D^{(n)}\}$, $H_x^{(\overline{n})} = H_x^{(n)} \setminus \{c_1^{(x)}, \ldots, c_{m_x}^{(x)}\}$ が成り立つ. $H_{t_1(n)}^{(\overline{n})} = H_{t_1(n)}^{(\overline{n-1})} \cup D^{(n)}$. $D^{(\overline{n})} = \bigcup_{x \in P,\ x \neq t_1(n)} \{c_1^{(x)}, \ldots, c_{m_x}^{(x)}\}$. $D^{(\overline{n})}$ には $1 \leq i < j \leq m_x$ ならば $c_i^{(x)} < c_j^{(x)}$, $1 \leq k < l \leq N-1$ ならば $c_{m_{s^k(t_1(n))}}^{(s^k(t_1(n)))} < c_1^{(s^l(t_1(n)))}$ が成り立つように全順序を入れる[2]. $F^{(\overline{n})} = F^{(\overline{n-1})}$, $V^{(\overline{n})} = V^{(\overline{n-1})}$, $t(n+1) = (s(t_1(n)), t_2(n))$.

2.17.4.4 $\#D^{(n)} < m$ かつ $F^{(\overline{n-N+1})} = \cdots = F^{(\overline{n-1})}$ の場合

[2] $m_{s^k(t_1(n))}$ または $m_{s^l(t_1(n))}$ が 0 の場合は自明に成立すると考える.

$x \in P, x \neq t_1(n)$ に対して或る相異なる $c_1^{(x)}, \ldots, c_{m_x}^{(x)} \in H_x^{(n)}$ が存在して, $m_x = \min\{\#H_x^{(n)}, m-\#D^{(n)}\}$, $H_x^{(\overline{n})} = H_x^{(n)} \setminus \{c_1^{(x)}, \ldots, c_{m_x}^{(x)}\}$ が成り立つ. $H_{t_1(n)}^{(\overline{n})} = H_{t_1(n)}^{(\overline{n-1})} \cup D^{(n)}$. $D^{(\overline{n})} = \bigcup_{x \in P,\ x \neq t_1(n)} \{c_1^{(x)}, \ldots, c_{m_x}^{(x)}\} \cup F^{(\overline{n-1})}$. $D^{(\overline{n})}$ には $1 \leq i < j \leq m_x$ ならば $c_i^{(x)} < c_j^{(x)}$, $1 \leq k < l \leq N-1$ ならば $c_{m_{s^k(t_1(n))}}^{(s^k(t_1(n)))} < c_1^{(s^l(t_1(n)))}$, $c_i^{(x)}$ の最大元 $<$ $F^{(\overline{n-1})}$ の最小元が成り立つように全順序を入れる. $F^{(\overline{n})} = \varnothing$, $V^{(\overline{n})} = \varnothing$, $t(n+1) = (s(t_1(n)), t_2(n))$.

2.17.5 (2.15.3), (2.15.4), (2.15.7), (2.15.8) の場合

2.17.5.1 $\mathcal{F}_{t_1(n)}^{(n)}(\boldsymbol{a})$ が合成数であり, 任意の $1 \leq i \leq r$ に対して $\mathcal{G}_{t_1(n)}^{(n)}(b_1^{(i,1)}, \ldots, b_{m_{i,1}}^{(i,1)})$ が素数であり,

$$\mathcal{F}_{t_1(n)}^{(n)}(\boldsymbol{a}) = \prod_{i=1}^{r} \mathcal{G}_{t_1(n)}^{(n)}(b_1^{(i,1)}, \ldots, b_{m_{i,1}}^{(i,1)})^{\mathcal{G}_{t_1(n)}^{(n)}(b_1^{(i,2)}, \ldots, b_{m_{i,2}}^{(i,2)})^{\cdots \mathcal{G}_{t_1(n)}^{(n)}(b_1^{(i,l_i)}, \ldots, b_{m_{i,l_i}}^{(i,l_i)})}}$$

が成り立つとき

$H_x^{(\overline{n})} = H_x^{(n)}$ ($^\forall x \in P$), $D^{(\overline{n})} = D^{(n)} \cup \{b_1^{(1,1)}, \ldots, b_{m_r,l_r}^{(r,l_r)}\}$. $D^{(n)}$ の最大元 $< b_1^{(1,1)}$, $1 \leq j < k \leq m_{i,s}$ ならば $b_j^{(i,s)} < b_k^{(i,s)}$, $1 \leq s \leq l_i - 1$ ならば $b_{m_{i,s}}^{(i,s)} < b_1^{(i,s+1)}$, $1 \leq i \leq r-1$ ならば $b_{m_{i,l_i}}^{(i,l_i)} < b_1^{(i+1,1)}$ が成り立つように $D^{(\overline{n})}$ に全順序を入れる. $F^{(\overline{n})} = F^{(n)}$, $V^{(\overline{n})} = V^{(\overline{n-1})} \cup \{\mathcal{F}_{t_1(n)}^{(n)}(\boldsymbol{a})\}$, $t(n+1) = (s(t_1(n)), t_2(n))$.

