

# GEODESIA TEORIA Y PRACTICA

**Pedro Garafulic Caviedes**

Universidad de Santiago de Chile

## Resumen

El autor relata diferentes tópicos que rigen el estudio de la Geodesia de manera teórica y practica, siendo esto base fundamental para la comprensión de la determinación de la dimensión y forma de la Tierra, problema principal de esta geociencia.

### 1. Introducción.

La Geodesia es la ciencia que estudia y define la dimensión y forma de la Tierra. Tal forma recibe el nombre de Geoide y se genera por la superficie equipotencial del campo de gravedad, la que de manera práctica se relaciona con el nivel medio del mar en reposo.

El problema de la Geodesia es la determinación de la figura de la Tierra y de su campo gravitatorio externo en función del tiempo, así como también la determinación del elipsoide medio terrestre a partir de parámetros observados sobre la superficie o desde el exterior.

### 2. Reseña Histórica.

El desarrollo de la Geodesia comenzó a gestarse con Pitágoras (550 a. J. C) el cuál fue el primero en darse cuenta de la esfericidad de la Tierra. Tres siglos después, Eratóstenes (250 a. J. C.) se propuso por primera vez determinar las dimensiones de la esfera. Para ello midió la distancia cenital del Sol en Alejandría, en el momento en que

los rayos solares llegaban al fondo de los pozos en Siena (actual Asuan), lo que era motivado por el paso del Sol por su cenit. Midiendo asimismo la distancia que había entre ambas ciudades, obtuvo un primer valor del radio de la Tierra bastante aceptable, si se considera los medios de que dispuso. El error que cometió no llegó a ser más que de 600 km en la longitud de la circunferencia, que es de unos 40.000 km.

Hasta comienzos del siglo XVII no se habían hecho mejoras a los trabajos de Eratóstenes.

Fue Newton, en 1687, el que enunció el principio fundamental siguiente: la forma de equilibrio de una masa fluida homogénea sometida a las leyes de la gravitación universal, y girando alrededor de un eje, es un elipsoide de revolución achatado en los polos. Las medidas realizadas, sin embargo, expresan claramente que la Tierra no era un elipsoide perfecto. La hipótesis de Newton no se verificaba sólo si las masas internas del planeta fueran homogéneas y por ello se admitió y se admite hoy como forma de la Tierra, con motivo de facilitar los modelos matemáticos de ella.

En las últimas décadas, los notables avances en tecnología satelital e información y su masiva difusión posibilitan el acceso y manejo de grandes volúmenes de información. Con la aparición de nuevas técnicas de medición, en particular los sistemas de posicionamiento global (GPS), renace la importancia de contar con

sistemas que representen la Tierra en su forma real: El Geoide. El conocimiento del Geoide será una herramienta muy poderosa en la Geodesia del futuro. Distintas ramas de las Ciencias de la Tierra, en particular de la Geofísica, podrán utilizar los resultados de esta actividad y aplicarlos a estudios específicos (prospección, geodinámica, geotectónica, etc).

La Geodesia se está focalizando en los últimos años hacia tres temas muy vinculados entre sí: GPS, Geoide y Geodinámica. De allí la importancia de los modelos matemáticos y físicos geoidales regionales, realizados con métodos y cálculos que destacan problemáticas particulares de cada región (características topográficas, comportamientos de la corteza, etc.).

### 3. Sistemas de Referencia Geodésicos.

Los sistemas de referencia geodésicos definen la forma y dimensión de la Tierra, así como el origen y orientación de los sistemas de coordenadas. Los sistemas de referencia geodésicos pueden ser descritos en base a dos modelos matemáticos: el esférico y el elipsoidal, los cuales son obtenidos en base parámetros físicos medidos sobre la superficie terrestre, tales como la aceleración de gravedad.

Los sistemas globales de coordenadas nos permiten definir posiciones sobre la superficie de la Tierra. El más comúnmente usado sistema es el de la latitud, longitud y altura. El primer meridiano y el ecuador son los planos que definen la latitud y la longitud.

La latitud geodésica de un punto, es el ángulo desde el plano ecuatorial a la dirección vertical de la línea normal al elipsoide de referencia.

La longitud geodésica de un punto es el ángulo que forma el meridiano que pasa por el punto con el meridiano origen en sentido dextrógiro.

La altura elipsoidal de un punto es la distancia desde el elipsoide de referencia a el punto en dirección normal al elipsoide.

Dentro de un sistema cartesiano global las coordenadas están expresadas en función de los ejes X Y Z, del cual su origen es el centro de masas de la Tierra. El eje Z es paralelo al eje de rotación terrestre, el eje X a su vez es paralelo al meridiano de Greenwich y por último el eje Y es perpendicular al plano XOZ.

