بسم الله الرحمن الرحيم

١٥٥٧٥٩_٢٠٣٤٦٨٧

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه
گاوازنگ - زنجان

مدل‌سازی و اندازه‌گیری ریسک سبد اعتباری با وابستگی فرین

پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد

فاطمه قربانلو

استاد راهنما: دکتر شیوا زمانی

استاد مشاور: دکتر علی فروش باستانی

اسفند ۱۳۸۹

به پاس محبت‌های بی‌دریغشان که هرگز
فروکش نمی‌کند
این مجموعه را به پدر و مادر عزیزم تقدیم
می‌کنم

قدردانی و تشکر

در ابتدا خدای بزرگ را سپاس می‌گویم که به من توان داد تا در مسیر علم قدم بردارم. از زحمات پدر و مادر گرامی‌ام و کلیه کسانی که در دوران تحصیل همواره مشوق و پشتیبان اینجانب بوده‌اند کمال تشکر و قدردانی را دارم. همچنین از زحمات استاتید محترم خانم دکتر شیوا زمانی و آقای دکتر علی فروش باستانی که با راهنماییهای خود راهگشای اینجانب بوده‌اند کمال تشکر و سپاسگذاری را دارم. در نهایت از راهنمایی‌ها و حمایت‌های تک تک دوستانم، زهرا احمدی، مجتبی شاکری، زانیار احمدی، شهاب نانکلی، علی صادقی، عین ا.. میرزایی و کلیه دوستانم تشکر نموده، باشد که بدین گونه بخش اندکی از مهربانی‌هایشان را جبران کرده باشم.

چکیده

ریسک اعتباری از مهم‌ترین منابع ریسک است که بانک‌ها و مؤسسات مالی مشابه با آن مواجه‌اند. بنابراین اندازه‌گیری و مدیریت ریسک اعتباری یک ضرورت برای مؤسسات مالی است. در این پایان‌نامه، یک سبد وام ناهمگن بزرگ را مورد بررسی قرار می‌دهیم. هدف عمده‌ی ما به دست آوردن دو اندازه برای این سبد اعتباری است. اندازه‌ی اول، احتمال ضرر خیلی زیاد برای سبد در یک افق زمانی ثابت و اندازه‌ی دوم، کسری مورد انتظار است، یعنی میانگین ضرر مازاد وقتی که ضرر خیلی زیاد رخ داده باشد. مدل کاپولای گاوسی که در عمل بسیار مورد استفاده قرار می‌گیرد نمی‌تواند وابستگی فرین میان اعضای سبد را مدل کند و ما به عنوان یک مدل جایگزین مناسب، از تی—کاپولا استفاده می‌کنیم. اندازه‌ی سبد، ترکیب ناهمگن اعضای سبد، نادر بودن پیشامد نکول برای اعضای سبد و وابستگی دوبه‌دوی پیشامدها، همگی باعث شده است محاسبه‌ی این دو اندازه چه به روش دقیق، چه به روش مونت کارلوی معمولی سخت و پیچیده باشد. برای غلبه بر این مشکل، در ابتدا مقدار حدی این اندازه‌ها را محاسبه می‌کنیم. همچنین دو الگوریتم بر مبنای نمونه‌گیری مبتنی بر اهمیت، برای تخمین اندازه‌های مذکور، به روش مونت‌کارلو ارائه می‌دهیم.

کلمات کلیدی: ریسک اعتباری، شبیه‌سازی مونت‌کارلو، پیشامد نادر، نمونه‌گیری مبتنی بر اهمیت.