2.17.5.2 そうでないとき

(2.17.4) と同じ. ただし, m を $m + \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{l_i} m_{i,j}$ に置き換える.

2.17.6 (2.15.9), (2.15.10) の場合

2.17.6.1 $F^{(\overline{n-N+1})} = \cdots = F^{(\overline{n-1})}$ でない場合

$H_x^{(\overline{n})} = H_x^{(n)}$ ($^\forall x \in P$), $D^{(\overline{n})} = D^{(n)}$, $F^{(\overline{n})} = F^{(n)}$, $V^{(\overline{n})} = V^{(\overline{n-1})}$, $t(n+1) = (s(t_1(n)), t_2(n))$.

2.17.6.2 $F^{(\overline{n-N+1})} = \cdots = F^{(\overline{n-1})}$ の場合

$H_x^{(\overline{n})} = H_x^{(n)}$ ($^\forall x \in P$), $D^{(\overline{n})} = D^{(n)} \cup F^{(\overline{n-1})}$. $D^{(\overline{n})}$ に $D^{(n)}$ の最大元 $<$ $F^{(\overline{n-1})}$ の最小元となるような全順序を入れる. $F^{(\overline{n})} = \varnothing$, $V^{(\overline{n})} = \varnothing$, $t(n+1) = (s(t_1(n)), t_2(n))$.

2.18 素数大富豪の定義

定義 2.1. **素数大富豪のゲーム**とは, (2.1) から (2.17.6.2) までの全条件を満たすような組

$$(T, P, b, \{\{H_x^{(n)}\}_{x \in P}, D^{(n)}, F^{(n)}, PF^{(n)}\}_{n>0}, \{\{H_x^{(\overline{n})}\}_{x \in P}, D^{(\overline{n})}, F^{(\overline{n})}, V^{(\overline{n})}\}_{n \geq 0}, t, \{f_x^n\}_{n>0, x \in P})$$

の同値類のことをいう. ここで, 二つの組

$$(T_1, P_1, b_1, \{\{H_{x,1}^{(n)}\}_{x \in P_1}, D_1^{(n)}, F_1^{(n)}, PF_1^{(n)}\}_{n>0}, \{\{H_{x,1}^{(\overline{n})}\}_{x \in P}, D_1^{(\overline{n})}, F_1^{(\overline{n})}, V_1^{(\overline{n})}\}_{n \geq 0}, t_1, \{f_{x,1}^n\}_{n>0, x \in P})$$
$$(T_2, P_2, b_2, \{\{H_{x,2}^{(n)}\}_{x \in P_2}, D_2^{(n)}, F_2^{(n)}, PF_2^{(n)}\}_{n>0}, \{\{H_{x,2}^{(\overline{n})}\}_{x \in P}, D_2^{(\overline{n})}, F_2^{(\overline{n})}, V_2^{(\overline{n})}\}_{n \geq 0}, t_2, \{f_{x,2}^n\}_{n>0, x \in P})$$

が同値であるとは, $P_1 = P_2$, $b_1 = b_2$, $t_1 = t_2$ であり, T_1 と T_2 が全単射 $f \colon T_1 \to T_2$ によって同値で, $f_{x,1}^{(n)} = f_{x,2}^{(n)} \circ f$ が成り立ち, 残りの対応する集合達が f が自然に誘導する写像によって全単射になるときにいう. 素数大富豪のゲーム全体のなす集合を**抽象的素数大富豪**とよぶ.

補題 2.2. $H_x^{(\overline{n})} = \varnothing$ であれば, $n' > n$ なる任意の n' に対して $H_x^{(\overline{n'})} = \varnothing$ である.

証明. そのように定義されている (2.15). □

定義 2.3. 素数大富豪のゲームが**有限**であるとは, 任意の $x \in P$ に対して, 或る $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ が存在して $H_x^{(\overline{n})} = \varnothing$ であるときにいう.

定義 2.4. 有限な素数大富豪のゲームの $x \in P$ に対して, e_x, s_x を

$$e_x := \min\{n \in \mathbb{Z}_{>0} \mid H_x^{(\overline{n})} = \varnothing\}$$
$$s_x := \min\{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid x = s^k(t_1(e_x))\}$$

とするとき, $\mathrm{rank}(x) \in \{1, 2, \ldots, N\}$ を

$$\mathrm{rank}(x) < \mathrm{rank}(y) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (e_x < e_y) \vee \{(e_x = e_y) \wedge (s_x < s_y)\}$$

によって定義する.

3 最大素数大富豪素数

素数大富豪の**通常 N 人ゲーム**とは, T は $\#T = 54$ であって, $K = 13$, $v^{-1}(\{0\}) = \varnothing$, $\#v^{-1}(\{i\}) = 4$ $(1 \leq i \leq 13)$, $\#v^{-1}(\{\mathrm{Joker}\}) = 2$ であり, $P = \{1, 2, \ldots, N\}, M = \infty, b = 10$ のときにいう (ad hoc).