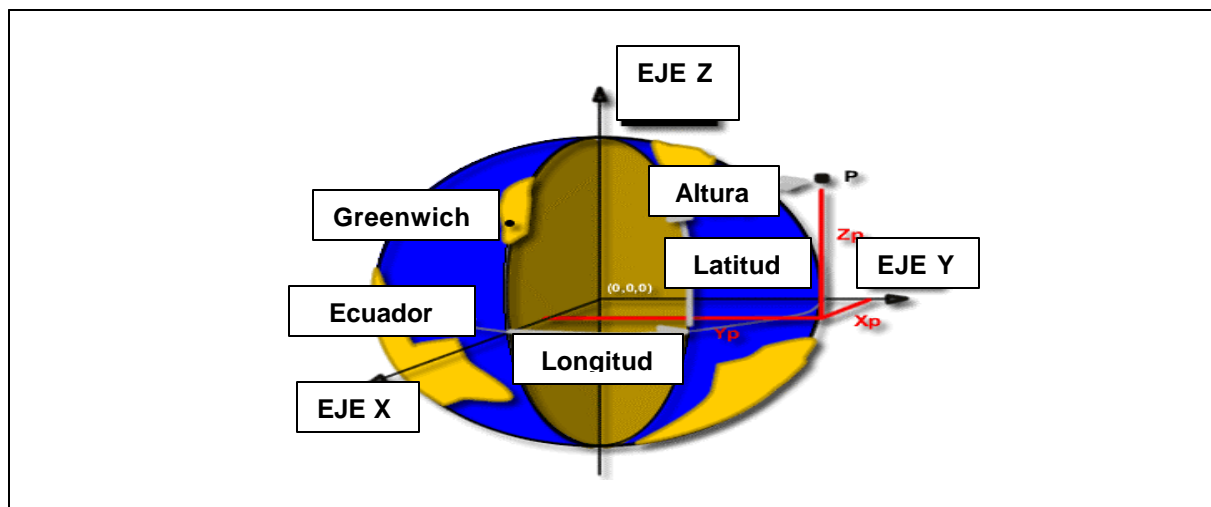


Figura 1. Sistemas de Referencia Geodésicos

#### 4. Sistemas Clásicos de Referencia.

Uno de los problemas clásicos de los geodestas ha sido la determinación de sistemas de referencia sobre los cuales realizar los cálculos de las posiciones tanto planimétricas como altimétricas, con la precisión requerida. Las redes geodésicas nacionales o locales, (X, Y, Z) o latitud, longitud y altura ortométrica están calculadas sobre sistemas de referencia consistente en la definición de:

- Un elipsoide de referencia.
- Un punto fundamental.
- Origen de longitudes
- Origen de latitudes

En Chile se utilizan dos datum geodésicos:

**Psad-56**, que significa Datum Sudamericano Provisorio del año 1956, y su punto de origen se encuentra en La Canoa, Venezuela.

**Sad-69**, que es el Datum Sudamericano del año 1969, con el punto origen en Chua, Brasil.

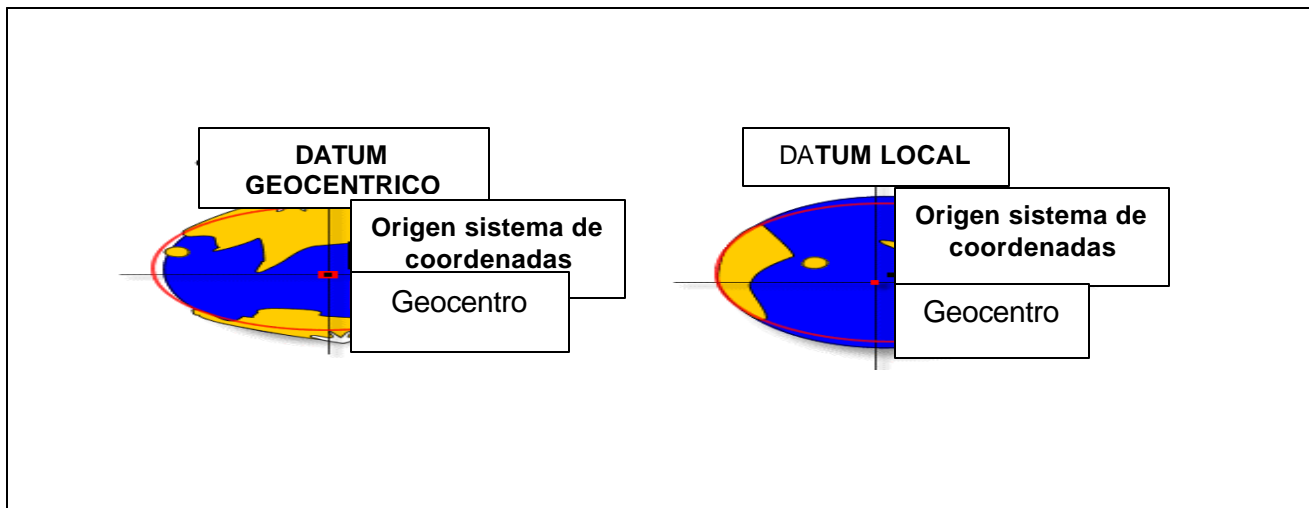


Figura 2. Modelos de elipsoidales de referencia

#### 5. Conversión de cordenadas geodésicas a cartesianas

Si se toma como una figura próxima a la Tierra un elipsoide de revolución, la posición de cualquier punto sobre la superficie terrestre, quedará definida por las coordenadas geodésicas geocéntricas latitud, longitud y altura (esta ultima será la diferencia entre el elipsoide y la superficie topográfica).

El problema que se presenta es encontrar la relación entre estas coordenadas y sus coordenadas cartesianas. Sabiendo que la ecuación del elipsoide de referencia en coordenadas rectangulares es

$$((X^2 + Y^2)/ a^2) + (Z^2 / b^2) = 1 \quad (5.1)$$

Para esta situación se define que el centro del elipsoide coincide con el centro de masa de la Tierra (geocentro) y el eje Z coincide con el eje de revolución del elipsoide. De esta manera se tiene que las coordenadas cartesianas de un punto P sobre el elipsoide en función de las coordenadas geográficas son:

