وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه
گاوازنگ - زنجان

قیمت‌گذاری ابزارهای مشتقه به کمک روش مونت کارلو-کمترین مربعات

پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد

زهرا احمدی

استاد راهنما: **دکتر علی فروش باستانی**

مرداد ۱۳۹۰

بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم به پدر و مادر عزیزم

تشکر و قدردانی

از خدای بزرگ و مهربان که من را لایق تحصیل علم دانست بسیار تشکر می‌کنم. لطف و توجه خداوند بزرگ همواره شامل حال من بوده است. از پدر هم‌چو کوه و مادر هم‌چو آفتابم نهایت تشکر را دارم. همچنین بر خود لازم می‌دانم از تمام اعضای خانواده عزیزم که همواره حامی من بوده‌اند، تشکر کنم. گرمای وجود آن‌ها و حمایت بی‌دریغ‌شان تمام انگیزه من بوده است. از استاد گرانقدر و بزرگوارم دکتر علی فروش باستانی بسیار تشکر می‌کنم. ایشان مرجع اصلی در رفع مشکلات من بوده‌اند. همچنین از اساتید بزرگوار دکتر آرش فهیم و دکتر حسن داداشی نیز تشکر می‌کنم. از تمام دوستانم بالاخص بهناز قربانلو، زانیار احمدی، شهاب نانکلی، مجتبی شاکری، علی صادقی و عین‌اله میرزایی تشکر می‌کنم.

چکیده

امروزه ساختار بازارهای مالی، ریسک‌های فراوانی را ایجاد می‌کند. موسسه‌ها و شرکت‌های مالی، بانک‌ها و بسیاری از سازمان‌ها در جهت سود بیشتر و ضرر کمتر و همچنین بقا خود، سبد سرمایه‌گذاری را تشکیل می‌دهند. از جمله اجزا جدا نشدنی این سبدها دارایی‌های ریسکی هستند. همین ساختار موجب بوجود آمدن ریسک‌هایی برای موسسه‌های سرمایه‌گذار می‌شود و آن‌ها باید ریسک‌های موجود را مدیریت کنند. ابزارهای مشتقه از جمله مهم‌ترین اهرم‌های مالی هستند که برای مدیریت ریسک بکار می‌روند. همان‌طور که از نام آن‌ها پیدا است، ارزش این ابزارها بر اساس دارایی ریسکی دیگر مشخص می‌شود. بکارگیری این ابزارها بدون قیمت‌گذاری آن‌ها ممکن نیست و لذا قیمت‌گذاری آن‌ها جزء مهمی از بازارهای مالی می‌باشد.

نقش اختیارات آمریکایی در این عرصه قابل اغماض نیست و بنابراین قیمت‌گذاری این نوع ابزار بسیار مهم است. سه رهیافت کلی مونت کارلو، دوجمله‌ای و تفاضلات متناهی برای قیمت‌گذاری این ابزارها بکار می‌رود. در این پایان‌نامه روش اصلاح شده مونت کارلو را برای ارزشیابی انواع مختلفی از اختیارات آمریکایی بکار می‌بریم. الگوریتم این روش در سال ۲۰۰۱ در [۱] به صورت ساده بیان شد. اساس این الگوریتم که مونت کارلو-کمترین مربعات نامیده می‌شود، شبیه‌سازی و روش مونت کارلو می‌باشد. در این پایان‌نامه به بیان و اثبات همگرایی روش پرداختیم و این روش را برای قیمت‌گذاری اختیارات آمریکایی، اختیارات با مانع آمریکایی و اختیارات آسیایی آمریکایی با بعد پایین بکار بردیم. همچنین در جهت بهبود روش اصلاحاتی روی آن اعمال کردیم و در نهایت از مدل پرش-پخش برای قیمت‌گذاری اختیارات با این روش استفاده کردیم.

