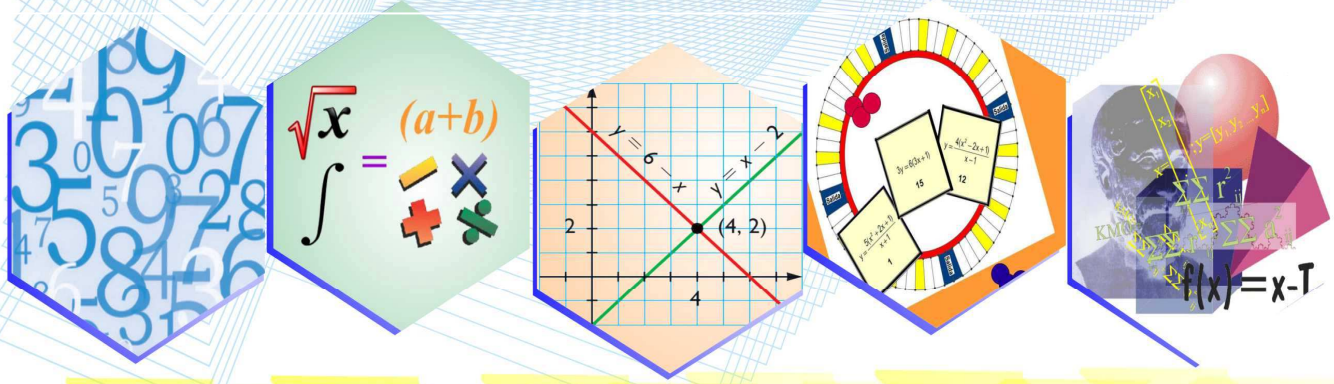
REPÚBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA
MINISTERIO DEL PODER POPULAR PARA LA DEFENSA
UNIVERSIDAD NACIONAL EXPERIMENTAL POLITÉCNICA
DE LA FUERZA ARMADA NACIONAL BOLIVARIANA
VICERRECTORADO ACADÉMICO
DIRECCIÓN DE TECNOLOGÍA EDUCATIVA

EVAp
Entornos Virtuales de Apoyo

Lecturas de apoyo didáctico de la unidad curricular:

Matemática

Unidad 1: Expresiones Algebraicas



Excelencia Educativa
Abierta al Pueblo

Av. La Estancia con Av. Caracas y Calle Holanda frente al Edificio Banaven(Cubo Negro)
Chuao - Municipio Chacao - Edo. Miranda - Venezuela - Codigo Postal 1061
http://www.unefa.edu.ve

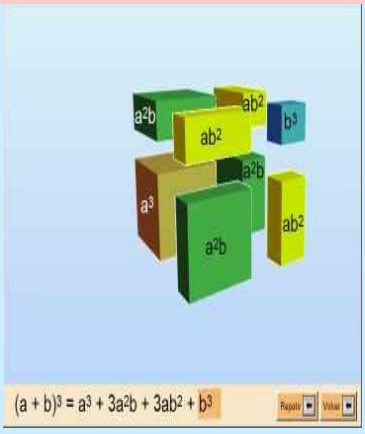
Programa de Apoyo Didáctico

Matemática
Unidad 1
Expresiones
Algebraicas

Unidad 1: EXPRESIONES ALGEBRAICAS

1.1 Expresiones Algebraicas	6
1.2 Términos semejantes	7
1.3 Tipos de Expresiones Algebraicas:	7
• Enteras y Polinómicas.	7
• Racionales	8
• Radicales	9
• Combinadas	9
1.4 Operaciones con Expresiones Algebraicas	9
• Adición de Polinomios	10
• Sustracción de Polinomios	11
• Multiplicación de Polinomios	11
• División de Polinomios	14
1.5 Productos Notables	15
1.6 Factorización	19
	26

MOTIVACIÓN



Para conocer cuántos años tengo, escucha: Al doble de mi edad le quitas el triple de la edad que tenía hace 40 años. ¿Qué edad tengo?

¿Para qué las expresiones algebraicas?

Ahora, ¿cómo ayudar a calcular la edad del anciano?

Justificación

El programa de Repaso Matemático es de suma importancia para el aprendizaje; el mismo va a contribuir a mejorar su proceso de formación y lograr así, una educación adecuada a sus intereses y necesidades. Está concebido como un proceso dinámico que no es un fin en sí mismo, sino un eslabón que les permitirá alcanzar nuevas metas en el marco integral del desarrollo de una experiencia educativa novedosa.

Asimismo, este programa tiene como norte el afianzamiento, desarrollo de conocimientos y habilidades en el área de matemática, las cuales serán reforzadas en la búsqueda de la excelencia académica.

Veamos cuantas frases componen esa expresión:

- El doble de mi edad. Si la edad la representamos por X, el doble sería 2X
- Le quitas. Esto nos indica que debemos restarle -
- El triple. sería 3 por
- La edad que tenía hace 40 años. Si la edad actual es X entonces la edad hace cuarenta años es quitarle a la actual, cuarenta. X - 40
- Obtendrás mi edad actual. Eso es igual al valor de X.

Finalmente:

El doble de mi edad	*Le quitas*	*El triple*	*La edad que tenía hace 40 años*	*Obtendrás mi edad actual*
2 por X	*menos*	*3 por*	*X menos 40*	*Igual a X*

$2X - 3(X - 40) = X$

$2X - 3X + 120 = X$ Por aplicación de la distributiva

$$3\,(X - 40) = 3X - 3 \cdot 40$$

$-X + 120 = X$ Como $2X - 3X = -X$

$120 = X + X$ Pasamos $-X$ al otro extremo (pasa positivo)

120 = 2X Hacemos X + X = 2X

X = 120/2 Pasamos el 2 que está multiplicando a dividir

entonces X = 60 que es la edad del anciano

Objetivo

Aplicar las operaciones matemáticas que se presentan entre expresiones algebraicas en los números reales.

Para el logro de este objetivo se contemplan los siguientes temas:

Contenido

Números Reales y Expresiones Algebraicas

- El conjunto de los Números Reales.
- Terminología.
- Tipos de expresiones algebraicas.
- Operaciones con expresiones algebraicas.
- Productos Notables-
- Factorización.

Instrucciones

Queremos facilitarle la mayor comprensión de los contenidos tratados, para ello te recomendamos lo siguiente:

- Familiarízate con toda la información que se te presenta en esta página y no ignore ningún aspecto.
- Tenga claro lo que se aspira lograr con cada tema y los conocimientos previos que el mismo exige.
- Realiza la lectura del tema presentado y analiza cada paso cumplido para solucionar los ejercicios. No continúes al paso siguiente si no has comprendido el previo. Para esto tienes varias opciones de ayuda.
- Descarga la lectura que complementa el tema y léela con carácter analítico.
- Resuelve nuevamente cada ejemplo por tu cuenta y compara los resultados.
- A medida que estés resolviendo los ejemplos, analiza el procedimiento aplicado en cada paso.
- Sigue los procedimientos sugeridos en los ejemplos presentados.
- Intercambia ideas, procedimientos y soluciones con otros estudiantes.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Prerrequisitos

Números Enteros:

- Operaciones (adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación)
- Suma algebraica.
- Ley de los signos.

Números Racionales:

- Adición con igual y diferente denominador.
- Multiplicación.
- Divisón.

Comprobación

Una expresión algebraica puede venir dada de la siguiente forma:

$$\frac{-x\left[\left(x\cdot 3x^2\right)^2-9\right]}{3x^2}$$

Para resolver una expresión de este tipo debemos dominar:

1) Leyes de la potenciación, observamos que existen tres casos en este ejercicio:
   - $(x\cdot 3x^2)^2$ En este caso debemos aplicar potencia de un producto.
   - $(x)^2(3x^2)^2$ Ahora necesitamos aplicar potencia de una potencia.
   - También nos queda un producto de potencias de igual base y a la vez aplicamos la propiedad asociativa de la multiplicación: $x^2\cdot 9x^4$
2) Por otra parte debemos saber aplicar la propiedad distributiva entre: $x(9x^6-9)$
3) Finalmente es necesario conocer los racionales para resolver el cociente:

$$\frac{9x^7-9x}{3x^2}$$

con el que podemos simplificar parte de las x

Instrucciones

Verifique el dominio de los prerrequisitos.

Imprima esta página y resuelve cada uno de los siguientes planteamientos, luego marca una de las opciones según la consideres correcta.

Lleva control en tu cuaderno sobre los resultados de cada ejercicio.

Verifica las respuestas en la página 26

VERIFICACIÓN

Cuál es el resultado al calcular:

1) $-8+3$

a) 11 b) -5 c) -11 d) 11

2) $-2-5$

a) -7 b) 7 c) 3 d) -3

3) $8 \cdot (-3)$

a) 24 b) -24 c) 5 d) -5

4) $(-4)\cdot(-7)$

a) 11 b) -28 c) -3 d) 28

5) 2^3

a) 6 b) 9 c) 8 d) 5

6) -8^2

a) 16 b) -16 c) 64 d) -64

7) -4^3

a) 64 b) -64 c) -12 d) 12

8) $5^3 \cdot 5^4$

a) 5^1 b) 5^7 c) 5^{12} d) 5^5

9) $(x \cdot y)^3$

a) x^3y^3 b) $3xy$ c) x^3y d) xy^3

10) $(x^3)^5$

a) $15x$ b) X^8 c) X^{15} d) X^2

11) —

a) Y^3 b) Y^7 c) Y^{10} d) Y^{17}

12) – –

a) $\frac{6}{7}$ b) $\frac{6}{14}$

13) – –

a) $\frac{4}{0}$ b) $\frac{4}{18}$ c) $\frac{9}{45}$ d) $\frac{4}{9}$

14) – –

a) $\frac{14}{12}$ b) $\frac{13}{12}$ c) $\frac{21}{4}$ d) $\frac{5}{1}$

15) – –

a) $\frac{6}{5}$ b) $\frac{4}{7}$ c) $\frac{3}{10}$ d) $\frac{11}{10}$

16) $3x(1+2x)$

a) $4x + 5x$ b) $3 + 2x^2$ c) $3x + 6x^2$ d) $9x^2$

DESARROLLO

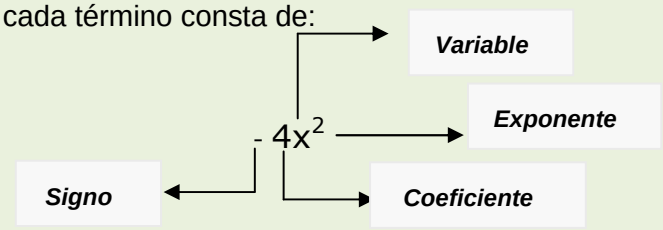
Expresiones Algebraicas

Concepto:
Es la combinación de constantes, variables y signos de operación que, entre otras cosas, pueden definir una regla o principio general.
Un ejemplo de expresión algebraica es:

$$-4x^2 + x - 6$$

Está compuesta por términos

y cada término consta de:



- **Variable de un término:** es aquella (letra) sobre la cual se define el término o expresión algebraica e indica que su valor va variando.
- **Exponente**: Es el número que se encuentra en la parte superior derecha de la variable.
- **Signo**: Es el que precede al término, puede ser positivo (+) o negativo (-), si éste no aparece, el signo del término es positivo.
- **Coeficiente**: Es el factor que acompaña a la parte variable, y su valor no cambia, es constante.

