ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Α΄ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΑΛΓΕΒΡΑ

==

ΘΕΜΑ Α

Α1.

α) Σωστό

β) Λάθος

γ) Σωστό

δ) Σωστό

ε) Λάθος

Α2. Θεωρία -απόδειξη στη σελίδα 14 του σχολικού βιβλίου

==

ΘΕΜΑ Β

Β1.

Για να αποδείξουμε ότι η $(\beta_\nu), \nu \in \mathbb{N}$ είναι γεωμετρική πρόοδος αρκεί να αποδείξουμε ότι το πηλίκο $\frac{\beta_{\nu+1}}{\beta_\nu}$ είναι σταθερό και ο αριθμός αυτός θα αποτελεί το λόγο λ της πρόδου.

$$\frac{\beta_{\nu+1}}{\beta_\nu} = \frac{1+a_{\nu+1}}{1+\alpha_\nu} = \frac{1+1+2a_\nu}{1+\alpha_\nu} = \frac{2+2a_\nu}{1+\alpha_\nu} = \frac{2(1+\alpha_\nu)}{1+\alpha_\nu} = 2$$

$\lambda = 2$

Β2.

Αφού η $(\beta_\nu), \nu \in \mathbb{N}$ είναι γεωμετρική πρόοδος θα είναι $\beta_\nu = \beta_1 \cdot \lambda^{\nu-1}, \beta_1 = 1 + a_1 = 1$

$\beta_\nu = 2^{\nu-1}$

και για την $(\alpha_\nu), \nu \in \mathbb{N}$ θα έχουμε: $\alpha_\nu = \beta_\nu - 1 \Rightarrow \alpha_\nu = 2^{\nu-1} - 1$

==

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

Για την εύρεση του πεδίου ορισμού της συνάρτησης ισχύουν οι παρακάτω περιρισμοί:

- $x \neq 0$
- $|x| - \dfrac{1}{|x|} \neq 0 \Leftrightarrow \dfrac{|x|^2 - 1}{|x|} \neq 0 \Leftrightarrow |x|^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 1, x \neq -1$

  $\Pi.0\, \tau\eta\varsigma\ f = A = \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$

Γ2.

Έχουμε διαδοχικά:

$A = |f(2) - f(4)| + \sqrt{\sqrt{9} + 2 \cdot 3} = |2 - 4| + \sqrt{3 + 6} = 2 + 3 = 5$

Γ3.

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x| - \frac{1}{|x|}} = \frac{x^2 - 1}{\frac{|x|^2 - 1}{|x|}} = \frac{|x| \cdot (x^2 - 1)}{|x|^2 - 1} = \frac{|x| \cdot (x^2 - 1)}{(x^2 - 1)} = |x|,\ x \in A$$

Για τη λύση της εξίσωσης $3 < f(2x - 3) < 5$ θα πρέπει αρχικά αν ισχύουν:

$2x - 3 \neq 0, 2x - 3 \neq 1, 2x - 3 \neq -1$

$x \neq \frac{3}{2}, x \neq 2, x \neq 1$

Τώρα θα έχουμε:

$3 < |2x - 3| < 5 \Leftrightarrow |2x - 3| < 5$ και $|2x - 3| > 3 \Leftrightarrow -5 < 2x - 3 < 5$ και
$2x - 3 > 3$ ή $2x - 3 < -3 \Leftrightarrow -1 < x < 4$ και $x > 3$ ή $x < 0$

Με την συναληθεία των παραπάνω ανισοτήτων έχουμε $x \in (-1, 0) \cup (3, 4)$

(Όλοι οι περιορισμοί που ετέθησαν παραπάνω πληρούνται)

Γ4.

Αρχικά θα πρέπει να ορίζεται η τιμή της συνάρτησης f στο $x + 1$. Έτσι θα πρέπει:

$x + 1 \in A$ (*πεδίο ορισμού της f*) $\Leftrightarrow x + 1 \neq 1, x + 1 \neq -1, x + 1 \neq 0$
$x \neq 0, x \neq -2, x \neq -1$

Τώρα θα έχουμε διαδοχικά:

$f^2(x+1)-5f(x+1)+6=0 \Leftrightarrow |x+1|^2-5|x+1|+6=0$

$\theta\acute{\varepsilon}\tau o \upsilon \mu \varepsilon: |x+1|=\omega>0$ και άρα η εξίσωση γίνεται $\omega^2-5\omega+6=0$ με ρίζες ω=3 ή ω=2

$\acute{\alpha}\rho\alpha\ |x+1|=3 \Leftrightarrow x+1=3$ ή $x+1=-3 \Leftrightarrow x=2$ ή $x=-4$

$|x+1|=2 \Leftrightarrow x+1=2$ ή $x+1=-2 \Leftrightarrow x=1$ ή $x=-3$

και όλες οι λύσεις είναι δεκτές.