$$X = N * \cos (\varphi) * \cos (\lambda) \quad (5.2)$$

$$Y = N * \cos (\varphi) * \text{sen} (\lambda) \quad (5.3)$$

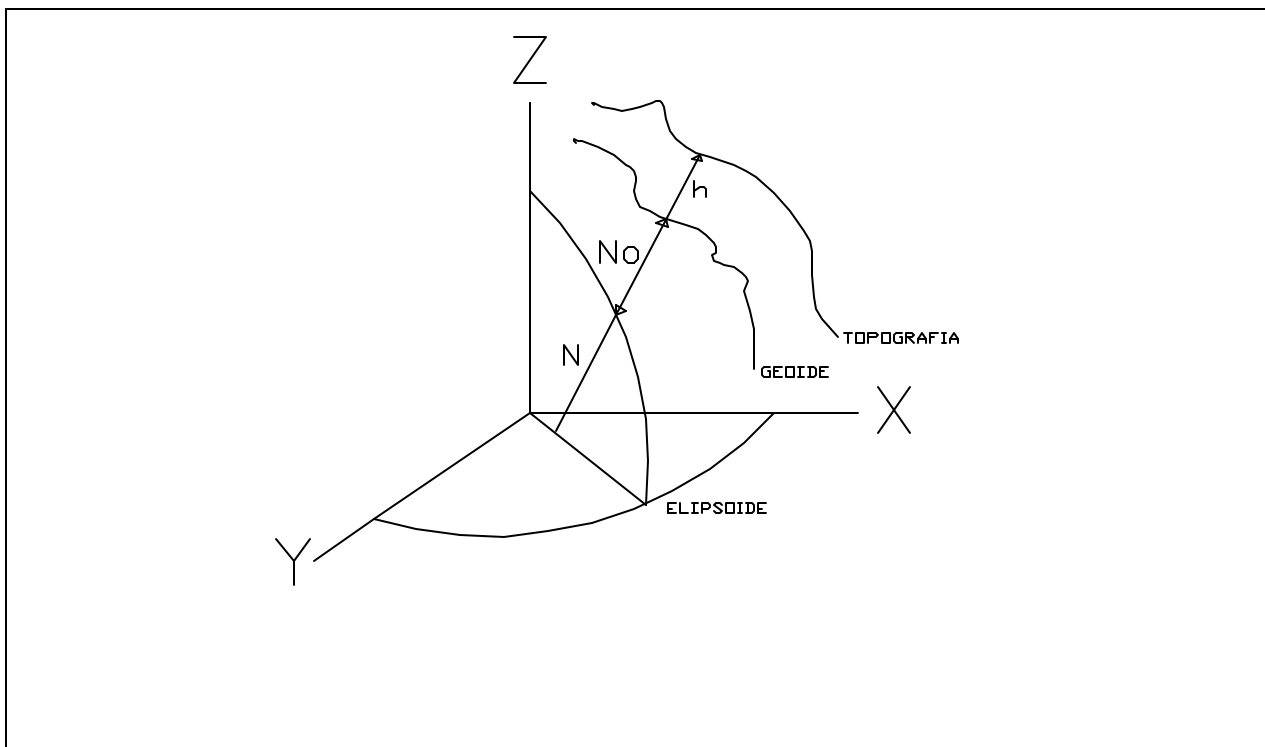
$$Z = N * (b^2/a^2) * \text{sen} (\varphi) \quad (5.4)$$

Luego las coordenadas de un punto P sobre el espacio, normal al elipsoide son:

$$X = (N + h) * \cos (\varphi) * \cos (\lambda) \quad (5.5)$$

$$Y = (N + h) * \cos (\varphi) * \text{sen} (\lambda) \quad (5.6)$$

$$Z = (N * (b^2/a^2) + h) * \text{sen} (\varphi) \quad (5.7)$$



**Figura 3 Parámetros de medición elipsoidal de la Tierra**

## 6. Conversión de coordenadas cartesianas a geodésicas

Ahora el problema es inverso, por lo cual se debe buscar la relación que existe entre las coordenadas cartesianas y las geodésicas, que nos permitan convertir desde XYZ a latitud, longitud y altura elipsoidal.

El problema se resuelve aplicando las siguientes fórmulas:

$$\varphi = \arctan \frac{Z + e'^2 + b \operatorname{sen}^3(\theta)}{\rho - e'^2 + \cos^3(\theta)} \quad (6.1)$$

$$\lambda = \arctan \frac{Y}{X} \quad (6.2)$$

$$h = \frac{\rho}{\cos \varphi} - N \quad (6.3)$$

$$\theta = \arctan \frac{Z a}{\rho b} \quad (6.4)$$

$$e'^2 = \frac{a^2 + b^2}{b^2} \quad (6.5)$$

$$\rho = \sqrt{X^2 + Y^2} \quad (6.6)$$

$$N = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} \quad (6.7)$$

## 7. Determinación de ángulos sobre el elipsoide

Calculando el valor del exceso esférico de un triángulo en el que hayan sido observados los tres ángulos, deberá verificarse que

$$A + B + C - 180^\circ - \varepsilon = 0 \quad (7.1)$$

Donde el exceso esférico del triángulo es igual en segundos a:

$$\varepsilon'' = (b * c * \operatorname{sen} A) / (2 * Rm^2 * \operatorname{sen} 1'') \quad (7.2)$$

$\varepsilon$  = Exceso esférico  
 b = Lado del triángulo  
 c = Lado del triángulo  
 A = Angulo del triángulo esférico  
 Rm = Radio meridiano

Esta situación, en general no se cumple, sino que

$$A + B + C - 180^\circ - \varepsilon = E \quad (7.3)$$

El valor de este segundo miembro E se llama error de cierre del triángulo, y aparece como consecuencia de los errores cometidos en las observaciones geodésicas. En la compensación de la red geodésica intervienen estos errores de cierre de los triángulos que la constituyen.

En la práctica, los vértices geodésicos a los que se refieren las observaciones no son puntos del elipsoide, sino puntos situados sobre la superficie física de la Tierra. Por lo que se deben considerar bajo ciertos casos (distancias más de 100 km entre vértices de observación) las siguientes correcciones, que permitirán reducir los ángulos observados al elipsoide.

A continuación se analizarán cuáles son las correcciones a introducir a los ángulos observados para reducirlos al elipsoide de referencia.

### 7.1 Corrección por desviación de la vertical

Al hacer estación en un vértice de la red se refieren las observaciones a la vertical astronómica. Esta situación se explica ya que cuando estacionamos sobre la superficie un instrumento de plomada, este se nivela en función de la fuerza de gravedad que se ejerce sobre la estación. Dicho de otra manera, el instrumento habrá quedado normal a la superficie equipotencial. Debido de que la vertical astronómica y la vertical al elipsoide sobre el mismo punto no coinciden, ambas verticales forman un pequeño ángulo conocido como desviación relativa de la vertical. La existencia de este ángulo hace que el acimut astronómico no coincida con el acimut geodésico (excepto en el punto fundamental). Sin embargo, el error, que produce esta desviación de la vertical es siempre muy pequeño y para la mayoría de los casos prácticos no se tiene en cuenta.