Términos semejantes

Son términos cuya parte variable son iguales y además tienen el mismo exponente. Observa los siguientes ejemplos:

a) $3x^2$, $5x^2$, $1/2x^2$, $-4x^2$

Son términos semejantes ya que todos contienen x^2

b) $3xy$, $2xy$, $-(3/4)xy$

Son términos semejantes ya que todos contienen xy

c) x^2 y , $3xy^2$

No son términos semejantes ya que $x^2y \neq xy^2$

d) $\frac{4x^2y}{X+y}$ $\frac{3x^2y}{X+y}$

Son términos semejantes ya que todos contienen $\frac{x^2y}{x+y}$

d) $a\sqrt{3x+9}$, $5\sqrt{3x+9}$

Son términos semejantes ya que todos contienen $\sqrt{3x+9}$

Es de suma importancia reconocer términos semejantes cuando se quiere reducir una expresión algebraica, ya que estos pueden sumarse (o restarse) y, por consiguiente reducirla. Si dos o más términos no son semejantes, éstos **no pueden** sumarse ni restarse. También es de utilidad para calcular el mínimo común denominador entre expresiones racionales.

Ejemplo 1: Reducir la expresión algebraica

$P(x) = x^2 - 2x^2 + 5x^2$

$P(x) = (1 - 2 + 5) x^2$

$P(x) = 4x^2$

Observe que los términos son semejantes ya que todos contienen x^2,

El primer término (x^2) *tiene como coeficiente* $+1$, *el coeficiente del segundo término es* -2 *y el del tercero es* $+5$. *Se agrupan estos sacando como factor común la variable* x^2

El resultado de la suma de los coeficientes $(1 - 2 + 5)$ es *4.*

Ejemplo 2: Reducir la expresión algebraica.

$P(x) = 5x^2 - xy + 2xy - 3x^2$

$= (5x - 3x) + (-xy + 2xy)$

$= (5 - 3)x + (-1 + 2)xy$

$= 2x^2 + xy$

Observe que contiene dos grupos de términos semejantes, uno con xy y otro con x^2**.**
Agrupamos los términos que contienen x^2 y aparte los que contienen xy**.**

Agrupamos los coeficientes de los términos semejantes y los sumamos para obtener dos términos como resultado.

Tipos de Expresiones Algebraicas: ENTERAS O POLINÓMICAS

Se definen como toda expresión algebraica en donde las potencias son números enteros positivos.

Ejemplo: $3x^2 + 5y^3,\ 4x^2y,\ \frac{2}{3}(z+x)^3b$

Las expresiones algebraicas enteras se clasifican en:

Monomios, cuando consta de un solo término, por ejemplo: $3x^2,\quad \frac{2}{3}a^2b$

Polinomio, cuando consta de más de un término, como:

$\boldsymbol{x - 4}$ **T**ambién se llama binomio por tener dos términos.

$\boldsymbol{x^2 - 2x + 1}$ **T**ambién se llama trinomio por tener tres términos.

Características de los Polinomios

$P(x) = x^5 - 5x^4 + 3x^3 + x^2 - x + 6$ $P(x)$ es de grado 5.

En $P(x)$ el término independiente es 6.

Los términos dependientes de $P(x)$ son $x^5, -5x^4, 3x^3, x^2, -x$

Así, el polinomio: $P(x)$ = es completo con respecto a su variable x, porque contiene todos los exponentes sucesivos desde el más alto (5), hasta el más bajo (0), ($6 = 6x^0$).

1- Todo polinomio es una expresión algebraica.

2- El **Grado** de un Polinomio, se define como el *mayor exponente* que tiene la variable.

3- Los **términos** de un polinomio se clasifican en:

Término Independiente**,** es aquel que no está acompañado de la variable.

Término Dependientes, son aquellos que están acompañados de la variable.

Un **Polinomio Completo**, es aquel que con relación a la variable contiene todos los exponentes sucesivos, desde el más alto hasta el más bajo o viceversa.

4- Polinomio **ordenado,** cuando los exponentes de la variable están en orden ascendente o descendente.

Ejercicio

Determinar las características del polinomio $P(y) = 2y^5 - 4y^4 + 2y^6 + 3y^2$.

a) Términos dependientes: $2y^5, \quad -4y^4, \quad 2y^6, \quad 3y^2$

b) Variable: ***y***

c) Grado: 6

d) Coeficientes: 2 (de y^5), -4 (de y^4), 2 (de y^6), 3 (de y^2), 0 (de y^3), 0 (de y)

e) Término independiente: 0

f) Polinomio Ordenado: **No**

g) Polinomio Completo: **No**, (los coeficientes, de y^3 y de y, son iguales a cero.

Ejercicio

Determinar las características del polinomio $P(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{4}{5}x^2 + 2x + \frac{3}{4}$.

a) Términos dependientes: $\frac{2}{3}x^3, \quad -\frac{4}{5}x^2, \quad 2x$;

b) Variable: x.

c) Grado: 3;

d) Coeficientes: $\frac{2}{3}$ (de x^3), $-\frac{4}{5}$ (de x^2), 2 (de x),

e)Término independiente: $\frac{3}{4}$

F) Polinomio Ordenado: **Si**

g) Polinomio Completo: **Si**

Tipos de Expresiones Algebraicas: **RACIONALES**

Es el cociente de dos expresiones algebraicas enteras, donde el denominador es diferente de cero.

Ejemplos: $\frac{5y^3}{7xy+y^2}$, $\frac{4x^2+y}{5y+x}$

Tipos de Expresiones Algebraicas: **RADICALES**

Son expresiones algebraicas donde las variables están dentro de una raíz.

Ejemplos: $\sqrt[5]{3x^2+2x}$, $5\sqrt[3]{y^2+3}$, $\sqrt{\frac{2}{3}z^2+y}$

Tipos de Expresiones Algebraicas: **COMBINADAS**

Son expresiones algebraicas que contienen expresiones enteras, racionales y/o radicales.

Ejemplos: $\frac{3x^5+5x^3+9}{2x^2}$; $x^2+\frac{3x^3+5}{\sqrt{2x+1}}$;

$\sqrt[4]{y^2+3}+\frac{5x}{1-x}$;

$\frac{4x^3-3x^2+1}{x+3}+x^3-4y^2+5$

VALOR NUMÉRICO DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Calcular el valor numérico de una expresión algebraica consiste en sustituir la variable por un valor específico y realizar las operaciones indicadas para hallar un valor real.

Ejemplo 1: *Sea* $P(x) = 2x + 4$

Hallar el valor numérico de $P(x)$ *para* $x=2$.

Solución:

En donde esté X la sustituimos por 2.

Como 2x = 2.(x) = 2.2 = 4

$$P(x) = 2(x) + 4$$
$$P(2) = 2(2) + 4$$
$$Q(2) = 4 + 4$$

Respuesta: $Q(2) = 8$

Ejemplo 2: Sea $Q(y) = y^5 - 3y^4 + 5y^3 + 7y^2 - 5y + 4$,

Hallar el valor numérico de $Q(y)$ *para* $y = -1$.

Solución:

Sustituimos el valor de x por -1 en toda la expresión.

Como la potencia de un número negativo elevado a exponente par es positiva y si el exponente es impar, es negativa:

Efectuando los productos y teniendo en cuenta la ley de los signos (signos iguales el producto es positivo y si signos diferentes el producto es negativo)

Resolvemos la suma algebraica agrupando positivos por un lado y negativos por el otro.

Finalmente los sumamos tomando en cuenta que signos diferentes se restan y el resultado conserva el signo del mayor.

$Q(-1) = (-1)^5 - 3(-1)^4 + 5(-1)^3 + 7(-1)^2 - 5(-1) + 4$

$Q(-1) = -1 - 3(1) + 5(-1) + 7(-1) - 5(-1) + 4$ ooo

Como: $-3.(1) = -3$ $\quad 5.(-1) = -5$

$7.(-1) = -7$ $\quad -5.(-1) = 5$

$Q(-1) = -1 - 3 - 5 + 7 + 5 + 4$

Como: $-1 - 3 - 5 = -9$

$7 + 5 + 4 = 16$

$Q(-1) = -9 + 16$

Respuesta: $Q(-1) = 7$

Observemos ahora un ejemplo donde se trabaje con dos variables a la vez.