فهرست

۴ نتایج عددی و جمع‌بندی

مقدمه

بانک‌ها از قدیمی‌ترین مؤسسات مالی هستند، در واقع شروع بانک‌داری نوین را به قرن ۱۶ میلادی نسبت می‌دهند. با وجود گذشت زمانی طولانی و ظهور انواع مؤسسات مالی ، بانک‌های تجاری همچنان اهمیت بسیار زیادی در اقتصاد و کسب و کار دارند. تاریخچه‌ی بانک‌داری نوین در کشور ما نیز به ۱۳۰۶ هجری شمسی و قانون تأسیس بانک ملی ایران باز می‌گردد یعنی به بیش از ۸۰ سال پیش. از آنجایی که در ایران بسیاری از نهادها و ابزارهای مالی یا اصلاً وجود ندارند و یا به دلایلی مثل‌عدم شناخت مردم و تازه تأسیس بودن نتوانسته‌اند در جایگاه مناسبی ایفای نقش کنند، وظیفه انتقال منابع مالی از واحدهایی که مازاد مالی دارند به واحدهایی که احتیاج به منابع مالی دارند عمدتاً بر عهده‌ی بانک‌ها است. در این بین یکی از وظایفی که بانک‌ها به عهده دارند مدیریت ریسک به خصوص ریسک اعتباری[۱] است. موضوع این پایان‌نامه نیز در حوزه‌ی مدیریت ریسک اعتباری است.

ریسک اعتباری، یکی از انواع ریسک‌ها است و به این دلیل احتمال مواجهه با آن وجود دارد که طرف قرارداد[۲] نتواند یا نخواهد تعهداتش را انجام دهد. به عنوان مثال، بانکی را در نظر بگیرید که به تعدادی از شرکت‌ها وام‌هایی اعطا کرده است و هر کدام از این وام‌گیرنده ها[۳] دارای احتمال نکول[۴] هستند، یعنی احتمال دارد نتوانند یا نخواهند اصل وام را پرداخت کنند. ریسک این عدم پرداخت‌ها در واقع همان ریسک اعتباری است که بانک با آن مواجه است. به مجموعه‌ی وام‌های اعطا شده یک سبد اعتباری[۵] می‌گوییم که می‌تواند شامل دیگر ابزارهای مالی نیز باشد. از آنجایی که اکثر مؤسسات مالی در معرض ریسک اعتباری قرار دارند، اندازه‌گیری و مدیریت این ریسک یک ضرورت برای این مؤسسات است. یک مدیر برای اندازه‌گیری و مدیریت ریسک اعتباری نیاز به اندازه ریسک[۶] دارد که از اساسی‌ترین مسائل مرتبط با ریسک اعتباری ، به دست آوردن توزیع ضرر ناشی از نکول وام گیرنده‌ها در سبد اعتباری است. مدل‌سازی وابستگی میان اعضای سبد و ارزیابی

[۱] Credit Risk
[۲] Counterparty
[۳] Obligors
[۴] Default
[۵] Credit Portfolio
[۶] Risk Measure

تأثیر این وابستگی در احتمال رخداد هم‌زمان چند نکول و در نتیجه ضرر خیلی بزرگ، بیشترین اهمیت را در به دست آوردن این توزیع دارد. بنابراین برای رسیدن به توزیع ضرر سبد، باید به مدل‌سازی نکول‌های به هم وابسته بپردازیم.

روش‌های موجود برای مدل‌سازی نکول‌های وابسته، به دو دسته تقسیم می‌شوند: مدل متغیرهای پنهان[۷] (شرکت‌های KMV و CreditMetrics از این مدل استفاده می‌کنند) و مدل مخلوط[۸] (مدلی که اساس کار شرکت CreditRisk^+ است) (فری[۹] و مک‌نیل[۱۰] ۲۰۰۱). چون در این پایان‌نامه از مدل اول استفاده می‌کنیم، آن را به طور مختصر توضیح می‌دهیم. در فصل اول بیشتر در مورد هر دو مدل، صحبت خواهیم کرد. در مدل متغیرهای پنهان، یک وام گیرنده زمانی نکول می‌کند که یک متغیر پنهان که اغلب ارزش دارایی شرکت وام‌گیرنده در نظر گرفته می‌شود از یک آستانه‌ی مناسب، مثلاً میزان بدهی شرکت وام‌گیرنده، کم‌تر شود. در این مدل، متغیر پنهان به تعدادی عامل مستقل از هم و هم‌توزیع وابسته است و وابستگی میان نکول‌ها از وابستگی میان متغیرهای پنهان ناشی می‌شود. تابعی که ساختار وابستگی بین متغیرهای پنهان را نشان می‌دهد، تابع کاپولا[۱۱] نامیده می‌شود. تعداد زیادی تابع کاپولا وجود دارد که پرکاربردترین آن‌ها کاپولای گاوسی است. در مدل کاپولای گاوسی فرض می‌شود متغیرهای پنهان از یک توزیع نرمال چند متغیره تبعیت می‌کنند. شرکت‌های KMV و CreditMetrics از این مدل استفاده می‌کنند.