El ángulo (e) puede estimarse mediante la siguiente fórmula:

$$\tan(e) = ((H_2 - H_1) - 0.067 * D^2) / 1000 * D \quad (7.4)$$

Las fórmulas que determinan esta corrección son:

$$\text{Corrección por desviación de la vertical} = -\zeta * \tan e \quad (7.5)$$

Donde:

$$\zeta = \varphi * \sin \alpha - \eta * \cos \alpha \quad (7.6)$$

- $\xi$  = Es la componente de la desviación de la vertical en el meridiano, en segundos de arco, y es igual a la latitud astronómica menos la latitud geodésica.
- $\eta$  = Es la componente de la desviación de la vertical en la primera vertical, en segundos de arco, y es igual a la longitud astronómica menos la longitud geodésica.
- $\alpha$  = Acimut de la línea observada.
- $e$  = Angulo de elevación de la línea observada (puede ser positivo o negativo).
- $H_2$  = Altura de la estación de referencia (en metros).
- $H_1$  = Altura de la estación de observación (en metros).
- $D$  = Distancia entre la estación de referencia y la observada (en kilómetros).

## 7.2 Corrección por paso de la sección normal a la línea geodésica

La reducción anterior permitirá pasar de los ángulos acimutales observados a los ángulos formados por dos planos normales al elipsoide, es decir, al ángulo de las secciones normales correspondientes. Pero como los triángulos geodésicos elipsódicos quedan definidos por líneas geodésicas y no por secciones normales, será necesario introducir una corrección para pasar del ángulo formado por las dos secciones normales del elipsoide al ángulo de las líneas geodésicas correspondientes.

La fórmula que expresa esta corrección en segundos es la siguiente:

$$\delta'' = ((e^2 * s^2) / (12 * N^2 * \text{sen } 1'')) * (\cos^2\varphi * \text{sen } (2z) - (1/2) * (s / N) * \text{sen } (2\varphi) * z) \quad (7.7)$$

- $e$  = excentricidad del elipsoide  
 $s$  = longitud del lado geodésico  
 $N$  = Gran normal con latitud media  
 $z$  = acimut medio  
 $\varphi$  = latitud media

## 7.3 Corrección por altura del punto observado

La altura de los puntos observados hace necesario el cálculo de una nueva corrección. En efecto las normales en los puntos A y B del elipsoide son dos rectas que, en general, no se cortan. Por tanto, si desde el vértice A se observa una señal en B (b) a una cierta altura  $Bb = h$  sobre el elipsoide, el plano determinado por la normal en A y el punto b será generalmente distinto al de la misma sección normal en A y que pasa por B.

Esta corrección se expresa por la siguiente ecuación:

$$\zeta'' = ((e^2 * h) / (2 * N * \text{sen } 1'')) * \cos^2\varphi * \text{sen } (2z) + ((e^2 * h * s) / (4 * N^2 * \text{sen } 1'')) * \text{sen}^2\varphi * \text{sen } z \quad (7.8)$$

## 8. Proyección universal transversal de Mercator

Las coordenadas geodésicas (latitud y longitud) son representadas sobre mapas o cartas, por proyecciones matemáticas conformes, que permiten llevar las mediciones geodésicas al plano.

El sistema de proyección de Mercator es un sistema cilíndrico transversal conforme, tangente al elipsoide de referencia a lo largo de un meridiano origen. Ahora bien, este sistema aplicado a grandes extensiones en longitud, hace que, según se va alejando del meridiano de tangencia, las deformaciones alcancen valores considerables. Por esta razón se subdivide la superficie terrestre en 60 husos iguales de  $6^\circ$  de amplitud, que constituyen 60 proyecciones iguales, pero referida cada una al meridiano central del huso respectivo y al Ecuador. Las fórmulas de transformación que definen el sistema, se adecuan para cualquier huso, así como todos sus parámetros son válidos para representar la superficie de la Tierra en base a un elipsoide de revolución cuyo eje es el terrestre.

La proyección UTM es conforme, siendo el meridiano central de cada huso automecoico y representado según una línea recta. La utilidad que tiene esta proyección, por su conformidad como aplicación a los problemas geodésicos, la hace recomendable para la representación de casi todos los países del globo, exceptuando aquellas zonas situadas a  $\pm 80^\circ$  de latitud en donde debe complementarse con una proyección estereográfica.

Las condiciones que se imponen a esta proyección son:

1. La proyección será conforme.
2. El meridiano central será automecoico.
3. El Ecuador y el meridiano central de cada huso ( $-69^\circ$  y  $-75^\circ$  para Chile) se representarán por líneas rectas.
4. El origen de coordenadas en la proyección será el correspondiente a la intersección del Ecuador y el Meridiano Central del huso.

Los parámetros que definen la proyección UTM son:

- Primer meridiano central (huso 1) =  $177^\circ$  longitud oeste
- Separación entre husos =  $6^\circ$
- Factor central de escala = 0.9996
- Este Falso = 500 000 m
- Norte Falso = 10 000 000 m

Los problemas que se presentan al analizar esta proyección son:

- 1) Transformación de coordenadas geográficas en UTM y viceversa.
- 2) Cálculo de convergencia de meridianos.
- 3) Determinación del Coeficiente de deformación lineal.
- 4) Cálculo de reducción a la cuerda.
- 5) Cálculo de acimutes UTM y geodésico.
- 6) Cálculo de distancia y cota geodésica.
- 7) Transformación de distancia geodésica a plana UTM.
- 8) Obtención de Coordenadas geográficas y UTM.



## 9. Sistema de Posicionamiento Global GPS

El funcionamiento del Sistema se monitorea a través de un sistema de control, el cual consiste de una estación de control master localizada en Colorado Springs, EEUU, 5 estaciones de monitoreo repartidas por el mundo, y 3 antenas.

A través del procesamiento de la información en la estación de control master se calculan las efemérides y parámetros de los relojes de los satélites NAVSTAR. La información sobre efemérides y relojes son periódicamente transmitidas en forma de mensajes de navegación a los satélites desde las antenas en la Tierra, para su transmisión posterior desde los satélites a los usuarios. El segmento de control también tiene a cargo el funcionamiento apropiado de los satélites.

Los equipos receptores constan básicamente de una antena, un receptor, capacidad para procesamiento de señales y almacenamiento de datos. La señal de radio transmitida por cada satélite es recepcionada por el equipo conociendo el código de la señal PRN (ruido pseudoaleatorio), obteniendo de esta manera la información de la pseudodistancia y detectando el mensaje de navegación. La información obtenida de 4 satélites permite calcular la posición tridimensional, la velocidad y la hora.