Ejemplo 3: Sea $P(x,y) = \dfrac{x^2 + 2xy + y^2}{x^2 - 2xy + y^2}$

Hallar el valor numérico de $P(x,y)$ para $x = 3$, $y = 2$

Solución:

Sustituimos los valores de $x = 3$ y $y = 2$ en la expresión $P(x,y)$.

$$P(3,2) = \frac{3^2 + 2.3.2 + 2^2}{3^2 - 2.3.2 + 2^2}$$

Resolvemos las potencias y el producto indicado.

$$P(3,2) = \frac{9 + 12 + 4}{9 - 12 + 4}$$

Efectuamos la suma algebraica

$$P(3,2) = \frac{25}{13 - 12}$$

$$P(3,2) = \frac{25}{1}$$

Respuesta: $P(3,2) = 25$

Adición de Polinomios

Escribimos los polinomios en orden descendente

Ejemplo 4: Dados $P(x) = -2x^2 + 3x^3 - 5 + x$ y $Q(x) = -3x + 4x^2 + 2$, hallar $P(x) + Q(x)$

Solución:

$$P(x) = 3x^3 - 2x^2 + x - 5$$

$$Q(x) = 4x^2 - 3x + 2$$

Los ordenamos uno bajo el otro haciendo coincidir los términos semejantes.

$$P(x) = 3x^3 - 2x^2 + x - 5$$
$$Q(x) = \underline{\quad 4x^2 - 3x + 2}$$

Agrupamos los términos semejantes de acuerdo al símbolo y el coeficiente:

- $-5 + 2 = -3$ (signos diferentes, se resta y conserva el signo del mayor)
- $x - 3x = -2x$ (como el coeficiente del primer término es $+1$ y el del segundo es -3,entonces $+1 - 3 = -2$ y se copia la misma variable x).
- $-2x^2 + 4x^2 = 2x^2$. (porque $-2 + 4 = 2$).
- El $3x^2$ queda igual.

$$P(x) + Q(x) = 3x^3 + 2x^2 - 2x - 3$$

Sustracción de Polinomios

En la sustracción de polinomios se puede utilizar el mismo método que en la adición, pero procederemos de manera lineal.

Recuerde un dato importante: el menos (-) que indica la sustracción afecta a todo el polinomio Q(x).

Observe que todos los signos de los términos de Q(x) cambian porque:

$-\left(+\frac{1}{2}x^3\right) = -\frac{1}{2}x^3$ $\quad -\left(-\frac{3}{2}x^2\right) = +\frac{3}{2}x^2$

$-\left(+\frac{1}{5}x\right) = -\frac{1}{5}x$ $\quad -\left(-\frac{2}{3}\right) = +\frac{2}{3}$

Ahora agrupamos los términos semejantes (recuerde que esto ocurre si tienen la misma variable con el mismo exponente)
Se realizan las operaciones indicadas entre los coeficientes de los términos semejantes:

Ejemplo 5: Dados los siguientes polinomios $P(x) = \frac{3}{5}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{3}$, y

$Q(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{5}x - \frac{2}{3}$. Hallar P(x) – Q(x)

$P(x) - Q(x) = \frac{3}{5}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{5}x - \frac{2}{3}\right)$

$P(x) - Q(x) = \frac{3}{5}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{5}x - \frac{2}{3}\right)$

$P(x) - Q(x) = \frac{3}{5}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{5}x + \frac{2}{3}$

$P(x) - Q(x) = \frac{3}{5}x^3 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + \frac{3}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{5}x - \frac{1}{3} + \frac{2}{3}$

$\frac{3}{5}x^3 - \frac{1}{2}x^3 = \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{2}\right)x^3 = \frac{(3.2)-(5.1)}{10}x^3 = \frac{6-5}{10}x^3 = \frac{1}{10}x^3$

$-\frac{5}{2}x^2 + \frac{3}{2}x^2 = \left(-\frac{5}{2} + \frac{3}{2}\right)x^2 = \frac{-5+3}{2}x^2 = \frac{-2}{2}x^2 = -1x^2 = -x^2$

$2x - \frac{1}{5}x = \left(2 - \frac{1}{5}\right)x = \left(\frac{2}{1} - \frac{1}{5}\right)x = \frac{10-1}{5}x = \frac{9}{5}x$

$-\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{-1+2}{3} = \frac{1}{3}$

Entonces:

$P(x) - Q(x) = \frac{1}{10}x^3 - x^2 + \frac{9}{5}x + \frac{1}{3}$

Multiplicación de Polinomios

Se multiplica $(2x^3)$ por **cada uno** de los términos del polinomio.
En cada término multiplicamos los coeficientes y multiplicamos las variables.
Se debe estar pendiente de los signos (+·+=+ / + · - = - / - · + = - / - · - = +)

Cuando multiplicamos potencias de igual base, se copia la misma base y se suman los exponentes.

Ejemplo 6: Multiplique $(2x^3)$ por $(4x^4-2x^2+x-2)$

$=[(2x^3).(4x)]^4 + [(2x^3).(-2x)^2] + [(2x^3).(x)] + [(2x^3).(-2)]$

$=(2.4).(x^3.x^4)+(2.(-2)).(x^3.x^2)+(2.1).(x^3.x)+(2.(-2)).x^3$

$=(8).(x^{3+4})+(-4).(x^{3+2})+(2).(x^{3+1})+(-4).x^3$

$=(8).(x^7)+(-4).(x^5)+(2).(x^4)+(-4).x^3$

Solución:

$(2x^3)\cdot(4x^4-2x^2+x-2) = 8x - 4x^5 + 2x^4 - 4x^3$

Ordenamos un polinomio bajo el otro como lo hacemos con una multiplicación regular.
Se multiplica el último término del multiplicador *(5)* por cada término del multiplicando:

$+5 \cdot (-2) = -10$

$+5 \cdot 3x = 15x$

$+5 \cdot 4x^2 = 20x^2$

Hacemos lo mismo con el otro término del multiplicador, ordenando los productos debajo de su término semejante:

$+2x \cdot (-2) = -4x$

$+2x \cdot (+3x) = 6x^2$

$+2x \cdot (+4x^2) = 8x^3$

Y finalmente agrupamos los términos semejantes sumando o restando según sus signos.

Ejemplo 7: Dados los polinomios $P(x)=4x^2+3x-2$ y $Q(x)=2x+5$, hallar $P(x) \cdot Q(x)$.

Solución:

$$\begin{array}{rl} 4x^2 + 3x - 2 & \text{Multiplicando} \\ 2x + 5 & \text{Multiplicador} \\ \hline 20x^2 + 15x - 10 & \\ 8x^3 + 6x^2 - 4x & \\ \hline 8x^3 + 26x^2 + 11x - 10 & \end{array}$$

Solución:

$P(x) \cdot Q(x) = 8x^3 + 26x^2 + 11x - 10$

Ejemplo 8: Dados los polinomios

$P(x) = -\frac{5}{3}x^3 + 2x^2 + \frac{6}{5}$ y $Q(x) = \frac{1}{4}x^2 + 3$

hallar: $P8x) \cdot Q(x)$

Indicamos el producto de los polinomios de la siguiente manera:

$$P(x) \cdot Q(x) = \left(-\frac{5}{3}x^3 + 2x^2 + \frac{6}{5}\right) \cdot \left(\frac{1}{4}x^2 + 3\right)$$

Aplicamos la propiedad distributiva multiplicando cada término de P(x) por Q(x):

$$= \left[\left(-\frac{5}{3}x^3\right) \cdot \left(\frac{1}{4}x^2 + 3\right)\right] + \left[(2x^2) \cdot \left(\frac{1}{4}x^2 + 3\right)\right] + \left[\left(\frac{6}{5}\right) \cdot \left(\frac{1}{4}x^2 + 3\right)\right]$$

I II III

Cada producto indicado nos representa otra propiedad distributiva que resolveremos por separado:

Lo resolveremos aplicando la propiedad distributiva, es decir, multiplicamos cada término de P(x) por Q(x).

Resolvemos cada producto por separado:

I) $\left(-\frac{5}{3}x^3\right) \cdot \left(\frac{1}{4}x^2 + 3\right) = \left(-\frac{5}{3}x^3\right) \cdot \left(\frac{1}{4}x^2\right) + \left(-\frac{5}{3}x^3\right) \cdot (3)$

$$\left(-\frac{5}{3}x^3\right) \cdot \left(\frac{1}{4}x^2\right) = \left(-\frac{5}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right) x^3 x^2$$

Multiplicamos los coeficientes y las variables también.
Como:

$$\left(-\frac{5}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{-5 \cdot 1}{3 \cdot 4} = \frac{-5}{12}$$

Ahora efectuando el producto:

$$x^3 x^2 = x^{3+2} = x^5$$

como el producto de potencias de igual base se copia la base y se suman los exponentes::

$$\left(-\frac{5}{3}x^3\right) \cdot (3) = \left(-\frac{5}{3} \cdot 3\right) x^3$$

por otra parte agrupamos coeficientes y efectuamos el producto de fracciones:

$-\frac{5}{3} \cdot 3 = -\frac{5}{3} \cdot \frac{3}{1} = \frac{15}{3} = 5$ entonces $= -\frac{5}{12}x^5 - \frac{15}{3}x^3$

igualmente, juntamos coeficientes:

$$(2x^2)\left(\frac{1}{4}x^2\right) = \left(2\cdot\frac{1}{4}\right)(x^2\cdot x^2)$$

- Completamos y multiplicamos fracciones y aplicamos producto de potencias de igual base:
- Simplificando nos queda……

En el otro término sólo multiplicamos los coeficientes $2\cdot 3$

Para la tercera parte resolvemos los dos productos de fracciones:

Así nos queda:

- Ahora uniendo los tres subproductos:

- Agrupamos términos semejantes:

Efectuando la suma de fracciones indicada:

II) $(2x^2)\cdot\left(\frac{1}{4}x^2+3\right) = (2x^2)\cdot\left(\frac{1}{4}x^2\right) + (2x^2)(3)$

$$= \left(\frac{2}{1}\cdot\frac{1}{4}\right)(x^2\cdot x^2) = \frac{2}{4}X^{2+2}$$

$$= \frac{1}{2}X^4$$

Así la segunda parte nos queda $= \frac{1}{2}x^4 + 6x^2$

III) $\left(\frac{6}{5}\right).\left(\frac{1}{4}x^2+3\right) = \left(\frac{6}{5}\right).\left(\frac{1}{4}x^2\right) + \left(\frac{6}{5}\right).(3)$

$\frac{6}{5}\cdot\frac{1}{4} = \frac{6\cdot 1}{5\cdot 4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$ y $= \frac{6}{5}\cdot 3 = \frac{6}{5}\cdot\frac{3}{1} = \frac{18}{5}$

$$= \frac{3}{10}x^2 + \frac{18}{5}$$

$$P(x)\cdot Q(x) = -\frac{5}{12}x^5 - 5 + \frac{1}{2}x^4 + 6x^2 + \frac{3}{10}x^2 + \frac{18}{5}$$

$$P(x)\cdot Q(x) = -\frac{5}{12}x^5 + \frac{1}{2}x^4 + \left(6x^2 + \frac{3}{10}x^2\right) + \left(\frac{18}{5} - 5\right)$$

$$P(x)\cdot Q(x) = -\frac{5}{12}x^5 + \frac{1}{2}x^4 + \left(\frac{63}{10}x^2\right) + \left(-\frac{7}{5}\right)$$

Solución:

$$P(x)\cdot Q(x) = -\frac{5}{12}x^5 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{63}{10}x^2 - \frac{7}{5}$$

Ahora resolveremos un producto donde se utilicen dos variables:

Ordenamos el polinomio Q(xy) considerando la variable y.