عامل اصلی ضرر خیلی زیاد در یک سبد اعتباری، رخداد هم‌زمان تعداد زیادی نکول است. آنچه که آن را « ریسک اعتباری فرین[۱۲]» می‌خوانند. ریسک رخداد هم‌زمان تعداد زیادی نکول را نمی‌توان با مدل کاپولای گاوسی مدل کرد و باید مدلی را انتخاب کنیم که این وابستگی فرین را مدل کند. بنابراین، توزیعی برای متغیرهای پنهان انتخاب می‌شود که در آن متغیرها می‌توانند به طور همزمان مقادیر خیلی زیاد (یا خیلی کم) را با احتمال قابل توجه اختیار کنند. یکی از مدل‌ها، مدل تی—کاپولا است که در این مدل، بردار متغیرهای پنهان توزیع چند متغیره تی— استودنت[۱۳] دارد.

---

[۷] Latent Variable

[۸] Mixture Model

[۹] Frey

[۱۰] McNeil

[۱۱] Copula Function

[۱۲] Extreme Credit Risk

[۱۳] t-Student

اگر $X \sim N(o,1)$، $Y \sim \chi^2(n)$ و $Z = \sqrt{Y/n}$، $\frac{X}{Z}$، دارای توزیع تی—استودنت با n درجه‌ی آزادی خواهد بود که تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر است

$$f(t) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{\nu\pi}\Gamma\nu/2}(1+\frac{t^2}{\nu})^{-(\frac{\nu+1}{2})}.$$

در این تابع، Γ تابع گاما است و به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx \quad n > 0. \qquad (۱)$$

با نزدیک شدن مخرج به صفر، $\frac{X}{Z}$ بزرگ می‌شود. در واقع مخرج این کسر، یعنی Z، به عنوان یک شوک مشترک[۱۴] در رخداد همزمان نکول‌ها، ایفای نقش می‌کند.

ضرر زیاد یک سبد بزرگ، زمانی رخ می‌دهد که اکثر وام گیرنده‌ها نکول کنند، یعنی یک عامل مشترک باید در تمام متغیرها موجود باشد که باعث رخداد این پیشامد شود. بنابراین توزیع تی، به خاطر متغیر Z مدل مناسبی برای مدل‌سازی وابستگی فرین است.

در این پایان‌نامه، یک سبد اعتباری ناهمگن[۱۵] (سبد ناهمگن، یعنی سبدی که در آن وام‌گیرنده‌ها اعتبار یکسانی ندارند) بزرگ را مورد بررسی قرار می‌دهیم. برای مدل‌سازی این سبد، روش متغیرهای پنهان را به کار می‌گیریم و اساس کار را بر مدل شوک مشترک می‌گذاریم. هدف عمده ما در این پایان‌نامه به‌دست آوردن دو اندازه برای این سبد اعتباری است: ۱. احتمال ضرر خیلی زیاد. ۲. کسری مورد انتظار[۱۶]، یعنی میانگین ضرر مازاد، به شرط این که ضرر خیلی زیاد اتفاق افتاده باشد. اندازه‌ی سبد، محاسبه‌ی دقیق این اندازه‌ها را سخت و پیچیده می‌سازد. برای غلبه بر این مشکل از دو روش استفاده شده است. روش مجانبی[۱۷] و دیگری شبیه‌سازی مونت‌کارلو[۱۸]. به‌کارگیری شبیه‌سازی مونت‌کارلو برای پیشامدهای نادر[۱۹] کارایی چندانی ندارد، به همین دلیل از نمونه‌گیری مبتنی بر اهمیت[۲۰] (IS) که یکی از روش‌های کاهش واریانس[۲۱] است، استفاده می‌کنیم.

این پایان‌نامه دستاوردهای زیر را دارد:

[۱۴] Common Shock
[۱۵] Heterogenous
[۱۶] Expected Shortfall
[۱۷] Asymptotic
[۱۸] Monte Carlo
[۱۹] Rare Events
[۲۰] Importance Sampling (IS)
[۲۱] Variance Reduction

۱) محاسبه‌ی مجانبی احتمال ضرر زیاد و کسری مورد انتظار با استفاده از دو قضیه‌ی ۱.۳.۲ و ۲.۳.۲.