### 9.1 Cálculo de la pseudodistancia

Los receptores usan la interferometría, retrasando un replica del código PRN de los satélites almacenados en la memoria y luego lo compara con el código de entrada. En una sincronización precisa, el código desaparece dejando sólo la onda portadora. Asimismo, la cantidad de retardo puede convertirse en una medición de distancia entre el satélite y el receptor. A esta distancia se le conoce como medición de pseudodistancia ya que tiene un margen de error, principalmente debido a error en la sincronización del reloj del receptor.

Para la medición de estas pseudodistancias, todos los receptores emplean el código C/A; el cual no posee restricciones para su uso. El código C/A se transmite con una frecuencia de 1.023 Mhz y se repite cada 1/1000 de segundo. Considerando que la señal viaja a la velocidad de la luz, cada elemento del código tendrá una longitud aproximada de 300 metros. Las fracciones se pueden estimar en el orden del 1% de la unidad de medida o  $\pm 3$  metros. Esto es adecuado para Navegación pero no para Geodesia.

El código P se genera para un ciclo de 267 días y se transmite con una frecuencia de 10.23 Mhz, por lo que cada elemento del código tiene una longitud aproximada de 30 metros. Su precisión es 10 veces mayor que el código C/A, es decir, de unos 30 cms. En cada satélite se graba una porción de una semana del código P total. Este código está destinado al uso militar, por lo cual se dificulta descifrarlo con el objetivo de evitar que usuarios no autorizados hagan uso de él o generen intencionalmente interferencias. Así es como actualmente este código se oculta a través de un código denominado Y.

## 9.2 Posición del receptor

Las mediciones de pseudodistancia se utilizan para localizar la posición del receptor en el espacio. Si el receptor usara un reloj atómico sincronizado con los relojes atómicos de los satélites, se podría intersectar las mediciones de distancias a 3 satélites, cuyas posiciones son obtenidas por los datos de las efemérides, y así determinar la posición X, Y, Z del receptor.

Debido a que se usan distintos relojes, es necesario un cuarto satélite para que el reloj del receptor pueda ser sincronizado con la hora GPS, y de esta forma se pueda resolver el error del receptor.

Las ecuaciones utilizadas para resolver este problema son las siguientes.

$$R_{j,i}(t) = \rho_{j,i}(t) + c \Delta\delta_{j,i}(t) \quad (9.1)$$

$$\rho_{j,i}(t) = \sqrt{((X_j(t) - X_i)^2 + (Y_j(t) - Y_i)^2 + (Z_j(t) - Z_i)^2)} \quad (9.2)$$

$$\delta_j(t) = a_0 + a_1(t - t_c) + a_2(t - t_c)^2 \quad (9.3)$$

$R_{j,i}(t)$  es la pseudodistancia medida entre el sitio de observación  $i$  y el satélite  $j$ ,  $\rho_{j,i}(t)$  es la distancia geométrica entre el satélite y el punto de observación, y  $c$  es la velocidad de la luz.  $\Delta\delta_{j,i}(t)$  representa el desfase en tiempo GPS entre el satélite y el receptor.

Los términos  $a_0$ ,  $a_1$  y  $a_2$  corresponden a coeficientes polinomiales transmitidos en el mensaje de navegación y que representan información del reloj del satélite con respecto al tiempo de referencia  $t_c$ , y que permite relacionar las observaciones hechas a una época  $t$ .

Debido a que existen 4 incógnitas  $X_i$ ,  $Y_i$ ,  $Z_i$  y tiempo será necesario 4 ecuaciones para resolver la posición del receptor. La solución como se observa corresponden a coordenadas cartesianas geocéntricas, las que pueden ser transformadas a coordenadas geodésicas utilizando las fórmulas tratadas en punto 6.

## 9.3 Técnica diferencial

Los receptores GPS de mapeo sirven también para establecer el posicionamiento diferencial (DGPS). Las posiciones diferenciales pueden calcularse en tiempo real o mediante técnicas de posprocesamiento.

No hay que confundir esta técnica de posicionamiento con la técnica de procesamiento de la línea base. El posicionamiento diferencial emplea pseudodistancias procedentes de dos receptores para calcular y corregir la localización de un receptor. El procesamiento topográfico de la línea base emplea observables de la fase portadora para calcular la localización en relación a otro.

El posicionamiento diferencial utiliza la posición de los puntos obtenidos de las pseudodistancias del código C/A o del código P y aplica correcciones a esa posición. Estas correcciones son generadas por un receptor referencia y las utiliza un segundo receptor para corregir su posición generada internamente. Puesto que el receptor de referencia "conoce" su posición (ocupa una estación topográfica de posición conocida), calcula los errores entre la posición conocida y su posición calculada, y pasa las diferencias (o correcciones) al otro receptor. Se supone que los dos receptores sufren (aproximadamente) los mismos errores de magnitud de geometría y de tiempo, y que la mayoría de los errores comunes se cancelan empleando esta técnica de corrección. La precisión del posicionamiento diferencial utilizando pseudodistancias de código C/A es generalmente del orden de submetro a 3 metros, y las fórmulas que expresan este cálculo son las siguientes.

$$R_{j,A}(t_0) = \rho_{j,A}(t_0) + \Delta\rho_{j,A}(t_0) + c\delta_j(t_0) - c\delta_A(t_0) \quad (9.4)$$

En esta primera expresión se obtiene la pseudodistancia a una época  $t_0$ . El error en distancia está dado por  $\Delta\rho_{j,A}(t_0)$ . Debe notarse que  $\rho_{j,A}(t_0)$  es conocido. La corrección en pseudodistancia para el satélite  $j$  referido a la época  $t_0$  es obtenido por esta segunda fórmula.

$$\begin{aligned} PRC_j(t_0) &= -R_{j,A}(t_0) + \rho_{j,A}(t_0) & (9.5) \\ &= -\Delta\rho_{j,A}(t_0) - c\delta_j(t_0) + c\delta_A(t_0) \end{aligned}$$