Indicamos el producto-

Aplicamos la propiedad distributiva multiplicando $(4xy^2)$ por cada término de $Q(xy)$.

Multiplicamos coeficiente con coeficiente, variable y con variable y, variable x con variable x (en este caso está sólo una vez)

Ejemplo 9: Multiplique $P(xy)=(4xy^2)$ *por* $Q(xy)=(xy-2xy^2+3y^3+x^3)$

$Q(xy)=(xy-2xy^2+3y^3+x^3)$ = $(3y^3-2xy^2+xy+x^3)$

$P(xy)\cdot Q(xy)=(4xy^2)\cdot(3y^3-2xy^2+x^2y+x^3)$

$= (4xy^2)(3y^3) + (4xy^2)(-2xy^2) + (4xy^2)(x^2y) + (4xy^2)(x^3)$

Observe como efectuar el producto en cada término:

$(4xy^2)(3y^3) = (4\cdot 3)\cdot(x)\cdot(y^2\cdot y^3)$

$= 12 \quad x \quad y^{2+3} = 12\,x\,y^5$

Hacemos lo mismo con los otros términos:

$(4xy^2)(-2xy^2)=(4\cdot(-2))\cdot(x\cdot x)\cdot(y^2\cdot y^2)$

$=(-8)\cdot(x^{1+1})\cdot(y^{2+2})$

En el tercer término

$= -8\,x^2\,y^4$

$(4xy^2)(x^2y)=(4\cdot1)\cdot(x\cdot x^2)\cdot(y^2\cdot y)$

$=(4)\cdot(x^{1+2})\cdot(y^{2+1})$

$= 4\,x^3\,y^3$

Y en el último

$(4xy^2)(x^3)=)=(4\cdot1)\cdot(x\cdot x^3)\cdot(y^2)$

$=(4)\cdot(x^{1+3})\cdot(y^2)$

$= 4\,x^4\,y^2$

Uniendo los cuatro productos obtenemos:

$P(xy)\cdot Q(xy)= 12\,x\,y^5 - 8\,x^2\,y^4 + 4\,x^3\,y^3 + 4\,x^4\,y^2$

División de Polinomios

Ejemplo 10: Sea $P(x)=12x^5-10x^4+4x^3$ y $Q(x)=2x^2$

Hallar $P(x) \div Q(x)$

Solución:

Como:

Cuando el Divisor (denominador) es un monomio, se separa la fracción original en tres fracciones con igual denominador, y obtenemos:

$$P(x) \div Q(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{12x^5-10x^4+4x^3}{2x^2} \quad \frac{Dividendo}{Divisor}$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{12x^5}{2x^2} - \frac{10x^4}{2x^2} + \frac{4x^3}{2x^2}$$

Ahora procedemos a calcular cada cociente por separado:

Agrupamos coeficientes y variables.
Efectuamos la operación: $12 \div 2 = 6$, y $X5 \div x2 = x5\text{-}2 = x3$
Hacemos lo mismo con los demás términos.

$$\frac{12x^5}{2x^2} = \left(\frac{12}{2}\right)\left(\frac{x^5}{x^2}\right)$$

$= (6)(x^3) = 6x^3$

$$\frac{10x^4}{2x^2} = \left(\frac{10}{2}\right)\left(\frac{x^4}{x^2}\right) = 5x^{4-2} = 5x^2$$

$$\frac{4x^3}{2x^2} = \left(\frac{4}{2}\right)\left(\frac{x^3}{x^2}\right) = 2x^{3-2} = 2x^1 = 2x$$

Uniendo todos los cocientes, nos queda:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = = 6x^3 + 5x^2 + 2x$$

Ejemplo 11: Hallar $\frac{4x^5-x^3+6x^2-3x}{2x-1}$

Tanto el dividendo como el divisor deben ordenarse y completarse, antes de comenzar la división.

Completamos con el coeficiente CERO los términos que faltan, como es en este caso x^4 y el término independiente.

$$\frac{4x^5+0x^4-x^3+6x^2-3x+0}{2x-1}$$

Lo escribimos en forma de división y procedemos a dividir:

Dividimos $4x^5$ entre $2x$ usando el procedimiento de los ejercicios anteriores

$\frac{4x^5}{2x} = 2x^4$ *y colocamos este valor en el cociente*

Multiplicamos ese cociente ($2x^4$) por el divisor (2x-1)

$(2x^4) \cdot (2x\text{-}1) = 4x^5 - 2x^4$

y lo colocamos bajo el dividendo, cambiando el signo del resultado: $-4x^5 + 2x^4$

Sumamos verticalmente, observe que el primer término $4x^5$ se repite con diferente signo por lo que al sumarlo, el resultado es cero (0).

El resultado obtenido $2x^4$ se denomina residuo parcial, bajamos los demás términos al lado de este:

$$\begin{array}{r|l} 4x^5 + 0x^4 - x^3 + 6x^2 - 3x + 0 & 2x - 1 \\ \cancel{-4x^5 + 2x^4} & \hline 2x^4 \\ \hline 2x^4 - x^3 + 6x^2 - 3x + 0 & \end{array}$$

Repetimos el mismo procedimiento, ahora dividiendo $2x^4 \div 2x = x^3$

Colocamos este nuevo cociente a la derecha del cociente anterior.

Multiplicamos el último cociente por el divisor:

$(x^3) \cdot (2x\text{-}1) = 2x^4 - x^3$

Cambiamos los signos de este producto y lo colocamos debajo del dividendo haciendo coincidir los términos semejantes para sumar.

$$\begin{array}{r|l} 4x^5 + 0x^4 - x^3 + 6x^2 - 3x + 0 & 2x - 1 \\ \cancel{-4x^5 + 2x^4} & \hline 2x^4 + x^3 \\ \hline \cancel{2x^4} - x^3 + 6x^2 - 3x + 0 & \\ \cancel{-2x^4 + x^3} & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Ahora dividimos $6x^2$ entre $2x$

$$6x^2 \div 2x = 3x$$

Lo ubicamos a la derecha de los cocientes anteriores, multiplicamos por 2x-1

$$(3x) \cdot (2x - 1) = 6x^2 - 3x$$

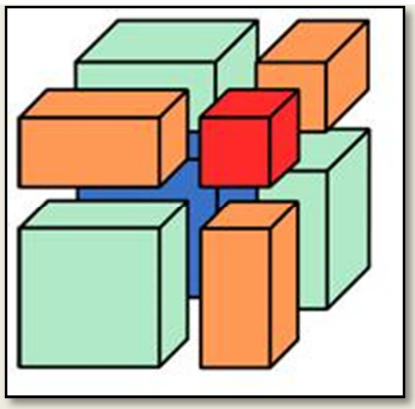
Le cambiamos signos y ubicamos debajo del dividendo para sumar o restar.

$$\begin{array}{r|l} 4x^5 + 0x^4 - x^3 + 6x^2 - 3x + 0 & 2x - 1 \\ \cancel{-4x^5 + 2x^4} & \hline 2x^4 + x^3 + 3x \\ \hline \cancel{2x^4} - x^3 + 6x^2 - 3x + 0 & \\ \cancel{-2x^4 + x^3} & \\ \hline \cancel{6x^2} - 3x + 0 & \\ \cancel{-6x^2 + 3x} & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Y ASÍ EL COCIENTE ES:

$$\frac{4x^5 - x^3 + 6x^2 - 3x}{2x - 1} = 2x4 + x3 + 3x$$

PRODUCTOS NOTABLES



El hombre, en su inmensa necesidad de organizarse en sociedad, poco a poco, fue implementando un lenguaje simbólico que le sirvió de instrumento en las actividades cotidianas, tanto para comunicarse como para demarcar y establecer normas de convivencia.

Dentro de las operaciones elementales, como la adición, la multiplicación, la potenciación, entre otras, aplicables en todas las ramas de las matemáticas, a través de propiedades de composición bien definidas, se derivan procedimientos que permiten simplificar con mayor facilidad las operaciones indicadas. Procedimientos como el* Producto notable *y la* Factorización *son herramientas muy prácticas para la agilización en la búsqueda de un resultado concreto.

Cuando se realiza un producto notable se está aplicando una multiplicación, pero se hace de una forma directa reduciendo la operación a un mínimo de pasos posibles, por ejemplo en aritmética no es muy frecuente encontrarse con un producto notable, pero se puede ejemplificar un ejercicio para hacer sencillas demostraciones, de la siguiente manera:

$$(5+3)^2=5^2+2\cdot(5\cdot3)+3^2 = 25+30+9$$

***Si se realiza la multiplicación aplicando la propiedad distributiva, que es el proceso normal, el procedimiento se hace más largo; observa*:**

$$(5+3)^2=(5+3)\cdot(5+3)=(5\cdot5)+(5\cdot3)+(3\cdot5)+(3\cdot3)$$

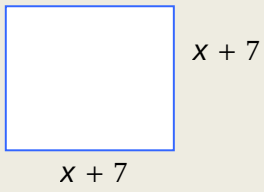
$$= 25+15+15+9=25+30+9$$

Ahora bien, si trabajamos dentro del álgebra, el mismo producto notable puede aplicarse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}(3x + 5y)^2 &= (3x + 5y)\cdot (3x + 5y)\\ &= (3x)\cdot(3x) + (3x)\cdot(5y) + (5y)\cdot(3x) + (5y)\cdot(5y)\\ &= (3x)^2 + 2\cdot(3x \cdot 5y) + (5y)^2\\ &= 9x^2 + 30xy + 25y^2\end{aligned}$$

EL CUADRADO DE UNA SUMA DE DOS TÉRMINOS

Necesitamos conocer el área del cuadrado.