==

ΘΕΜΑ Δ

Η διακρίνουσα Δ της δοθείσας εξίσωσης είναι:

$\Delta=(|\lambda-1|-2)^2-4(|2\lambda-2|-4)=(|\lambda-1|-2)^2-8(|\lambda-1|-2)$ και το πλήθος των απλών

ενδεχομένων του δειγματικού χώρου Ω είναι N(Ω)=8

Δ1.
Για να έχει η δοθείσα εξίσωση :

- Δύο πραγματικές και ίσες ρίζες (δηλαδή μία διπλή ρίζα) θα πρέπει Δ=0:
  $\Delta=(|\lambda-1|-2)^2-4(|2\lambda-2|-4)=(|\lambda-1|-2)^2-8(|\lambda-1|-2)$
  $\Delta=0 \Rightarrow (|\lambda-1|-2)^2-8(|\lambda-1|-2)=0 \Rightarrow (|\lambda-1|-2)[(|\lambda-1|-2)-8]=$
  $(|\lambda-1|-2)(|\lambda-1|-10)=0$
  $|\lambda-1|-2=0 \Leftrightarrow |\lambda-1|=2 \Leftrightarrow \lambda-1=2$ ή $\lambda-1=-2 \Leftrightarrow \lambda=3$ ή λ=-1
  $|\lambda-1|-10=0 \Leftrightarrow |\lambda-1|=10 \Leftrightarrow \lambda-1=10$ ή $\lambda-1=-10 \Leftrightarrow$ λ=11 ή λ=-9

Συνεπώς, το ενδεχόμενο Α είναι $A=\{-9,\ 3,\ 11\}$, δηλαδή το πλήθος των ευνοικών περιπτώσεων του Α είναι N(A)=3

Άρα $P(A)=\dfrac{N(A)}{N(\Omega)}=\dfrac{3}{8}$

Δ2.

Για να έχει η δοθείσα εξίσωση :

- Δύο πραγματικές και άνισες ρίζες θα πρέπει:

  $\Delta>0 \Rightarrow (|\lambda-1|-2)^2-8(|\lambda-1|-2)>0$
  $\omega=|\lambda-1|-2$
  $\omega^2-8\omega>0$
  Αν ω<0 ή ω>8 τότε Δ>0
  $|\lambda-1|-2<0 \Leftrightarrow |\lambda-1|<2 \Leftrightarrow -2<\lambda-1<2 \Leftrightarrow -1<\lambda<3$
  $|\lambda-1|-2>8 \Leftrightarrow |\lambda-1|>10 \Leftrightarrow \lambda-1>10$ ή $\lambda-1<-10 \Leftrightarrow \lambda>11$ ή λ<-9

Συνεπώς, το ενδεχόμενο Β είναι Β=$\left\{-10, 0, \frac{1}{2}\right\}$, δηλαδή το πλήθος των ευνοικών περιπτώσεων του Β είναι Ν(Β)=3

Άρα $P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{3}{8}$

Δ3.

<u>1ος τρόπος</u>

Μπορούμε να βρούμε την πιθανότητα με την ίδια διαδικασία που ακολουθήσαμε στα προηγούμενα ερωτήματα, αφού το Γ ικανοποιείται όταν:

$\Delta < 0 \Leftrightarrow 0 < |\lambda - 1| - 2 < 8 \Leftrightarrow |\lambda - 1| < 10$ και $|\lambda - 1| > 2$

$(-9 < \lambda < 11)$ και (λ>3 ή λ<-1)

-9<λ<-1 ή 3<λ<11

Άρα το ενδεχόμενο Γ είναι Γ=$\left\{-3, \frac{10}{3}\right\}$ δηλαδή το πλήθος των ευνοικών περιπτώσεων του Γ είναι Ν(Γ)=2 και έτσι $P(\Gamma) = \frac{\mathrm{N}(\Gamma)}{\mathrm{N}(\Omega)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

2ος τρόπος (θα πρέπει όμως να είναι $A \cup B \cup \Gamma = \Omega$ που εδώ συμβαίνει)

Είναι $\Gamma = (A \cup B)'$ και άρα

$P(\Gamma) = P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B)) = 1 - \frac{6}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ (αφού τα ενδεχόμενα Α,Β είναι ασυμβίβαστα μεταξύ τους)

==

Επιμέλεια λύσεων:

Καραγιάννης Ιωάννης

Σχολικός Σύμβουλος