Para una serie de observaciones a diferentes tiempos el valor de la corrección de la pseudodistancia  $RRC_j(t_0)$  puede ser evaluada por diferenciación numérica. En esta expresión se observa la aproximación de esta corrección a una época  $t$ . El término  $(t - t_0)$  tiene gran importancia en la precisión de la corrección.

$$PRC_j(t) = PRC_j(t_0) + RRC_j(t_0)(t - t_0) \quad (9.6)$$

La pseudodistancia para una estación remota B medida a una época  $t$  puede ser modulada mediante la siguiente ecuación.

$$R_{j,B}(t) = \rho_{j,B}(t) + \Delta\rho_{j,B}(t) + c\delta_j(t) - c\delta_B(t) \quad (9.7)$$

Aplicando la corrección a la pseudodistancia se obtiene

$$\begin{aligned} R_{j,B}(t)_{\text{corr}} &= R_{j,B}(t) + PRC_j(t) & (9.8) \\ &= \rho_{j,B}(t) + (\Delta\rho_{j,B}(t) - \Delta\rho_{j,A}(t)) - (c\delta_B(t) - c\delta_A(t)) \end{aligned}$$

Se observa en esta última expresión que el error del reloj del satélite desaparece

$$R_{j,B}(t)_{\text{corr}} = \rho_{j,B}(t) - c\Delta\delta_{AB}(t) \quad (9.9)$$

#### 9.4 Técnica diferencial por observación de fase

La obtención de la pseudodistancia mediante la observación en fase en la estación A a la época  $t_0$  puede ser modelada por

$$\lambda \phi_{j,A}(t_0) = \rho_{j,A}(t_0) + \Delta\rho_{j,A}(t_0) + \lambda N_{j,A} + c \delta_j(t_0) - c \delta_A(t_0) \quad (9.10)$$

donde  $N_{j,A}$  es la desconocida ambigüedad de fase. La corrección por fase a la pseudodistancia en la época de referencia  $t_0$  queda expresada por la siguiente fórmula.

$$\begin{aligned} \text{PRC}_j(t_0) &= -\lambda \phi_{j,A}(t_0) + \rho_{j,A}(t_0) & (9.11) \\ &= -\Delta\rho_{j,A}(t_0) - \lambda N_{j,A} - c \delta_j(t_0) + c \delta_A(t_0) \end{aligned}$$

y la corrección de la pseudodistancia por fase en una época arbitraria  $t$  se calcula de la siguiente manera

$$\text{PRC}_j(t) = \text{PRC}_j(t_0) + \text{RRC}_j(t_0)(t - t_0) \quad (9.12)$$

La corrección por fase a la pseudodistancia por fase a un receptor remoto en una época  $t$  es obtenido de la siguiente manera.

$$\lambda \phi_{j,B}(t)_{\text{corr}} = \rho_{j,B}(t) + \lambda \Delta N_{j,AB} - c \Delta\delta_{AB}(t) \quad (9.13)$$

#### 9.5 Método de las diferencias para la solución de la ambigüedad de la fase

El cálculo de la posición del receptor no implica únicamente el cálculo de los componentes de la línea de base. El programa de procesamiento ha de resolver también las ambigüedades del entero.

Se debe recordar que la fase portadora continua está formada por una parte fraccionaria y una parte entera. El componente entero en la primera medición se desconoce y el procesador de la línea base debe resolverlo. De hecho, el procesador de la línea base debe resolver la parte entera cada vez que ocurra un deslizamiento de ciclo, ya que la fase portadora continua se restablece a su valor inicial. Por consiguiente, habrá muchas ambigüedades de entero que resolver durante una sección en terreno.

Se habla mucho del procesamiento de las líneas base GPS, especialmente respecto a cómo se realiza el procesamiento. En general, las observaciones, que son simplemente mediciones en fase portadora, se transforman en combinaciones lineales de las mediciones brutas para una mayor conveniencia y uniformidad. Los modelos matemáticos de estas mediciones se basan en la combinación de las mediciones en bruto entre los receptores y los satélites. Estas mediciones se conforman en varias combinaciones de fase portadora L1 y L2 además de pseudodistancias. Cada una de estas combinaciones tiene propiedades propias y exclusivas que ayudan a solucionar, modular o mitigar diversos parámetros, incluidos los efectos de la ionosfera y la troposfera, así como los rebotes de la señal (multi path).

El procesador emplea algoritmos de mínimos cuadrados para resolver las ambigüedades de longitud de onda enteras y la posición desconocida del receptor, utilizando una o más de estas combinaciones de mediciones. Muchos procesadores

son también capaces de modelar los efectos de la atmósfera y otras fuentes de interferencia de la señal, aunque, para la mayoría de las aplicaciones topográficas, estas correcciones no son necesarias. A continuación se tratarán distintos modos de procesamiento, describiendo que hacen cada uno de ellos.

Diferencias simples (entre receptores) : una diferencia simple se obtiene hallando la diferencia entre las mediciones adquiridas por dos receptores mientras observan el mismo satélite en una misma época en particular. Por lo tanto, las ambigüedades del entero asociadas con cada receptor se combinan entre sí. Si ocurre un deslizamiento de ciclo, el procesador tiene que recalcular este término entero combinado igual que en el modelo no diferenciado.

Las diferencias simples eliminan muchos errores comunes de los satélites tales como los errores de reloj de los satélites y, en gran parte, los errores orbitales y los retardos atmosféricos.

$$\lambda \phi_{1,AB} = \rho_{1,B} - \rho_{j,A} + c t_B - c t_A + \lambda N_{1,B} - \lambda N_{1,A} \quad (9.14)$$

Diferencias dobles : una diferencia doble se origina hallando la diferencia entre dos diferencias simples. Esto implica dos satélites y dos receptores. Por lo tanto, esta combinación de mediciones funde en una sola, cuatro mediciones independientes y cuatro ambigüedades del entero distintas.

En este caso, el cálculo del valor del entero se hace más complejo porque cada ambigüedad del entero es ahora una combinación de dos satélites y dos receptores.