Ejemplo 12: Supóngase que tenemos una región de forma cuadrada, cuyas dimensiones son las siguientes: de largo y de ancho mide x+7 unidades.

Sabemos que para calcular el área de un cuadrado, sólo tenemos que multiplicar lo que mide de ancho por lo que mide de largo, Es decir:

Área del Cuadrado ☐ = Largo x Ancho

Área ☐ = (Lado) ^{2}

Entonces; aplicamos la fórmula:

Área ☐ $= (x+7)\cdot(x+7) = (x+7)^2$

Ancho · largo

Si aplicamos la propiedad distributiva nos quedaría:

$(x+7)\,.\,(x+7) = x^2 + x.7 + 7.x + 7^2 = x^2 + 2(7.x) + 7^2$

Luego: Área ☐ $= (x+7)^2$

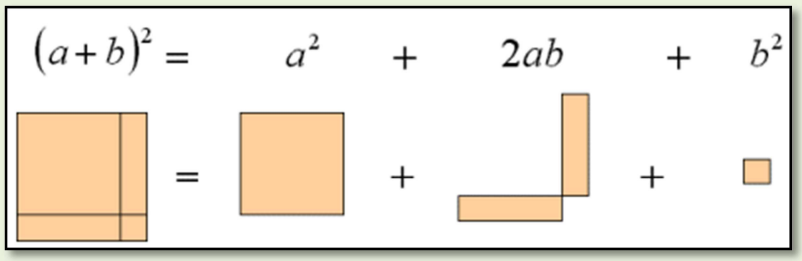
Desarrollamos esta potencia de la siguiente manera:

$(x+7)^2 = x^2 + 2(7.x) + 7^2$

Simplificando el resultado, tenemos que: $(x+7)^2 = x^2 + 14x + 49$

De esta manera obtenemos el área de la región cuadrada:

Área ☐ $= x^2 + 14x + 49$



Ejemplo 13: Vamos a desarrollar el Producto Notable: $(5+y)^2$

$$(5+y)^2 = (5)^2 + (2)\cdot(5).y + (y)^2$$

Cuadrado del 1er Término

El Doble del producto: del 1er término por el 2do término

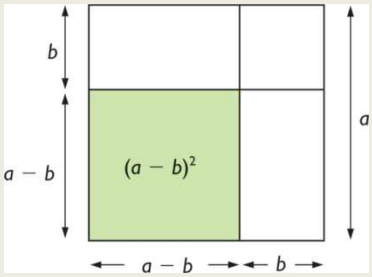
Cuadrado del 2do Término

El resultado es un polinomio de tres términos: "EL primer término al cuadrado, más el doble del producto del primer término por el segundo, más el segundo término al cuadrado"

Simplificando queda:

$$(5+y)^2 = 25 + 10y + y^2$$

EL CUADRADO DE UNA DIFERENCIA DE DOS TÉRMINOS



Se resuelve de la misma forma que el caso del cuadrado de la suma de dos términos; sólo que para desarrollar este caso hay que tomar en cuenta el signo de los términos.

Ejemplo 14: $(x-3)^2$

$(x-3)^2=(x-3)\cdot(x-3)$

$=(x)\cdot(x)+(x)\cdot(-3)+(-3)\cdot(x)+(-3)\cdot(-3)$

$= x^2 - 3x - 3x + 3^2$

El cuadrado de una diferencia es igual a:

El cuadrado del primer término, menos el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo

$= x^2 - 2(3x) + 3^2$

$= x^2 - 6x + 3^2$

EL PRODUCTO DE DOS BINOMIOS CON UN TÉRMINO EN COMÚN

Sabemos que el área de un rectángulo se calcula multiplicando lo que mide de largo por el ancho.

El resultado de este producto notable es un trinomio:

"El término común al cuadrado más el producto del término común con la suma algebraica de los términos no comunes más el producto de

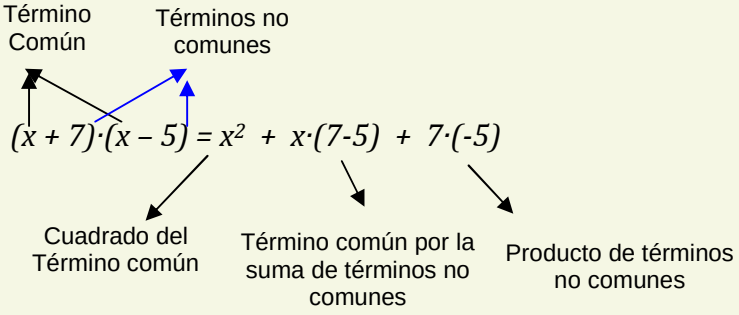
Ejemplo 15: *Tenemos una región de forma rectangular cuyas dimensiones ya conocemos:*

$X - 5$

$X + 7$

Entonces: Área $= (x+7)\cdot(x-5)$

Desarrollamos este producto de la siguiente manera:



los términos no comunes".

Como:

$(3x)^2 = 3x \cdot 3x = 9x^2$

$(3x)\cdot(-9+2)=(3x)\cdot(-7)$

$= -21x$

y;

$(-9) \cdot 2 = -18$

Entonces .....

Simplificando el resultado, queda:

$(x + 7) \cdot (x – 5) = x^2 + x(2) – 35$

$= \underbrace{x^2 + 2x – 35}_{\text{Trinomio}}$

De esta manera se obtiene el área de la región rectangular:

Área = $x^2 - 2x – 35$

***Ejemplo 16**: Desarrolla el producto: $(3x – 9) \cdot (3x + 2)$*

$(3x – 9) \cdot (3x + 2)= (3x)^2 + (3x)\cdot(-9 + 2) + (-9) \cdot 2$

Término Común — Términos no comunes

$(3x – 9) \cdot (3x + 2)= 9x^2 – 21x - 18$

El producto de los términos no comunes

Producto del término común con la suma de los no comunes

El cuadrado del término común

LA SUMA DE DOS TÉRMINOS POR SU DIFERENCIA

x - 6

x + 6

Se necesita conocer el área de la región.

Sabemos que el área de un rectángulo se calcula multiplicando lo que mide de largo por el ancho.

Ejemplo17: Se conocen las dimensiones de una región rectangular:

Largo = x + 6 y Ancho = x - 6

Área = $(x + 6) \cdot (x – 6)$

Para desarrollar este producto procedemos de la siguiente forma:

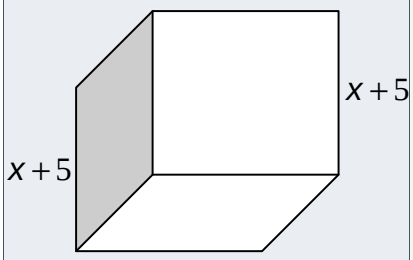
$\underbrace{(x + 6)}_{\text{Suma}} \cdot \underbrace{(x – 6)}_{\text{Diferencia}} = x^2 - 6^2$

1^{er} Término al cuadrado — 2^{do} Término al cuadrado

Luego:

El área de la región rectangular es: $x^2 – 6^2$

EL CUBO DE UNA SUMA DE DOS TÉRMINOS



Para hallar el volumen de un cubo aplicamos la fórmula:

Volumen = Largo x Ancho x Alto

Ley de potenciación

Multiplicación de polinomios y agrupación de términos semejantes

El resultado de este producto notable es un polinomio: "El cubo del primer término, más el triple del producto del primer término al cuadrado, por el segundo término, más el triple del producto del primer término por el cuadrado del segundo, más el cubo del segundo término".

Ejemplo 18: ***Se debe determinar el volumen de un tanque que tiene forma de cubo, conociendo sus dimensiones:***

Largo = x + 5, Ancho = x + 5 y Alto = x + 5

Como las tres medidas son iguales entonces

Volumen = $(\text{Lado})^3$

Entonces: Volumen = $(x + 5)^3$

Por Ley de Potenciación:

$$(x + 5)\cdot(x + 5)\cdot(x + 5) = (x+ 5)^3$$

Luego:

Volumen = $(x + 5)^3$

Para desarrollar esta potencia procedemos así:

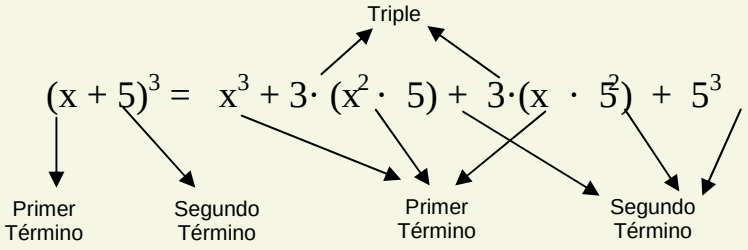
$(x + 5)^3 = (x + 5)^2 \,.\, (x + 5)$ como ya sabemos calcular el cuadrado de una suma, tenemos que:

$(x + 5)^3 = (x^2 + 10.x + 25) \,.\, (x + 5)$

$(x + 5)^3 = x^3 + 5.x^2 + 10.x^2 + 50.x + 25.x + 125$

$(x + 5)^3 = x^3 + 15.x^2 + 75.x + 125$

$(x + 5)^3 = x^3 + 3 \,.\, 5.\, x^2 + 3.\, 52.x + 53$



Luego; efectuando las operaciones en cada término:

$3\cdot (x^2 \cdot 5) = 15\, x^2$ $\qquad$ $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$

$3\cdot(x \cdot 5^2) = 3 \cdot x \cdot 25 = 75x$

De esta manera tenemos que:

$(x + 5)^3 = x^3 + 15\, x^2 + 75x + 125$

Ejemplo 19: Desarrollar el producto notable:

$$(2x + 1)^3$$

Si aplicamos el procedimiento anterior;

El cubo del primer término…….$(2x)^3$

$(2x)^3=(2x)\cdot(2x)\cdot(2x)$
$=8x^3$

El triple del producto del primer término al cuadrado por el segundo cuadrado por el segundo término……. $3 \cdot (2x)^2 \cdot 1$

$3\cdot(2x)^2 .1= 3\cdot4x^2\cdot1$
$= 12x^2$

El triple del producto del primer término por el cuadrado del segundo……. $3 \cdot 2x \cdot 1^2$

$3\cdot2x\cdot1^2 = 3\cdot2x\cdot1$
$=6x$

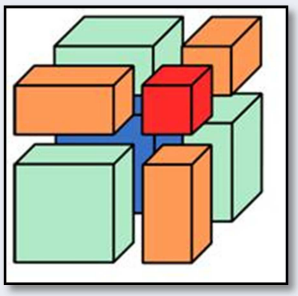
El cubo del segundo término…… 1^3

y, $1^3 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$

$$(2x + 1)^3 = (2x)^3 + 3 \cdot (2x)^2 \cdot 1 + 3 \cdot 2x \cdot 1^2 + 1^3$$

Luego, el polinomio se reduce a:

$$(2x + 1)^3 = \mathbf{8x^3 + 12x^2 + 6x + 1}$$



En resumen, obtenemos como resultado: El cubo del primer término, menos el triple del producto del cuadrado del primero por el segundo, más el triple del producto del primero por el cuadrado del segundo, menos el cubo del segundo término.