۲) ارائه‌ی دو الگوریتم (الگوریتم ۱ و الگوریتم ۲) برای تخمین اندازه‌های مذکور با استفاده از نمونه‌گیری مبتنی بر اهمیت. در روش نمونه‌گیری مبتنی بر اهمیت، از یک اندازه احتمال جدید استفاده می‌کنیم که تحت این اندازه‌ی جدید، پیشامد مورد نظر دیگر نادر نیست. برای تغییر اندازه[۲۲] در این روش، از پیچش نمایی[۲۳] استفاده می‌شود. نشان می‌دهیم الگوریتم ۱ و ۲ دارای خطای نسبی کران‌دار[۲۴] است.

۳) بررسی و تحلیل عددی الگوریتم‌ها.

در مقاله‌ی مرجع این پایان‌نامه [۱]، از دو روش برای تغییر اندازه استفاده شده است: ۱. پیچش نمایی. ۲. پیچش مبتنی بر نرخ مخاطره[۲۵] در این پایان‌نامه به دلیل محدودیت زمانی، تنها از روش اول یعنی تغییر اندازه به روش پیچش نمایی استفاده می‌کنیم. برای جزئیات بیشتر در مورد هر دو روش به مرجع [۸] مراجعه کنید.

ترتیب مطالب این پایان‌نامه به این قرار است: فصل اول به بیان مفاهیم پایه‌ای در ریسک، مدل‌های مطرح در مدل‌سازی ریسک اعتباری و توضیح مختصری در مورد روش مونت‌کارلو، اختصاص دارد. مروری بر ادبیات مسئله، معرفی مدل و محاسبه‌ی اندازه‌ها و الگوریتم‌ها، موضوع فصل دوم و سوم این پایان‌نامه است. در فصل چهارم به تجزیه و تحلیل الگوریتم‌ها خواهیم پرداخت و با استفاده از نتایج عددی به دست آمده به جمع بندی و نتیجه‌گیری می‌رسیم . در پیوست این پایان‌نامه اثبات لم‌ها، صورت کامل برخی مفاهیم مورد استفاده در پایان‌نامه و برنامه‌های کامپیوتری آورده شده است.

---

[۲۲] Change of Measure

[۲۳] Exponential Twisting

[۲۴] Bounded Relative Error

[۲۵] Hazard Rate Twisting

فصل اول

مقدمات

۱.۱ مفهوم ریسک

محققین مختلف ریسک را به به اشکال مختلف ولی مشابه تعریف کرده‌اند، به طور مثال به دو تعریف ریسک که مک‌نیل ، فری و امبرشتس[۱] (۲۰۰۵) ارائه کرده‌اند اشاره می‌کنیم. «هر فعالیت یا اتفاق که ممکن است در توانایی سازمان در رسیدن به اهدافش اثر نامطلوب بگذارد» و یا « احتمال قابل سنجش ضرر و یا بازده کمتر از حد انتظار». همان‌طور که این نویسندگان اشاره کرده‌اند احتمالاً هیچ تعریفی نتواند تمام جنبه‌های ریسک را پوشش دهد، اما این تعاریف به جنبه‌های اصلی ریسک اشاره می‌کنند. با دقت در این تعاریف می‌توان سه عامل مشترک در آن‌ها دید:

۱) ریسک به فعالیت و یا رویدادی اطلاق می‌شود که در آن جنبه‌ی عدم اطمینان وجود داشته باشد.

۲) ریسک به مواردی اطلاق می‌شود که فعالیت یا رویداد مورد نظر در رسیدن به اهداف تعیین شده مؤثر باشد. این مورد به همراه مورد قبلی جوهره اصلی اکثر تعاریف ریسک را تشکیل می‌دهند.

[۱] Embrechts

۳) در هر دوی این تعاریف تنها به جنبه‌ی منفی ریسک توجه شده است، که البته همه‌ی تعاریف ریسک از این قاعده تبعیت نمی‌کنند.

۲.۱ انواع ریسک

در یک تقیسم‌بندی می‌توان انواع ریسک‌هایی را که یک مؤسسه مالی با آن مواجه است به ۵ دسته تقسیم کرد (دافی[۲] و سینگلتون[۳]،(۲۰۰۳)).

