Nama: .... Kelas: ....

Sekolah: ....

BAGIAN PERTAMA

1. Banyaknya pasangan terurut bilangan bulat (a, b) sehingga $a^2 + b^2 = a + b$ adalah ....

2. Diberikan trapesium $ABCD$, dengan AD sejajar BC. Diketahui $BD = 1$, $\angle DBA = 23°$, dan $\angle BDC = 46°$. Jika perbandingan $BC : AD = 9 : 5$, maka panjang sisi CD adalah ....

3. Misalkan $a > 0$ dan $0 < r_1 < r_2 < 1$ sehingga $a + ar_1 + ar_1^2 + \cdots$ dan $a + ar_2 + ar_2^2 + \cdots$ adalah dua deret geometri tak hingga dengan jumlah berturut-turut r_1 dan r_2. Nilai $r_1 + r_2$ adalah ....

4. Diketahui $S = \{10, 11, 12, \ldots, N\}$. Suatu unsur di S dikatakan *trubus* jika jumlah digit-digitnya merupakan pangkat tiga dari suatu bilangan asli. Jika S memiliki tepat 12 trubus, maka nilai terbesar N yang mungkin adalah ....

5. Bilangan asli terkecil n sehingga $\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$ habis dibagi 30 adalah ....

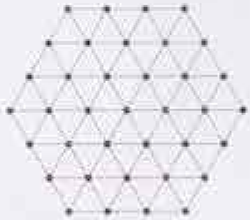
6. Diberikan segitiga tak samakaki ABC dengan M titik tengah BC. Misalkan K adalah titik berat segitiga ABM. Titik N pada sisi AC sehingga luas segiempat $KMCN$ setengah dari luas segitiga ABC. Nilai $\dfrac{AN}{NC}$ adalah ....

7. Di dalam suatu kotak terdapat n kelereng merah dan m kelereng biru. Diambil 5 kelereng sekaligus. Jika peluang terambilnya 3 kelereng merah dan 2 biru $\dfrac{25}{77}$, maka nilai terkecil $m^2 + n^2$ yang mungkin adalah ....

8. Misalkan $P(x)$ suatu polinom (suku banyak) *tak konstan* dengan koefisien bilangan bulat tak negatif yang memenuhi $P(10) = 2018$. Misalkan m dan M berturut-turut adalah nilai minimum dan maksimum yang mungkin dari $P(1)$. Nilai $m + M$ adalah ....

9. Sebuah provinsi terdiri dari sembilan kota yang diberi nama 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Dari kota a terdapat jalan langsung ke kota b jika dan hanya jika $\overline{ab}$ dan $\overline{ba}$ merupakan bilangan dua digit yang habis dibagi 3. Dua kota *berbeda* a_1 dan a_n dikatakan terhubung jika terdapat barisan kota-kota $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ sehingga terdapat jalan langsung dari a_i ke a_{i+1} untuk setiap $i = 1, \ldots, n-1$. Banyaknya kota yang terhubung dengan kota 4 adalah ....

10. Diberikan 37 titik seperti pada gambar sehingga setiap dua titik yang bertetangga berjarak satu satuan. Dari setiap tiga titik berbeda digambar segitiga merah. Banyaknya kemungkinan panjang sisi segitiga merah yang sama sisi adalah ....



11. Diambil secara acak suatu bilangan bulat positif k dengan $k \leq 2018$. Peluang k^{1009} bersisa 2 jika dibagi 2018 adalah ....

12. Diberikan bilangan real tak negatif a, b, c, d, e dengan $ab + bc + cd + de = 2018$. Nilai minimum dari $a + b + c + d + e$ adalah ....

13. Banyaknya himpunan bagian (termasuk himpunan kosong) dari $X = \{1, 2, 3, \ldots, 2017, 2018\}$ yang tidak memiliki dua unsur x dan y sehingga $xy = 2018$ ada sebanyak $m2^n$ dengan m ganjil. Nilai $m + n$ adalah ....

14. Misalkan $S = \{1, 2, \ldots, n\}$. Diketahui ada tepat 1001 pasangan (a, b, c, d) dengan $a, b, c, d \in S$ dan $a < b < c < d$ sehingga a, b, c, d merupakan barisan aritmetika. Nilai n adalah ....