定理 3.1 (2016)**.** $N \geq 2$ とし, Primes を素数全体のなす集合とする. また, 有限な素数大富豪の通常 N 人ゲーム全体のなす集合を U とする. このとき,

$$\begin{aligned}&\max_U \Big(\sup\{p \in \mathrm{Primes} \mid {}^{\exists} n \geq 0,\ s.t.\ p \in V^{(\overline{n})},\ \mathrm{rank}(t_1(n)) \leq N-1\}\Big)\\ &= 99998888777766665555444433332222131313131313121212121111111011010101111\end{aligned}$$

が成り立つ. ただし, 便宜的に $\sup\varnothing = -\infty$ とする.

証明. この最大値 (左辺) を q とする (存在性は T の有限性から従う). また, 右辺の数を q' とする. 示すべきことは $q = q'$ である. q を実現するようなゲームは, $y, z \in P$ を $\mathrm{rank}(y) = N, \mathrm{rank}(z) = N-1$ として, 或る n_0 が存在して $H_x^{(n_0)} = \varnothing$ $(\mathrm{rank}(x) = 1, 2, \ldots, N-2), \#H_y^{(n_0)} = 1, F^{(n_0)} = \varnothing, H_z^{(\overline{n_0})} = \varnothing, V^{(\overline{n_0})} = \{q\}$ が成り立っていると仮定してよい (素数大富豪のゲームの定義を満たすようにしてこのような状況のゲームに変形できるため). このような n_0 が存在するゲームを **極端なゲーム** とよぶことにする. (2.15) の山札からカードを引くルールによって, 極端なゲームにおいて $H_z^{(n_0)}$ は元の個数が 53 以下であるような任意の T の部分集合を実現することができることに注意する.

極端なゲームであって, $H_y^{(n_0)} = \{A\}$, $v(A) = 1$, $H_z^{(n_0)} = T \setminus \{A\}$, $f_z^{(n_0)}(J_1) = f_z^{(n_0)}(J_2) = 13$ $(J = \{J_1, J_2\})$ であるようなものを**候補ゲーム**とよぶ. このとき, 候補ゲームにおける $\sup\{p \in \mathrm{Primes} \mid {}^{\exists} n \geq 0,\ \mathrm{s.t.}\ p \in V^{(\overline{n})},\ \mathrm{rank}(t_1(n)) \leq N-1\}$ の最大値が q' であることを Peria 氏がコンピュータプログラムを使って証明している[3]($T \setminus \{A\}$ から得られる $V^{(\overline{n_1})}$ の元の探索は比較的容易である). d を桁数を表す関数とするとき, $d(q') = 71$ であることに注意.

q を実現するような極端なゲームを考える. このゲームが候補ゲームであることを示せば証明が完了する. $q' \leq q$ より $d(q) = 71$ かつ $q = \mathcal{F}_z^{(n_0)}(a_1, \ldots, a_{53})$ である $(\{a_1, \ldots, a_{53}\} = T \setminus \{X\}, H_y^{(n_0)} = \{X\})$. もし, $X \in J$ または $f_z^{(n_1)}(J_1) < 10$ または $f_z^{(n_1)}(J_2) < 10$ であれば $d(q) < 71$ となって矛盾する. よって, $X \notin J$ かつ $f_z^{(n_1)}(J_1) \geq 10$ かつ $f_z^{(n_1)}(J_2) \geq 10$ が成立する. $w, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して $d^{(w)}(n) := [n \cdot 10^{w-d(n)}]$ と定める. すると,

$$d^{(32)}(q) = 99998888777766665555444433332222$$

[3]ソースコード: `https://gist.github.com/peria/00e294247aa4226a82f2`, 辻順平氏による追試コード: `https://gist.github.com/junpeitsuji/db6fa47878c39c0429e9`. これらのコードは `mpz_probab_prime_p` を利用しているが, q' が実際に素数であることが他の計算ソフトによって確認できる. cf. `https://www.alpertron.com.ar/ECM.HTM`.

が確定する (そうでなければ, $d^{(1)}(f_z^{(n_1)}(J_1)) = d^{(1)}(f_z^{(n_1)}(J_2)) = 1$ なので $d^{(32)}(q)$ には或る桁に 1 が含まれて $q < q'$ となってしまう). これから, $v(X) \notin \{2,3,4,5,6,7,8,9\}$ が従う. もし, $d(v(X)) = 2$ であれば $d(q) < 71$ となってしまうので, $v(X) = 1$ が確定した. 最後に, もし $f_z^{(n_0)}(J_1) = f_z^{(n_0)}(J_2) = 13$ でなければ,

$$d^{(44)}(q) < 99998888777766665555444433332222131313131313 = d^{(44)}(q')$$

となって, $q < q'$ となってしまう. つまり, $f_z^{(n_0)}(J_1) = f_z^{(n_0)}(J_2) = 13$ であり, 候補ゲームであることが示された. □

謝辞

詳細に読み込んでミスを指摘してくださったカステラ素数王 (素数大富豪のタイトルホルダー) に感謝します.