۱) ریسک بازار[۴]: ریسک تغییر قیمت‌ها و نرخ‌ها.

۲) ریسک اعتباری: ریسک این که بدهکار به علت عدم علاقه یا عدم توانایی به تعهد خود سر وقت عمل نکند.

۳) ریسک نقدشوندگی[۵]: ریسک این که تغییر موقعیت‌های مالی با هزینه‌ی زیادی همراه شوند و با دسترسی به منابع مالی دچار مشکل شود.

۴) ریسک عملیاتی[۶]: ریسک تقلب، خطا، اشتباه، ریسک نیروی انسانی، ریسک مدل و غیره.

۵) ریسک سیستمی[۷]: عدم کارکرد صحیح کل سیستم مالی به علت نکول‌های گسترده، از بین رفتن نقدشوندگی در کل بازار و غیره، مانند وضعیت سیستم مالی پس از بحران مالی ۲۰۰۸–۲۰۰۷.

---

[۲] Duffi
[۳] Singleton
[۴] Market Risk
[۵] Liquidity Risk
[۶] Operational Risk
[۷] Systemic Risk

۳.۱ اندازه‌های ریسک

هدف از مدیریت ریسک اعتباری، ارزیابی و بهینه‌سازی ریسک سبد اعتباری است. برای مدیریت و اندازه‌گیری ریسک یک سبد اعتباری به یک اندازه ریسک نیاز داریم. به علاوه، یک مدیر برای مدیریت این ریسک، سرمایه‌ای را که به آن کفایت سرمایه [۸] گفته می‌شود، را باید به دست آورد و با کنار گذاشتن این سرمایه ، خود را در مقابل این ریسک بیمه کند. در اینجا نیز مدیر برای محاسبه‌ی این سرمایه به یک اندازه ریسک نیاز دارد. بنابراین اندازه‌های ریسک و محاسبه‌ی درست آن‌ها، اهمیت زیادی برای مدیران دارند. در این فصل دو اندازه ریسک را تعریف می‌کنیم: ارزش در معرض ریسک [۹] و کسری مورد انتظار.

۱.۳.۱ ارزش در معرض ریسک

فرض کنید L یک متغیر تصادفی روی فضای احتمال (Ω, P) باشد که در آن L ضرر یک سبد اعتباری در افق زمانی ثابت T است. ارزش در معرض ریسک در سطح α را با VaR_α نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$VaR_\alpha(L) := \inf\left(x \in R; P(L > x) \leq 1 - \alpha\right) = \inf\left(x \in R; E[I\{L > x\}] \leq 1 - \alpha\right),$$

که در آن، E امید ریاضی نسبت به اندازه احتمال P و $I\{L > x\}$ تابع مشخصه‌ی پیشامد $\{L > x\}$ است. بنابراین، VaR یا ارزش در معرض ریسک، ضرر سبد در سطح α است. سطح اطمینان ضرر معمولاً $\alpha = 0.95$ یا $\alpha = 0.99$ انتخاب می‌شود (مقادیر بیشتر نیز می‌تواند استفاده شود). برای محاسبه‌ی VaR_α، برای هر x، باید $P(L > x)$ را محاسبه کرد. محاسبه‌ی دقیق این اندازه وقتی اندازه سبد بزرگ است سخت و پیچیده است. یکی از کارهایی که ما در این پایان‌نامه انجام می‌دهیم، تخمین همین اندازه به ازای x های بزرگ است.

---

[۸] Economic Capital

[۹] Value-at-Risk

۲.۳.۱ کسری مورد انتظار

یکی دیگر از اندازه‌های ریسک، کسری مورد انتظار است. این اندازه به نام‌های دیگری مانند میانگین ضرر مازاد[۱۰]، ارزش در معرض مخاطره‌ی شرطی[۱۱] یا ارزش در معرض مخاطره در دم[۱۲] شناخته می‌شود. کسری مورد انتظار در سطح α را با ES_α نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned} ES_\alpha(L) &:= E[L|L > Var_\alpha(L)] \\ &= \frac{1}{1-\alpha}\int_u^1 Var_u(L)du. \end{aligned}$$

۴.۱ کاپولا

یک کاپولای $d-$ بعدی یک تابع توزیع روی فضای $[0,1]^d$ است، با توزیع‌های حاشیه‌ای یکنواخت استاندارد. برای کاپولاها از نمادگذاری $C(u) = C(u_1, \cdots, u_d)$ استفاده می‌کنیم. کاپولا یک نگاشت از یک ابر مکعب به یک بازه واحد است که سه ویژگی زیر همیشه برقرار است.