15. Banyaknya bilangan asli n sehingga

$$n^4 - 5n^3 + 5n^2 + 4n + 10$$

merupakan bilangan prima adalah ....

16. Titik M terletak pada lingkaran luar segilima beraturan $ABCDE$. Nilai terbesar

$$\frac{MB + ME}{MA + MC + MD}$$

yang mungkin adalah ....

17. Untuk x, y bilangan real tak nol, jumlah nilai maksimum dan minimum

$$\frac{xy - 4y^2}{x^2 + 4y^2}$$

adalah ....

18. Suatu ras alien mempunyai suatu bahasa unik yang hanya terdiri dari dua huruf X dan Z. Dalam bahasa ini, setiap kata paling sedikit terdiri dari satu huruf dan tidak lebih dari 11 huruf. Untuk setiap dua kata, jika kata pertama dan kedua dituliskan berdampingan maka hasilnya bukan merupakan kata. Sebagai contoh jika XXZ dan $ZZZZX$ adalah kata, maka $XXZZZZZX$ bukan kata. Maksimal banyaknya kata dalam bahasa ini adalah ....

19. Suatu segitiga lancip ABC memiliki panjang sisi bilangan bulat. Diketahui $AC = BD$ dengan D adalah titik pada garis BC sehingga AD tegak lurus BC. Nilai terkecil panjang sisi BC yang mungkin adalah ....

20. Untuk sebarang bilangan real x, notasi $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan x, sedangkan $\lceil x \rceil$ menyatakan bilangan bulat terkecil yang lebih besar atau sama dengan x. Bilangan asli terbesar n sehingga

$$50\lfloor x \rfloor - \lfloor x \lfloor x \rfloor \rfloor = 100n - 27\lceil x \rceil$$

memiliki solusi real x adalah ....

Nama: .... Kelas: ....
Sekolah: ....

BAGIAN KEDUA

Soal 1. Sejumlah n siswa duduk mengelilingi suatu meja bundar. Diketahui siswa laki-laki sama banyak dengan siswa perempuan. Jika banyaknya pasangan 2 orang yang duduk bersebelahan dihitung, ternyata perbandingan antara pasangan bersebelahan yang berjenis kelamin sama dan pasangan bersebelahan yang berjenis kelamin berbeda adalah 3 : 2. Tentukan n terkecil yang mungkin.

Jawaban:

Soal 2. Misalkan a, b, dan c bilangan bulat positif sehingga

$$c = a + \frac{b}{a} - \frac{1}{b}.$$

Buktikan bahwa c adalah kuadrat dari suatu bilangan bulat.

Jawaban:

Soal 3. Misalkan Γ_1 dan Γ_2 lingkaran berbeda dengan panjang jari-jari sama dan berturut-turut berpusat di titik O_1 dan O_2. Lingkaran Γ_1 dan Γ_2 bersinggungan di titik P. Garis ℓ melalui O_1 menyinggung Γ_2 di titik A. Garis ℓ memotong Γ_1 di titik X dengan X di antara A dan O_1. Misalkan M titik tengah AX dan Y titik potong PM dengan Γ_2 dengan $Y \neq P$. Buktikan bahwa XY sejajar O_1O_2.

Jawaban:

Soal 4. Misalkan a, b, c bilangan real positif dengan $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3$. Buktikan bahwa

$$a + b + c + \frac{4}{1 + (abc)^{\frac{2}{3}}} \geq 5.$$

Jawaban:

Soal 5. Pada papan catur berukuran 200×200 persegi satuan diletakkan kelereng merah atau biru sehingga setiap persegi satuan memiliki paling banyak 1 buah kelereng. Dua kelereng dikatakan segaris jika mereka terletak pada baris atau kolom yang sama. Diketahui untuk setiap kelereng merah ada tepat 5 kelereng biru yang segaris dan untuk setiap kelereng biru ada tepat 5 kelereng merah yang segaris. Tentukan maksimum banyaknya kelereng yang mungkin pada papan catur tersebut.

Jawaban:

Catatan. Soal Bagian 2 ini disusun ulang oleh Folder OSN