Las diferencias dobles eliminan la mayoría de los efectos de la deriva de los relojes de satélite y receptor.

$$\lambda \phi_{1-2,AB} = \rho_{1-2,AB} + \lambda ( N_{2,B} - N_{1,B} - N_{2,A} + N_{1,A} ) \quad (9.15)$$

Diferencias triples (entre satélite, receptor y hora) : la diferencia triple combina dos diferencias dobles respecto a la hora (entre dos épocas). Utilizando este modelo desaparecen las ambigüedades del entero. Puesto que se supone que en un mundo perfecto no cambia la ambigüedad del entero, esta ambigüedad se cancela diferenciando entre dos épocas.

La diferenciación triple se emplea a menudo para encontrar deslizamientos de ciclos, puesto que éstos sí hacen que cambie la ambigüedad del entero. Por consiguiente, un gran salto en el valor de la diferencia triple significa que ha ocurrido un deslizamiento de ciclo.

## 10. Sistema de referencia vertical

La superficie topográfica es la superficie real de la Tierra, pero para poder representarla es necesario referirla a algún modelo matemático, de estos modelos se generan las cartas y mapas, desarrollados por la cartografía. Las alturas que usan en la Geodesia se clasifican según su determinación, su aplicación y modelo físico matemático.

## 10.1 Alturas geométricas

Estas son obtenidas a través de nivelación geométrica, las diferencias de nivel ir varían según el campo de gravedad del recorrido de la nivelación. Debido a la forma elipsoidal de la tierra y su distribución irregular de las masas en su interior, las superficies equipotenciales en puntos diferentes no son iguales debido a la distribución de masas en el interior de la Tierra, lo que explica densidades diferentes, generando diferentes campos de gravedad.

## 10.2 Alturas elipsoidales

Representan la separación entre la superficie topográfica terrestre y la superficie del elipsoide, y se mide por la normal al elipsoide designándose con la letra h.

Esta es calculada a partir de coordenadas geocéntricas cartesianas definidas sobre un elipsoide de referencia.

## 10.3 Alturas ortométricas

Esta es la altura que existe entre la superficie topográfica y el geoide siendo perpendicular a este ultimo se designa con la letra H. Para lo que será necesario conocer la gravedad verdadera entre el punto evaluado y el geoide.

La gravedad medida en la superficie topográfica es la gravedad real y la verdadera se encuentra referida al geoide, es aquí donde surge el inconveniente de cómo medirla siguiendo la vertical en el punto observado. Existen algunos modelos de cómo poder calcularla a través de modelos geofísicos y aplicar reducciones para trasladar la gravedad al geoide.

Las alturas ortométricas se pueden calcular a partir de las elipsoidales:

$$H = h - N \quad ( 10.1 )$$

## 10.4 Ondulación geoidal

La diferencia que existe entre el geoide y el elipsoide se conoce como ondulación del geoide N. Gracias a esta variante se puede describir el irregular comportamiento del geoide. Conociendo la ondulación geoidal se puede calcular la altura ortométrica o altura sobre el NMM de algún punto de observación en particular todo esto a partir del valor de la altura sobre el elipsoide referida por un equipo GPS, esta situación se expresa mediante la siguiente fórmula.

$$\Delta H = \Delta h - \Delta N$$

$\Delta H$  = Desnivel ortométrico.

$\Delta h$  = Diferencia de alturas elipsoidales.

$\Delta N$  = Diferencia de ondulaciones geoidales.

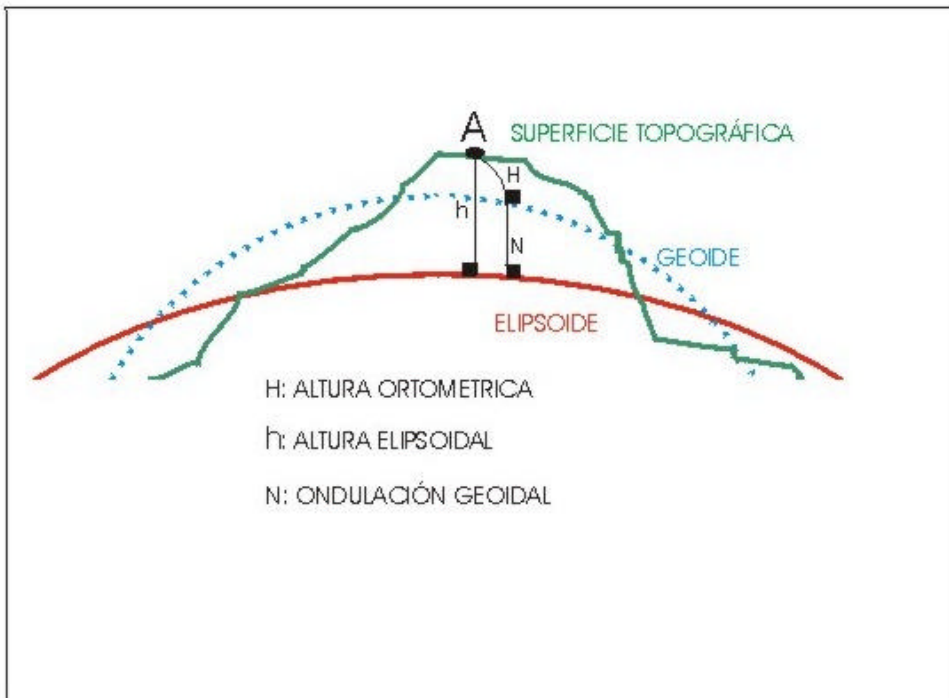


Figura 4

### 10.5 Interpolación de ondulaciones geoidales

El planteamiento del trabajo es el siguiente se conocen las ondulaciones geoidales de un sector y puntos tomados con GPS con sus coordenadas respectivas, y se desea interpolar distintas alturas para conocer en un determinado kilometraje la ondulación correspondiente, esto se logra a través de una función polinomial de mínimo tercer grado que para este caso se utiliza un polinomio de cuarto grado todo esto en función de y, el modelo empleado es el método de ecuación de observaciones indirectas, por el sistema no iterativo.