واژه‌های کلیدی: *قیمت‌گذاری اختیارات، اختیار آمریکایی، کمترین مربعات خطا، قیمت‌گذاری اختیار با مانع آمریکایی همراه با پرش، قیمت‌گذاری اختیار آسیایی آمریکایی با پخش پرش.*

فهرست

چکیده . . . . پنج
پیش‌گفتار ۱

۱ تعاریف و مفاهیم مقدماتی ۴

۱.۱ مفاهیم و ابزارهای مالی ۴
۲.۱ مفاهیم احتمالاتی ۷

۲ مروری بر روش‌های قیمت‌گذاری اختیار آمریکایی ۱۲

۱.۲ فرمول‌بندی مسأله ۱۲
۲.۲ معادله دیفرانسیل پاره‌ای برای اختیار آمریکایی ۱۴
۳.۲ روش قیمت‌گذاری اختیار آمریکایی ۱۶
۱.۳.۲ روش تفاضلات متناهی ۱۶
۲.۳.۲ روش دوجمله‌ای ۱۸
۴.۲ روش‌های مونت کارلو ۲۱
۱.۴.۲ قیمت‌گذاری اختیارات اروپایی ۲۱
۵.۲ روش‌های مونت کارلو برای قیمت‌گذاری اختیارات آمریکایی ۲۲
۱.۵.۲ فرم برنامه‌ریزی پویای مسأله ۲۳

۲.۵.۲ قوانین توقف ۲۵
۳.۵.۲ ارزش عدم اجرا ۲۵
۶.۲ تقریب‌های پارامتری ۲۶
۱.۶.۲ بهینه‌سازی ۲۸
۷.۲ درخت تصادفی ۲۹
۱.۷.۲ تخمین‌گر بالا ۳۰
۲.۷.۲ تخمین‌گر پایین ۳۲
۸.۲ افراز فضای حالت ۳۴
۹.۲ روش بافت تصادفی ۳۶
۱.۹.۲ شرط‌های روی بافت ۳۸
۲.۹.۲ تخمین‌گر بالا ۳۸
۳.۹.۲ وزن‌ها ۴۰
۱۰.۲ دوگان ۴۱
۱.۱۰.۲ مارتینگل حاصل از تابع ارزش ۴۴
۲.۱۰.۲ مارتینگل حاصل از تابع ارزش قانون توقف ۴۵

۳ روش مونت کارلو-کمترین مربعات ۴۷
۱.۳ مثال عددی ۴۸
۲.۳ فرمول‌بندی روش LSM ۵۳
۳.۳ معرفی پایه‌ها ۵۵
۴.۳ الگوریتم روش LSM ۵۷
۱.۴.۳ نتایج عددی ۵۸

۴ تحلیل روش مونت کارلو-کمترین مربعات برای قیمت‌گذاری اختیار آمریکایی ۶۴

۱.۴ الگوریتم و نمادگذاری ۶۵
۱.۱.۴ نمادگذاری ۶۷
۲.۴ همگرایی ۷۰

۵ رگرسیون "حالا" یا "بعد" ۷۶
۱.۵ برنامه‌ریزی پویا ۷۷
۲.۵ رگرسیون "حالا" ۷۸
۱.۲.۵ تخمین‌گر ۷۹
۳.۵ رگرسیون "بعد" ۸۰
۱.۳.۵ تخمین‌گر ۸۱
۲.۳.۵ الگوریتم رگرسیون "بعد" ۸۱
۴.۵ مقایسه ۸۳
۵.۵ توابع پایه‌ای مارتینگلی ۸۴
۱.۵.۵ توابع مارتینگلی یک بعدی ۸۴
۶.۵ نتایج عددی ۸۶

۶ قیمت‌گذاری اختیارات با مانع آمریکایی با مدل پرش ۸۸
۱.۶ اختیارات با مانع ۸۹
۱.۱.۶ مروری بر روش‌های قیمت‌گذاری ۹۱
۲.۶ فرمول‌بندی مسأله قیمت‌گذاری اختیار با مانع آمریکایی ۹۲
۳.۶ مدل پرش ۹۳
۱.۳.۶ شبیه‌سازی مسیرهای با پرش ۹۵
۴.۶ قیمت‌گذاری اختیارات با مانع همراه مدل پرش-پخش به روش LSM ۹۷
۱.۴.۶ ساخت مسیر با مدل پرش-پخش ۹۸