EL CUBO DE LA DIFERENCIA DE DOS TÉRMINOS

Se desarrolla aplicando el mismo procedimiento de "el cubo de la suma de dos términos", sólo que en este caso se debe tomar en cuenta el signo de los términos.

Ejemplo 17: Desarrolla el producto notable:

$$(Y-2)^3$$

Primer Término — Segundo Término

Efectuando las operaciones de cada término en el resultado:

* $(y)^3 = y^3$;
* $3\cdot(y)^2\cdot(2) = -6y^2$
* $3\cdot(y)\cdot(-2)^2 = 3y\cdot(4) = 12y$
* $(-2)^3 = (-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = -8$

Luego de efectuar las operaciones en cada término, el polinomio resultante es:

$$(y-2)^3 = y^3 - 6y^2 + 12y - 8$$

VERIFICACIÓN

El resultado es:

1- b Signos diferentes se restan y se coloca el signo de la cantidad de mayor valor absoluto.	**2– a** Signos iguales se suman y se coloca el mismo signo.	**3- b** $8 \cdot 3 = 24$ y $+ \cdot - = -$ entonces = -24
4- d $4 \cdot 7 = 28$ y $- \cdot - = +$ entonces = 28	**5- c** $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$	**6- c** $-8^2 = (-8) \cdot (-8)$ Como $8 \cdot 8 = 64$ Y $- \cdot - = +$ Entonces es 64
7- c $-4^3 = (-4) \cdot (-4) \cdot (-4)$ Como $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ y $- \cdot - \cdot - = -$ entonces es -64	**8- b** Producto de potencias de igual base se copia la misma base y se suman los exponentes.	**9- a** Potencia de un producto el exponente de cada factor se multiplica por el índice de la potencia.
10- c Potencia de una potencia, se multiplican los exponentes.	**11- b** Cociente de potencias se restan los exponentes dejando la misma base.	**12- a** La suma de fracciones de igual denominador se copia el mismo denominador y se suman los numeradores.
13- d La resta de fracciones de igual denominador se copia el mismo denominador y se restan los numeradores.	**14- b** Un método es usar como denominador el producto de los denominadores y como numerador la diferencia de las multiplicaciones en cruz.	**15- c** En el producto de fracciones se multiplica numerador con numerador y denominador con denominador.
16) c Se aplica la propiedad distributiva: el 3x se multiplica por 1 y el 3x se multiplica también por 2x.		

LA FACTORIZACIÓN COMO HERRAMIENTA DE SIMPLIFICACIÓN

La ***factorización***, es el procedimiento contrario al producto notable, consiste en transformar una expresión algebraica en un producto o multiplicación. Cuando un número o cualquier otra expresión no pueden descomponerse en factores, se dice que es un número primo.

En las operaciones aritméticas y algebraicas se utiliza mucho el procedimiento de la factorización, como herramienta para simplificar y resolver los ejercicios con menor dificultad y mayor rapidez.

Por ejemplo:

Aritméticamente:

$$\frac{3}{12}+\frac{15}{3}-\frac{9}{15}=\frac{3}{3\cdot 4}+\frac{3\cdot 5}{3}-\frac{3\cdot 3}{3\cdot 5}=\frac{1}{4}+5-\frac{3}{5}$$

$$\frac{3}{12}+\frac{15}{3}-\frac{9}{15}=\frac{\cancel{3}}{\cancel{3}\cdot 4}+\frac{\cancel{3}\cdot 5}{\cancel{3}}-\frac{\cancel{3}\cdot 3}{\cancel{3}\cdot 5}=\frac{1}{4}+5-\frac{3}{5}$$

En el álgebra:

$$\frac{x+2}{x^2+4x+4}+\frac{x^2-5x}{x^2-25}=\frac{\cancel{x+2}}{\cancel{(x+2)}(x+2)}+\frac{x\cancel{(x-5)}}{(x+5)\cancel{(x-5)}}$$

Observa que hay una suma de fracciones; tanto en el numerador como en el denominador de cada fracción, se hizo una descomposición en factores con aquellos números que no son primos, ejemplo: 12 = 3 · 4, 15 = 3 · 5 y 9 = 3 · 3
Luego se cancelaron aquellos factores iguales en el numerador y denominador de cada fracción, simplificándose cada término.

Aquí tenemos otra suma de fracciones, pero no es aritmética como la anterior. Se hizo una descomposición en factores en el numerador y denominador de cada fracción. La expresión "$x+2$" no se pudo descomponer por ser un polinomio primo.

Luego, se simplificó cada fracción cancelando factores iguales en el numerador y denominador.

$$= \frac{1}{(x+2)} + \frac{x}{(x+5)}$$

Cada fracción algebraica está compuesta por expresiones llamadas polinomios, que para factorizarlos se deben tomar en cuenta algunas reglas, un ejemplo de ello es la expresión " $x^2 + 4x + 4$ ", que representa un trinomio de cuadrado perfecto. Para factorizar este tipo de expresión primero se debe estar familiarizado con ella, pues existen muchos casos de factorización para ciertos tipos de polinomios.

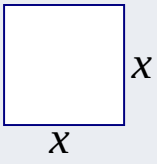
¿CÓMO COMPLETAR CUADRADOS?

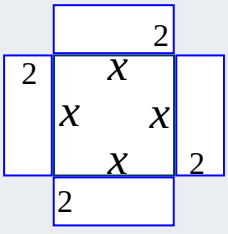
Suárez, E. y Cepeda, D. (2003). **Matemática de Educación Básica.** Editorial Santillana, S.A. (p. 149). Caracas, Venezuela.

Los primero que utilizaron métodos geométricos para buscar la solución a muchos de los problemas que hoy se resuelven mediante la simbología algebraica, fueron los gringos y luego los árabes. Por ejemplo, Mohammed al-Khowarizmi propuso, hacia el año 825, un método geométrico para obtener una solución positiva de una ecuación cuadrática.

De acuerdo con lo que él propuso, para resolver la ecuación $x^2 + 8x = 33$, se siguen los siguientes pasos:

Suponemos que $x^2 + 8x$ es una suma de áreas, la cual nos da **33** unidades cuadradas, observemos el gráfico:





El cuadrado tiene lados de medidas **x** unidades, para hallar su área multiplicamos lo que mide de ancho por lo que mide de largo. Así:

Largo . Ancho = x . x = x^2

Observa que se han construido rectángulos a cada lado del cuadrado, cuyos lados miden "**x**" y **"2"** unidades, respectivamente (esta medida "2" se obtiene de dividir "8", que es el coeficiente del término lineal **8x**, entre el número de rectángulos).

Al calcular el área de uno de estos rectángulos resulta:

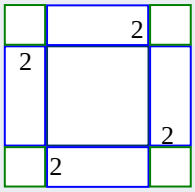
Largo . Ancho = **2 . x**

Entonces, al construir cuatro rectángulos, se forma un área entre todos ellos que está representada por:

$$2x + 2x + 2x + 2x = 8x$$

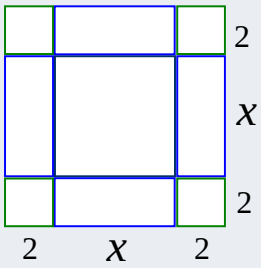
El área total de los rectángulos, más el área del cuadrado resulta

$$x^2 + 8x = 33$$



Ahora, se construyen cuadrados pequeños en cada esquina de la figura para completar el cuadrado mayor.
Como podrás darte cuenta, cada cuadrito tiene lado igual a 2 unidades, siendo el área 2 · 2 = 4 unidades cuadradas.

Entonces, entre los cuatro cuadritos se tiene un área igual a 4 · 4 = 16 unidades cuadradas, lo que indica que el cuadrado mayor tiene un área de: **33 + 16 = 49**



Luego,
Tenemos un cuadrado cuyos lados miden (2 + x + 2) = x + 4 por lo que el área sería:

Largo . Ancho = $(x + 4).(x + 4) = (x + 4)^2$

Pero ya se conoce el área total que es 49 unidades cuadradas

Entonces:

$$(x + 4)^2 = 49$$

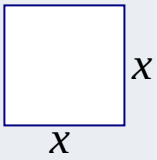
donde despejando el cuadrado nos queda:

$$x+4=\sqrt{49}$$

$$x + 4 = 7$$

$$x = 7 - 4$$

$$x = 3$$



En conclusión, si volvemos al problema original, el área del cuadrado de lado **x** es igual a: **3 · 3 = 9** unidades cuadradas

MÉTODOS DE FACTORIZACIÓN

Ochoa, A. (2007). **Métodos de Factorización.** UNEFA. Artículo no publicado (pp.1-6). Caracas. Venezuela.

La operación de descomponer en factores los productos notables, también se llama “Factorización”. Es el proceso inverso al desarrollo de los productos notables.

Para factorizar polinomios existen varios métodos:

FACTOR COMÚN

Consiste en transformar la expresión dada en un producto, donde uno de los factores es común entre los términos y el otro se obtiene al dividir cada término de la expresión original entre el factor común.