۱. $C(u_1, \ldots, u_d)$ نسبت به هر مؤلفه u_i افزایشی است.

۲. به ازای هر $i \in \{1, \cdots, d\}$, $u_i \in [0,1]$، $C(1, \cdots, 1, u_i, 1, \cdots, 1) = u_i$.

۳. به ازای هر $(a_1, \cdots, a_d), (b_1, \cdots, b_d) \in [0,1]^d$ که $a_i \leq b_i$، داریم:

$$\sum_{i_1=1}^{2} \cdots \sum_{i_d=1}^{2} (-1)^{i_1+\cdots,i_d} C(u_{1i_1}, \cdots + u_{di_d}) \geq 0, \qquad (۱)$$

که در آن به ازای هر $j \in \{1, \cdots, d\}$، $u_{j1} = a_j, u_{j2} = b_j$.

ویژگی اول به خاطر تابع توزیع بودن کاپولا برقرار است و ویژگی دوم به خاطر یکنواخت بودن توزیع‌های حاشیه‌ای. ویژگی سوم که به نامساوی چهارضلعی[۱۳] معروف است به خاطر نامنفی بودن

[۱۰] Mean Excess Loss

[۱۱] Conditional Value-at Risk (CVaR)

[۱۲] Tail VaR

[۱۳] Rectangle

$P(a_1 \leq U_1 \leq b_1, \cdots, a_d \leq U_d \leq b_d)$ برقرار است.

مهم‌ترین مسئله‌ی کاپولا، در قضیه اسکلار[۱۴] مطرح می‌شود، که رابطه‌ی بین تابع توزیع توأم و کاپولا را بیان می‌کند.

قضیه ۱.۴.۱ (**قضیه اسکلار**) فرض کنید F یک تابع توزیع توأم با توزیع‌های حاشیه‌ای $F_1 \cdots, F_d$ باشد. آن‌گاه کاپولای $C : [0,1]^d \to [0,1]$ وجود دارد به طوری که به ازای هر $x_1, \cdots, x_d$ در $\bar{R} = [-\infty, \infty]$

$$F(x_1, \cdots, x_d) = C(F_1(x_1), \cdots, F_d(x_d)). \qquad (۲)$$

اگر حاشیه‌ای‌ها پیوسته باشند، آن گاه کاپولا یکتا خواهد بود؛ در غیر این صورت کاپولای به دست آمده یکتا نیست. این کاپولا روی فضای $RanF_1 \times \cdots \times RanF_d$ تعیین می‌شود که در آن $RanF_i = F(R)$ ، برد F_i را نشان می‌دهد. و به عکس ،اگر C یک کاپولا و $F_1, \cdots, F_d$ تابع توزیع‌های تک متغیره باشند، آن‌گاه تابع تعریف شده در رابطه‌ی (۲)، یک تابع توزیع توأم با توزیع‌های حاشیه‌ای $F_1, \cdots, F_d$ است.

تعریف ۲.۴.۱ اگر X یک بردار تصادفی و F تابع توزیع آن با توزیع‌های حاشیه‌ای پیوسته‌ی $F_1, \cdots, F_d$ باشد، آن‌گاه کاپولای F (یا X)، تابع توزیع $(F_1(X_1), \cdots, F_d(X_d))$ است.

توزیع‌های گسسته. از مفهوم کاپولا برای توزیع‌های گسسته، استفاده نمی‌شود. چون کاپولای تعیین شده یکتا نخواهد بود، که این عدم یکتایی ناپیوسته بودن توزیع‌های حاشیه‌ای ناشی می‌شود.

تغییر ناپذیری. یک ویژگی مفید کاپولای یک تابع توزیع، تغییرناپذیری آن نسبت به تبدیل های اکیداً صعودی است که روی توزیع‌های حاشیه‌ای اثر می‌کنند.