۵.۶ نتایج عددی ۱۰۷

۷ قیمت‌گذاری اختیار آمریکایی-آسیایی ۱۰۹

۱.۷ اختیارات آمریکایی-آسیایی ۱۱۰

۲.۷ فرمول‌بندی مسأله قیمت‌گذاری اختیار آمریکایی-آسیایی ۱۱۳

۱.۲.۷ الگوریتم مونت کارلو-کمترین مربعات برای اختیار آمریکایی-آسیایی . ۱۱۴

۳.۷ نتایج عددی ۱۱۴

۱.۳.۷ مدل قیمت دارایی براونی هندسی ۱۱۴

۲.۳.۷ مدل قیمت دارایی همراه با پرش ۱۱۷

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی ۱۲۳

پیش‌گفتار

در تمام بورس‌های معروف دنیا ابزارهای مشتقه[۱] بطور قابل توجهی داد و ستد می‌شوند. ابزارهای مشتقه روی سهام[۲]، شاخص سهام، نفت خام، نرخ بهره، ارز، طلا، انرژی، آب و هوا و بطور کلی هر متغیر تصادفی بسته می‌شود. کاربرد اساسی و مهم این ابزارها در مدیریت ریسک است. اختیارات[۳]، که در واقع امتیازی برای دارنده خود محسوب می‌شوند، از جمله مهم‌ترین ابزارهای مشتقه هستند. دو نوع معروف و استاندارد آن‌ها، اختیارات آمریکایی[۴] و اروپایی[۵] هستند. در نوع آمریکایی آزادی عمل بیشتری وجود دارد و این دلیل عمده نام‌گذاری این اختیار است. در آوریل ۱۹۷۳، بورس شیکاگو یک تالار اختصاصی برای اختیارات معامله بر روی سهام تشکیل داد. این بازار خاص، بورس اختیار معامله شیکاگو[۶] نام‌گذاری شد. پس از آن، چندین بورس سهام و تقریباً تمام بورس‌های معاملات آتی[۷]، به مبادله اختیار معامله اقدام نمودند. ارزش‌یابی اختیارات آمریکایی بالقوه مشکل‌تر از ارزش‌یابی نوع اروپایی است و در حالت کلی فرم تحلیلی برای بدست آوردن قیمت آن‌ها وجود ندارد.

با توجه به پیشرفت بازارهای مالی، احتیاج به ترکیب‌های جدیدی از اختیارات استاندارد حس می‌شد. همچنین با بررسی دقیق‌تر قیمت‌های سهام و اختیار در بازارهای مالی، واقعیت‌های جدیدی برای پژوهش‌گران عرصه قیمت‌گذاری آشکار شده است. متناسب با دارایی که اختیار روی آن بسته می‌شود

---

[۱] Derivative Instruments

[۲] Stock

[۳] Options

[۴] American Options

[۵] European Options

[۶] Chicago Board of Option Exchange

[۷] Futures

و همچنین بنابر حساسیت‌های موجود برای موسسه‌ای که اختیار را بکار می‌برد، انواع متفاوتی از اختیارات ابداع شده است. با پیچیده‌تر شدن اختیار، قیمت‌گذاری آن نیز مشکل می‌شود. همچنین قیمت‌گذاری اختیاری که روی چند نوع دارایی مختلف بسته شود و یا به هر دلیلی بُعد آن بیشتر از یک است نیز از چالش‌های اصلی قیمت‌گذاری محسوب می‌شود.

متناسب با تعریف، بعضی از اختیارات می‌توانند به مسیر قیمت در کل دوره وابسته باشند و یا بعد اختیار بیشتر از یک باشد. در بسیاری از این حالات فرم بسته برای قیمت اختیار اروپایی و آمریکایی وجود ندارد و به ناچار باید از روش‌های عددی برای قیمت‌گذاری آن‌ها استفاده شود.

فیشر بلک[۱] و مایرون شولز[۲] تغییرات قیمت سهام را با حرکت براونی هندسی[۳] بیان کردند. این ساده‌ترین مدل پیوسته برای تغییرات قیمت دارایی مانند سهام است و تحت این فرض آن‌ها توانستند فرم تحلیلی برای قیمت اختیار اروپایی ارائه دهند. اما برای قیمت اختیار آمریکایی در این حالت نیز نتوانستند فرم بسته‌ای بیان کنند. با بررسی داده‌های واقعی اشکالاتی برای مدل بلک و شولز بیان شد. برای رفع بعضی از این اشکالات مدل پرش-پخش[۴]، اولین بار توسط مرتون[۵] بیان شد. اگر تغییرات قیمت همراه با پرش-پخش باشد حتی برای قیمت اختیار اروپایی نیز فرم بسته‌ای وجود ندارد.

از جمله روش‌های عددی مرسوم قیمت‌گذاری اختیارات، روش‌های دوجمله‌ای[۶] و تفاضلات متناهی[۷] را می‌توان نام برد. این روش‌ها برای قیمت‌گذاری اختیاراتی با بعد بالا و یا در حالاتی که تغییرات قیمت قابل مدل‌سازی توسط معادله بلک و شولز نباشد و یا زمانی که ارزش اختیار به مسیر وابسته باشد

---

[۱] Fisher Black

[۲] Myron Scholes

[۳] Geometric Brownian Motion

[۴] Jump Diffusion

[۵] Merton

[۶] Binomial Methods

[۷] Finite Difference Methods

کارایی لازم را ندارند. رشد سریع حجم محاسبات، پیچیدگی پیاده‌سازی و عدم همگرایی از مهم‌ترین مشکلاتی است که در استفاده از این روش‌ها بوجود می‌آید.