Ejemplo 1: 12x + 3

Descomponemos el número 12 en dos factores y observamos que el 3 es común en los dos términos.

$$\textcircled{3}.4.x+\textcircled{3}$$

Multiplicamos y dividimos toda la expresión por el factor común

$$\frac{3}{3}(3.4.x+3)=$$

Efectuamos el cociente de cada término entre el factor común

$$3.\left(\frac{3.4.x}{3}+\frac{3}{3}\right)=$$

Esta es la expresión ya factorizada

$$3.(4x+1)=$$

Cuando nos piden sacar factor común o simplemente factorizar y hay coeficientes con factores comunes, se saca el máximo común divisor de dichos coeficientes.

Ejemplo 2: Factorizar el polinomio

$$-12x^3+36x^2+18x$$

Ordenamos y calculamos el máximo común divisor entre los coeficientes de cada término,

Mcd (36,12,18) = 6

$$-12x^3+36x^2+18x$$

Como la variable x es común en los tres términos, multiplicamos el mcd por la x elevada a la menor potencia que aparezca.

En este caso es elevada a la 1 (6x)

Multiplicamos y dividimos toda la expresión por este factor común

$$\frac{6x}{6x}.(-12x^3+36x^2+18x)$$

Efectuamos el cociente de cada término entre el factor común

$$6x.\left(-\frac{12x^3}{6x}+\frac{36x^2}{6x}+\frac{18x}{6x}\right)$$

Resolviendo cada cociente:

Se dividen los coeficientes, y,

Se aplica la ley de cociente de potencias de igual base (se copia la base y se restan los exponentes) y así se obtiene la expresión factorizada por factor común

$$6x.(-2x^2+6x+3)$$

Finalmente se extraen los factores comunes diferentes por agrupación de términos.

Ejemplo 3: Factorizar $3x^2-6xy+4x-8y$

Formamos dos grupos considerando que los dos primeros términos son divisibles entre 3x y los dos últimos entre 4.

$$(3x^2-6xy)+(4x-8y)$$

Multiplicamos y dividimos las dos expresiones por estos factores comunes

$$\frac{3x}{3x}(3x^2-6xy)+\frac{4}{4}(4x-8y)$$

Simplificando

$$3x\left(\frac{3x^2}{3x}-\frac{6xy}{3x}\right)+4\left(\frac{4x}{4}-\frac{8y}{4}\right)$$

Observa que surgió un nuevo factor común entre los dos términos.

$$3x.(x-2y)+4(x-2y)$$

Se procede a multiplicar y dividir por el nuevo factor común.

$$\frac{(x-2y)}{(x-2y)}[3x.(x-2y)+4(x-2y)]$$

Simplificando obtenemos la expresión ya factorizada

$$(x-2y)\left[\frac{3x.(x-2y)}{(x-2y)}+\frac{4(x-2y)}{(x-2y)}\right]$$

$$(x-2y)(3x+4)$$

DIFERENCIA DE CUADRADOS

Este caso se basa en la fórmula:

$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$

Ejemplo 4: Factorizar $x^2 - 9$

Expresamos todos los términos en cuadrados.

$$x^2 - 9 = x^2 - 3^2$$

Tomando en cuenta que la factorización es el procedimiento inverso a producto notable y como $(a+b).(a-b) = a^2 - b^2$

$$x^2 - 9 = (x+3).(x-3)$$

Ejemplo 5: Factorizar $x^4 - 16$

Expresamos todos los términos en cuadrados

$$x^4 - 16 = (x^2)^2 - 4^2$$

Tomando en cuenta que la factorización es el procedimiento inverso a producto notable: $(a+b).(a-b) = a^2 - b^2$

$$x^4 - 16 = (x^2 + 4).(x^2 - 4)$$

Como el segundo factor también es una diferencia de cuadrados, se procede a factorizarlo: $x^2 - 4 = x^2 - 2^2$

$$x^4 - 16 = (x^2 + 4).(x + 2).(x - 2)$$

TRINOMIO

Se pueden conseguir tres casos:

1.Trinomio de la forma $x^2 + ax + b$:

La fórmula general viene dada por:

$x^2 + ax + b$ y al factorizarlo queda expresada como

$(x + n).(x + m)$ donde $n.m = b$ y $n + m = a$

Ejemplo 6: $x^2 - 7x + 12$

Buscamos dos cantidades, tales que su producto sea 12, éstas deben tener el mismo signo para que el producto sea positivo, y para que la suma sea -7, deben ser los dos negativos.

$- 3 - 4 = - 7$

$(-3).(-4) = 12$

Se sustituyen los coeficientes, una por una adición y la otra por una multiplicación.

$$x^2 - 7x + 12 = x^2 + (-3-4)x + (-3).(-4)$$

Aplicando la fórmula general.

$$x^2 + 10x + 24 = (x-3).(x-4)$$

Buscamos dos cantidades, tales que la suma sea 10 y su producto sea 24. Se sustituyen los coeficientes, una por una adición y la otra por una multiplicación. Aplicando la fórmula general.	**Ejemplo 7:** : $x^2 - 7x + 12$ 6 + 4 = 10 6 . 4 = 24 $x^2 + 10x + 24 = x^2 + (6+4)x + (6.4)$ $x^2 + 10x + 24 = (x+6).(x+4)$
Buscamos dos cantidades tales que la suma sea 15 y su producto sea -100. Para que el producto sea negativo deben tener signos diferentes. Se sustituyen los coeficientes, uno por una adición y el otro por una multiplicación. Aplicando la fórmula general	**Ejemplo 8:** $x^2 + 15x - 100$ 20 + (-5) = 15 20 . (-5) = -100 $x^2 + 10x + 24 = x^2 + (20 + (-5))x + (20.(-5))$ $x^2 + 10x + 24 = (x+20).(x-5)$
Verificamos si dos de los términos se pueden expresar en forma de cuadrado. También verificamos si el término restante se puede expresar como el doble producto de las bases de los cuadrados. Al cumplir las condiciones, se pasa a factorizarlo según la fórmula.	**TRINOMIO CUADRADO PERFECTO** Se basa en las siguientes fórmulas: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ y $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ Analizamos el procedimiento mediante el ejemplo Nº 9: $x^2 + 25 + 10x$ $x^2 + 10x + 25$ X^2 ya está en forma de cuadrado $25 = 5^2$ $10x = 2(x.5)$ $x^2 + 10x + 25 = (x+5)^2$
Verificamos si dos de los términos se pueden expresar en forma de cuadrado. También verificamos si el término restante se puede expresar como el doble producto de las bases de los cuadrados. Expresamos el trinomio en cuadrados y productos. Factorizamos aplicando la fórmula.	**Ejemplo 10:** : $4x^2 - 12x + 9 =$ $4x^2 - 12x + 9 =$ $4x^2 = (2x)^2$ $9 = (-3)^2$ $-12x = 2.(2x).(-3)$ $4x^2 - 12x + 9 = (2x)^2 + 2.(2x.(-3)) + 3^2$ $4x^2 - 12x + 9 = (2x-3)^2$

TRINOMIO DE SEGUNDO GRADO

(ax^2+bx+c)

Cuando no se cumplen las condiciones de los dos casos anteriores.

En este caso, se procede de la siguiente manera:

Se iguala toda la expresión a cero (0).
Se calculan los dos valores de x, utilizando la ecuación cuadrática.

Se aplica la fórmula general.

$$ax^2+bx+c=0$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1).(x-x_2)$$

Ejemplo 10:

Factorizar el polinomio $2x^2+5x-3$

$$2x^2+5x-3=0$$

a = 2 b = 5 c = -3

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4.2.(-3)}}{2.2}$$

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{25+24}}{2.2}$$

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{49}}{2.2}$$

$$x=\frac{-5\pm7}{4}$$

$$x_1=\frac{-5+7}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

$$x_2=\frac{-5-7}{4}=\frac{-12}{4}=-3$$

$$2x^2+5x-3=2\left(x-\frac{1}{2}\right).(x+3)$$

Igualamos a cero y determinamos los valores de **a, b** y **c.**
Sustituimos los valores de a, b y c en la ecuación cuadrática
Resolvemos lo que está dentro de la raíz:

$5^2 = 25$

-4 . 2 . (-3) = -8 . (-3) = + 24

Extraemos la cantidad subradical por ser un cuadrado perfecto.
Obtenemos dos valores de la x uno sumando 7 y el otro restándolo.
Así obtenemos:

$x_1=\frac{1}{2}$ $x_2=-3$

Reemplazamos los valores en la fórmula general.
Recuerda que x-(-3) = x + 3

REGLA DE RUFFINI

Se aplica para cualquier polinomio que tiene raíces enteras; es decir, encontrar valores de x (números enteros) que al sustituirlos en el polinomio nos da cero.

Por ejemplo, si un polinomio de cuarto grado, tiene cuatro raíces enteras,

x_1, x_2, x_3 y x_4

se factoriza así:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$$

Pero ¿cómo se aplica la regla de Ruffini para obtener las raíces?

Ejemplo Nº 12: Factorizar

Se aplica la regla de Ruffini, probando los divisores del término independiente, (en este caso de 12,) o sea que se prueba con 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 6, -6, 12 y –12

*Probemos con **uno (1)***

$$x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12$$

	1	-4	-1	16	-12	Se copian los coeficientes del polinomio.
1						Escribimos el número seleccionado a la derecha (a este lo llamaremos raíz).
	1					Se copia el primer coeficiente debajo de él mismo.

	1	-4	-1	16	-12	Se multiplica la raíz por el primer coeficiente que se bajó y el producto se copia en la segunda fila debajo del segundo coeficiente. Luego se efectúa la suma algebraica de las dos cantidades ubicadas en las columnas donde se colocó el producto.
1		1				
	1	-3				

	1	-4	-1	16	-12	Se multiplica la raíz por el resultado de la suma algebraica realizada y este producto se copia en la segunda fila debajo del tercer coeficiente. Luego se efectúa la suma algebraica de las dos cantidades ubicadas en las columnas donde se colocó el producto.
1		1	-3			
	1	-3	-4			

	1	-4	-1	16	-12	Se vuelve a multiplicar y sumar el producto con el siguiente coeficiente.
1		1	-3	-4		
	1	-3	-4	12		

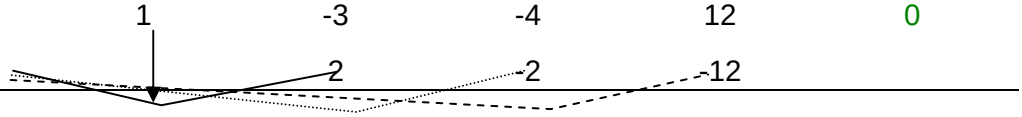
	1	-4	-1	16	-12	Se efectúa el último producto y la última suma. Como el resultado final es cero (o), esto nos indica que el 1 sí es una raíz del polinomio y nos sirve para factorizar.
1		1	-3	-4	12	
	1	-3	-4	12	0	
(x – 1)	. ($x^3 - 3x^2 - 4x + 12$)					Hasta ahora tenemos un producto como se observa al utilizar los nuevos coeficientes obtenidos.