گزاره ۳.۴.۱ اگر $X_1, \cdots, X_d$ یک بردار تصادفی با توزیع‌های حاشیه‌ای پیوسته و C کاپولای آن باشد و $T_1, \cdots, T_d$ توابع اکیداً صعودی باشند، آن‌گاه $T_1(X_1), \cdots, T_d(X_d)$ نیز همان کاپولای بردار X یعنی C را دارد.

[۱۴] Sklar

قضیه ۴.۴.۱ **قضیه.** برای هر کاپولای $C(u_1, \cdots, u_d)$، کران های زیر را داریم

$$\max\{\sum_{i=1}^{d} u_i + 1 - d, o\} \leq C(u) \leq \min\{u_1, \cdots, u_d\}. \tag{۳}$$

کران پایین و بالا را به ترتیب، با نماد $W(u_1, \cdots, u_d)$ و $M(u_1, \cdots, u_d)$ نمایش می‌دهیم. به کران‌هایی که در قضیه بالا مطرح شد کران‌های فرشت[۱۵] گفته می شود. برای جزئیات بیشتر در مورد کاپولا به مرجع [10] رجوع کنید.

۵.۱ مدل‌های ریسک اعتباری

یک سبد وام با n وام‌گیرنده، با افق زمانی T (معمولاً یک سال) را در نظر می‌گیریم. فرض کنید Y_i مشخصه نکول وام‌گیرنده‌ی i–ام باشد، یعنی، اگر وام‌گیرنده‌ی i–ام در افق زمانی تعیین شده نکول کند $Y_i = 1$، در غیر این صورت، $Y_i = 0$. ضرر ناشی از نکول وام‌گیرنده‌ی i–ام را با e_i، که مقدار مثبتی است، نشان می‌دهیم و به آن میزان مانده در نکول[۱۶] می‌گوییم. e_i ها اصولاً تصادفی هستند. در اینجا برای سادگی، آن‌ها را ثابت در نظر می‌گیریم. با این فرضیات، ضرر کل سبد در افق زمانی T، به صورت زیر است

$$L = \sum_{i=1}^{n} e_i Y_i.$$

احتمال‌های نکول حاشیه‌ای[۱۷]، یعنی $P(Y_i = 1)$ ها را با p_i نشان می‌دهیم، که این اطلاعات را معمولاً می‌توان از شرکت‌های رتبه‌بندی (مانند شرکت $S\&P$) به دست آورد. تفاوت مدل‌های ریسک اعتباری، از تفاوت روش‌ها در به دست آوردن وابستگی میان Y_i ها ناشی می‌شود. در ادامه شرح مختصری از مدل‌های موجود را ارائه می‌دهیم (فری و مک‌نیل (۲۰۰۱)).

---

[۱۵] Frechet

[۱۶] Exposure at Default

[۱۷] Marginal Default Probabilities

۱.۵.۱ مدل متغیرهای پنهان

فرض کنید متغیر تصادفی S_i، $(i = 1 : n)$ شاخص وضعیت وام‌گیرنده‌ی i–ام در زمان T است و مقادیر صحیح $\{0, 1, \cdots, m\}$ را که بیان‌گر رتبه‌ی وام‌گیرنده است، اختیار می‌کند. اگر فرض کنیم تنها دو حالت نکول و عدم نکول برای هر وام وجود دارد خواهیم داشت

$$Y_i = 1 \Longleftrightarrow S_i = 0 \ \ , \ Y_i = 0 \Longleftrightarrow S_i > 0.$$

فرض کنید $X = (X_1, \cdots, X_n)$ یک بردار تصادفی n–بعدی با تابع‌های توزیع حاشیه‌ای پیوسته‌ی $F_i(x) = P(X_i \leq x_i)$ باشد. برای $i \in \{1, \cdots, n\}$ دنباله‌ی زیر را در نظر بگیرید

$$-\infty = D^i_{-1} < D^i_o < \cdots < D^i_m = \infty,$$

که یک دنباله از سطوح برشی[۱۸] است و قرار می‌دهیم

$$S_i = j \Longleftrightarrow X_i \in (D^i_{j-1}, D^i_j] \quad j \in \{0, 1, \cdots, m\}, i \in \{1, \cdots, n\}.$$

در این صورت $(X_i, (D^i_j) - 1 \leq j \leq m)_{1 \leq i \leq n}$، یک مدل متغیر پنهان برای بردار وضعیت $S = (S_1, \cdots, S_n)$ است.