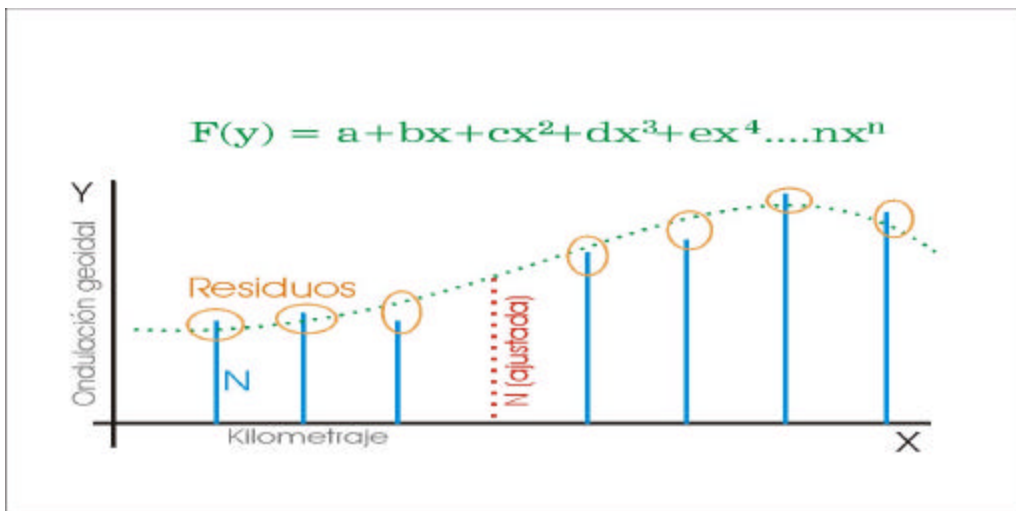


Figura 5

## 10.6 Modelo de ajuste para la interpolación de las ondulaciones geoidales

Para poder lograr la interpolación entre ondulaciones geoidales es necesario como ya se dijo realizarlo a través de una función de un orden que más se acomode a las observaciones que están referidas a las alturas, para así a través de una distancia cualquiera poder conocer la magnitud de Y que estará en función de la curva de este modo se ajustaran las observaciones y se podrá interpolar a través de una función conocida.

El modelo es:  $\mathbf{La} = \mathbf{F(Xa)}$   
 Modelo liberalizado:  $\mathbf{AX + L = V}$

Para este caso:

$$\mathbf{F(Y) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4}$$

$$\mathbf{A = \left. \begin{array}{c} \frac{DF}{DXa} \\ \end{array} \right| X_0}$$

$$\mathbf{X = \left. \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \right|_{5X_1}} \quad \mathbf{L = \left. \begin{array}{c} N1 \\ N2 \\ N3 \\ \vdots \\ \vdots \\ N20 \end{array} \right|_{20L_1}}$$

esta matriz es la de las observaciones

$$\mathbf{A = \left. \begin{array}{ccccc} \frac{DF}{Da} = 1 & \frac{DF}{Db} = X_1 & \frac{DF}{Dc} = X_1^2 & \frac{DF}{Dd} = X_1^3 & \frac{DF}{De} = X_1^4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{DF}{Da} = 1 & \frac{DF}{Db} = X_{20} & \frac{DF}{Dc} = X_{20}^2 & \frac{DF}{Dd} = X_{20}^3 & \frac{DF}{De} = X_{20}^4 \end{array} \right|_{20A_5}}$$

Número de observaciones (n) = 20  
 Número de incógnitas (u) = 5  
 Grados de libertad = 15



## 11. Conclusión

El impacto de la Geodesia se observa en campos del conocimiento y la tecnología, con efectos directos en el terreno económico-social. Posibilita una mayor y mejor información sobre el territorio, lo cual permite mejorar diversos aspectos de la producción de cartografía, la actualización catastral, el manejo de aguas superficiales y subterráneas, la producción agropecuaria, el desarrollo de infraestructura (caminos, represas, etc.) entre otros.

En los trabajos que requieren posicionamiento planimétrico de puntos de la superficie terrestre, la tecnología GPS ha logrado imponerse mundialmente por la alta precisión en los resultados obtenidos y la rapidez y bajo costo de operación. La determinación de Geoides locales y regionales es entonces fundamental en todos aquellos casos que se aplique GPS para la determinación de las alturas sobre el nivel medio del mar.

Las mediciones geodésicas dependen de la exactitud y precisión de los métodos matemáticos que ella utiliza. Por consiguiente, el estudio de la teoría y sus aplicaciones prácticas, que son el objetivo de esta investigación, constituyen una parte importante de los estudios relacionados con la geodesia.

Durante los últimos diez años la geodesia ha avanzado de forma considerable, incorporando el progreso de los resultados obtenidos de mediciones actuales de la Tierra. Estos resultados nos llevan a desarrollar nuevos modelos matemáticos de la figura terrestre, los cuales se asemejan de mejor manera a la forma real de nuestro planeta. Estos resultados posibilitan hoy en día generar modelos globales de referencia terrestre, los cuales posibilitan obtener una alta precisión en la determinación de parámetros en cualquier parte del planeta

## Referencias Bibliográficas

1. Weikko A. Heiskanen y Helmut Moritz (1985). Geodesia Física. Instituto de Astronomía y Geodesia. Madrid España.
2. Alfonso Núñez-García del Pozo (1992). GPS La Nueva Era de la Topografía. Ediciones de Ciencias Sociales. Madrid España.
3. P. S. Zakatov (1981). Curso de Geodesia Superior. Editorial MIR. Moscú Rusia.
4. Ruiz Morales. Manual de Geodesia y Topografía. Instituto Geográfico Nacional Segunda Edición. Madrid España.
5. Gonzalo Masjuan (1988). Matrices y Vectores. Pontificia Universidad Católica de Chile. Facultad de Matemáticas.
6. Bomford, G. Geodesy. Clarendon Press. Oxford 1989
7. Torge, W. Geodesia. Editorial Diana. México 1983
8. Fernando Martín Asín (1983). Geodesia y Cartografía Matemática. Instituto Geográfico Nacional. Madrid España.
9. Jorge Silva Araya (1997). III Curso Nacional de Mensuradores. Sernageomin. Santiago Chile.
10. B. Hofmann – Wellenhof (1992). Global Positioning System. Springer Wien New York. New York USA.
11. José Rossignoli Just (1975). Proyección UTM. Instituto Geográfico Nacional. Madrid España.