Si el resultado hubiese sido distinto de cero, habría que seguir probando los demás divisores de 12.

De hecho ya hemos factorizado el polinomio, pero el segundo factor de tercer grado debemos intentar seguir factorizándolo.

Probando ahora por 2 y aplicando otra vez la regla queda:

	1	-4	-1	16	-12
1		1	-3	-4	12
	1	-3	-4	12	0
2		2	-2	-12	
	1	-1	-6	0	



	Así hemos conseguido la segunda raíz, por lo que el polinomio va quedando factorizado de la siguiente manera: $(x-1).(x-2).(x^2-x-6)$ Ahora seguimos aplicando la regla para encontrar las otras raíces.

	1	-4	-1	16	-12
1		1	-3	-4	12
	1	-3	-4	12	0
2		2	-2	-12	
	1	-1	-6	0	
-2		-2	6		
	1	-3	0		

	La nueva raíz en -2 y el último cociente se toma con la raíz -3 La factorización final es: $x^4-4x^3-x^2+16x-12=(x-1)(x-2)(x+2)(x-3)$ Si en las sucesivas pruebas no encontramos ningún resto cero, quiere decir que el polinomio no se puede factorizar dentro de los números reales. RESUMIENDO: Según como sea el polinomio hay métodos que se pueden aplicar y otros que no. Se aconseja que se intenten aplicar los cinco métodos sucesivamente, es decir, en primer lugar se puede extraer el factor común, y luego se pueden seguir aplicando otros de los métodos.

EJERCICIOS PROPUESTOS:

1. Para cada una de las siguientes expresiones, señale: tipo de expresión y sus características:

a) $P(x) = 3x^4 + 5x^2 - \frac{4}{3}x + 12$, b) $Q(x) = \frac{2}{5}x - \frac{3}{4}$

c) $R(x) = 12\,x^3 + 5x - 1$ d) $T(x) = 23\,x^4$

2. Hallar el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas, para los valores dados:

a. $x^2 + 2xy + y^2$ para $x = 2$, $y = 3$ c) $\frac{x^2 - 2xy}{x} + y^2$ para $x = 5$, $y = 3$

b. $\sqrt{x^3 - 3x^2y}$ para $x = 13$, $y = 3$

3. Para cada una de las siguientes expresiones agrupe los términos semejantes:

a) $a - \{5b - [a - (3c - 3b) + 2c - (a - 2b - c)]\ \}$

b) $5mc^2 - \left[x^2 - (3c - 3mc^2) + 2c - (x^2 - 2mc^2 - c)\right]$

4. Dados los polinomios, P, Q, R y S:

P(X)= $\frac{x^3 - 3x}{2x^2}$; Q(X)= $\frac{3}{2x - 5}$;

R(X)= $\frac{2 - x}{3x}$; S(X)= $\frac{8}{x^3}$

Hallar:

a) P(X)+Q(X) b)P(X)-Q(X)+ R(X) c) Q(X)-R(X)+S(X)

5. Para $P(a) = 3a^2 - 7ab + 3b^2 - 2$, $Q(a) = a^2 - ab + 6ab^2 + 5a^2b - 3b^2$

$R(a) = 5a^2b + 3ab^2 - \left(a^2 - 2b^2\right)$, $S(a) = b^2 - 7a^2 + 4ab$.

Hallar:

a) $Q(a) + P(a)$ b) $R(a) + P(a) - Q(a)$ c) $Q(a) - R(a) + S(a)$

6. Dados los polinomios, P y Q , hallar el producto $P \cdot Q$:

a) $P(x) = \frac{x^2 + xy + y^2}{x - y}$; $Q(x) = \frac{2x - y}{2y}$

b) $P(a) = a^3 - 5a + 2$; $Q(a) = a^2 - a + 5$

c) $P(m) = \frac{5m^4 - 3m^2}{3m^6}$; $Q(m) = \frac{7m}{2m + 3}$

d) $P(x) = 8x^3 - 9y^3 + 6xy^2 - 12x^2y$ $Q(x) = 2x + 3y$

7. Dados los polinomios, P y Q , hallar la división $P \div Q$ y determinar en cada uno de los casos cual es **el cociente** y cuál es **el residuo**:

a) $P(x) = 5x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 171x + 4$; $Q(x) = x^2 + 3x + 1$

b) $P(x) = \dfrac{15\,m^2}{19\,ax^3}$; $Q(x) = \dfrac{20\,y^2}{38\,a^3x^4}$

c) $P(x) = \dfrac{x^3 - x}{2x^2 + 6x}$ $Q(x) = \dfrac{5x^2 - 5x}{2x + 6}$

d) $P(x) = 16x^8 - 16y^8$ $Q(x) = 2x^2 + 2y^2$

e) $P(x) = 3x^5 - 21x^4y + 10x^3y^2 + 64x^2y^3 + 32xy^4$; $Q(x) = x^3 - 5x^2y - 4xy^2$

8. Resuelva los siguientes productos notables:

a) $(X - 5)^2$ b) $(2X/3 - 1/5)^2$ c) $(a/3 - 3)^2$

d) $(X^2 - 2)^2$ e) $(X^{a-1} - 1)^2$ f) $(2xy - x^2)^2$

g) Si $a^2 + b^2 = 13$ y $a \cdot b = 6$ ¿cuánto vale $(a - b)^2$?

h) Calcula los productos: a) $(-x - a)^2$

i) $(x + a)^2$ ¿Qué relación existe entre ellos? ¿Por qué?

j) Se necesita revestir un piso con cerámica, el cual tiene forma cuadrada de lado **x,** pero la cantidad de cerámica sólo cubre una superficie también cuadrada que tiene ¾ de metro menos por cada lado del área total. ¿Cuántos m^2 de cerámica se compraron?

k) ¿Qué diferencia observas en estos ejercicios? : i) $(x - a)^2$

ii) $x^2 - a^2$

9. Resolver:

a) $(x^2 + 6) \cdot (x^2 - 2)$ d) $(a^3 + 1/5) \cdot (a^3 + 2/3)$

b) $(y - 3/5) \cdot (y + 4)$ e) $(2x - 7) \cdot (2x + 2)$

c) Si se cumple que $(x + a) \cdot (x + b) = x^2 - 2x + 8$ entonces ¿cuánto vale a + b?

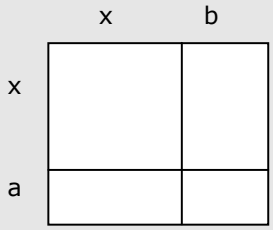
d) ¿Para qué valores de la x se cumple que el producto de:

a) (x + 3) por

b) (x - 1) es igual a cero?

e) Si a un cuadrado cuya área mide x^2 se le suma a un lado 9 cm. y en el otro se le resta 2cm, ¿cuál será el área de la nueva figura?

f) Calcula el área del siguiente rectángulo:

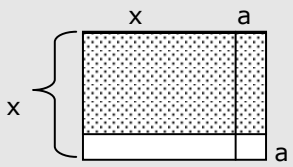


g) $(y - 3/5) . (y + 3/5)$ h) $(x^2 + 6) . (x^2 - 6)$ i) $(a^3 + 1/5) . (a^3 - 1/5)$

j) $(x/3 + 2/7) . (x/3 - 2/7)$ k) $(2x - 7) . (2x + 7)$

l) Si a un cuadrado cuya área mide x^2 se le suma a un lado 5 m y en el otro se le resta 5 m ¿cuál será el área de la figura que se originó?

Calcula el área de la figura sombreada:



10. Resuelva los siguientes cubos

a) $(x + 3)^3$ d) $(3X/2 + 4/5)^3$ f) $(y/3 + 3)^3$

b) 57- $(x^2 + 5)^3$ e) $(xy + xz)^3$ g) $(a^2 b + ac)^3$

c) 60- $(2xy + y^2)^3$

h) Si el volumen de un cubo es 27 cm^3 ¿Cuál será el nuevo volumen si se aumenta su arista en x unidades?

i) 62 $(X - 1/2)^3$ k) $(2X/3 - 1/5)^3$ m) $(a/3 - 3)^3$

j) 65- $(X^2 - 5)^3$ l) $(xy - xz)^3$ n) $(2xy - x^2)^2$

11. Factoriza:

1- $x^2 + 2x + 3$	2- $x^2 - a^2 + x - a^2 x$
3- $3x^5 - 48x$	4- $4x^{12} + 12x^6 + 9$
5- $x^3 - 12x^2 + 41x - 30$	6- $3xm^2 - x + 3m^2 - 1$
7- $3x^2 + 15x + 18$	8- $3x^3 + 3x^2 + 3x + 3$
9- $\frac{x^2}{4} + \frac{xy}{3} + \frac{y^2}{9}$	10- $\frac{a^2}{100} - \frac{b^4}{9}$

Calcula el valor de k en:

11- $P(x) = -2x^4 - 6x^3 + 5x - k \quad si \quad P(-2) = 35$

12- $P(x) = 8x^4 - \frac{1}{4}x^2 + 12x + k \quad si \quad P\left(\frac{1}{2}\right) = 125$

13- Si el volumen de un paralelogramo viene dado por la fórmula: $V = x^3 + 5x^2 + 6x$. ¿Cuáles podrían ser las medidas de las aristas (largo, ancho y altura)?

14- ¿Para qué valor de n se cumple que: $x^n - x = x(x^2 - 1)$?

15- ¿De cuántas maneras podemos factorizar el número 64?