در این مدل، P_i ها معلوم و X_i ها که متغیر پنهان هستند، به مجموعه‌ای از عوامل مستقل از هم و هم‌توزیع (مانند عوامل سیاسی، جغرافیایی و ...)، وابسته‌اند. در مدل کاپولای گاوسی، فرض می‌شود بردار متغیرهای پنهان، توزیع نرمال چند متغیره و در مدل تی–کاپولا، توزیع تی–استودنت دارند.

تعریف ۱.۵.۱ فرض کنید $(X_i, (D^i_j) - 1 \leq j \leq m)_{1 \leq i \leq n}$ و $\left(\tilde{X}_i, (\tilde{D^i_j}) - 1 \leq j \leq m\right)_{1 \leq i \leq n}$ دو مدل متغیرهای پنهان با بردارهای وضیت S و $\tilde{S}$ باشند. این دو مدل را معادل می گوییم هرگاه S و $\tilde{S}$ هم‌توزیع باشند.

حال معیاری برای سنجش معادل بودن دو مدل مطرح می‌کنیم که بر حسب کاپولای X و تابع‌های توزیع حاشیه‌ای بردار وضعیت S است.

---

[۱۸] Cut-Off

گزاره ۲.۵.۱ فرض کنید $(X_i,(D_j^i)-1\leq j\leq m)_{1\leq i\leq n}$ و $\left(\tilde{X}_i,(\tilde{D_j^i})-1\leq j\leq m\right)_{1\leq i\leq n}$ دو مدل متغیرهای پنهان با بردارهای وضیت S و $\tilde{S}$ باشند. این دو مدل معادل هستند، هرگاه

۱. تابع‌های توزیع حاشیه‌ای بردارهای تصادفی S و $\tilde{S}$ همانند باشد، یعنی داشته باشیم

$$P(X_i\leq D_j^i)=P(\tilde{X}_i\leq \tilde{D_j^i})\ ,\ i\in\{0,\cdots,m\},\ i\in\{1,\cdots,n\},$$

۲. X و $\tilde{X}$ یک کاپولا داشته باشند.

۲.۵.۱ مدل‌های مخلوط

در این مدل‌ها، احتمال‌های نکول به مجموعه‌ای از عوامل مستقل از هم و هم‌توزیع‌وابسته‌اند. یعنی اگر Y_i مشخصه‌ی نکول باشد و $P(Y_i=1)=p_i$، p_i ها به مجموعه‌ای از عوامل مستقل از هم و هم‌توزیع‌وابسته‌اند. بنابراین وابستگی میان متغیرهای نکول از وابستگی میان احتمال‌های نکول، ناشی می‌شود. در اینجا دو مدل، یعنی مدل مخلوط دوجمله‌ای[۱۹] و مدل مخلوطپواسن[۲۰] را شرح می‌دهیم.

مدل مخلوط دوجمله‌ای. برای $m<n$ و بردار تصادفی $\Psi=(\Psi_1,\cdots,\Psi_m)$ داده شده، بردار تصادفی $Y=(Y_1,\cdots,Y_n)$ از یک مدل مخلوطی دوجمله‌ای با بردار فاکتور Ψ تبعیت می‌کند، اگر توابع $Q_i:R^m\to[0,1]$ که $1\leq i\leq n$، وجود داشته باشند به طوری که با شرط روی Ψ، مشخصه‌ی نکول Y، یک بردار از متغیرهای تصادفی دوجمله‌ای مستقل از هم با $P(Y_i=1|\Psi)=Q_i(\Psi)$ باشد.

مدل مخلوط پواسن. برای m و Ψ داده شده در مدل قبل، بردار تصادفی $\tilde{Y}=(\tilde{Y_1},\cdots,\tilde{Y_n})$ از یک مدل مخلوطپواسن با بردار فاکتور Ψ باشد اگر توابع $\Lambda_i:\to(0,\infty)$ که $1\leq i\leq n$، وجود داشته باشند به طوری که

[۱۹] Bernoulli Mixture Model
[۲۰] Poisson Mixture Model