روش‌های مبتنی بر مونت کارلو[۱] مشکلات روش‌های قبل را ندارند. نرخ همگرایی این روش با افزایش بعد کاهش نمی‌یابد و پیاده‌سازی آن برای انواع مختلف اختیارات ممکن است. در واقع برای قیمت‌گذاری اختیارات با بعد بالا و یا اختیارات پیچیده، استفاده از مونت کارلو تنها راه ممکن است. این روش برای اختیارات اروپایی و آمریکایی کاربرد دارد. در بعد یک، همگرایی روش مونت کارلو در مقایسه با روش‌های دیگر کم است و استفاده از آن برای اختیارات اروپایی استاندارد توصیه نمی‌شود اما برای اختیارات آمریکایی در بعد یک نیز کارایی لازم را دارد.

در این پایان‌نامه، ما از روش مونت کارلو-کمترین مربعات برای قیمت‌گذاری اختیارات آمریکایی استفاده می‌کنیم. این روش اولین بار توسط کرییر[۲] [۲] وارد عرصه ریاضیات مالی شد. ایده اصلی او استفاده از رگرسیون بود. در فصل سوم ما جزئیات این الگوریتم را بیان کرده و آن را برای قیمت‌گذاری اختیارات استاندارد آمریکایی بکار می‌بریم. کلمنت[۳] در مقاله خود همگرایی روش را ثابت کرد و ما نیز به اختصار در فصل چهارم آن را بیان می‌کنیم. گلسرمن[۴] اصلاحی برای این روش ارائه کرد، ما به اختصار این الگوریتم را در فصل پنجم پیاده‌سازی می‌کنیم. همچنین در فصل ششم این الگوریتم را برای قیمت‌گذاری اختیارات غیر استاندارد با مانع آمریکایی بکار می‌بریم و سپس مدل پرش-پخش را برای بیان تغییرات قیمت دارایی استفاده می‌کنیم و نحوه شبیه‌سازی این مسیرها را بیان می‌کنیم و دوباره اختیار با مانع آمریکایی را با این مدل و به کمک الگوریتم مونت کارلو-کمترین مربعات قیمت‌گذاری می‌کنیم. به طور مشابه از این الگوریتم برای قیمت‌گذاری اختیار غیر استاندارد آمریکایی-آسیایی استفاده می‌کنیم و برای این نمونه نیز از مدل پرش-پخش استفاده می‌کنیم.

---

۱ Monte Carlo Methods

۲ Carrier

۳ Clement

۴ Grasserman

فصل اول

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

در این فصل به معرفی برخی از مفاهیم پایه‌ای مورد نیاز در این پایان‌نامه می‌پردازیم. این فصل شامل دو قسمت است که بخش اول به مفاهیم و ابزارهای مالی و بخش دوم به مفاهیم احتمالاتی مورد نیاز اختصاص دارد.

۱.۱ مفاهیم و ابزارهای مالی

در دهه اخیر مشتقات مالی نقش بسیار مهمی در بازارهای مالی ایفا کرده‌اند. مشتقات نوعی از ابزارهای مالی هستند که ارزش آن‌ها وابسته به متغیر اقتصادی دیگر، به نام دارایی پایه[۱] است. دارایی پایه می‌تواند نفت خام، طلا، دلار، شاخص سهام[۲]، نرخ بهره[۳] و حتی ذرت، لوبیا و گاو یا هر نوع دارایی دیگری

---

۱ Underlying Asset

۲ Stock Indexes

۳ Interest Rates

باشد. به طور کلی مشتقات به چهار دسته تقسیم می‌شوند: قراردادهای سلف[۱]، قراردادهای آتی[۲]، اختیارات[۳] و قراردادهای تاخت[۴]. مشتقات غیراستاندارد نیز به طور گسترده‌ای در بازارهای مالی به کار می‌روند. مشتقات، ابزارهای پیچیده‌ای هستند و مدیریت آن‌ها که شامل طراحی، قیمت‌گذاری و ریسک‌زدایی می‌شود، جزء مسائل مشکل ریاضیات مالی محسوب می‌شوند. در ادامه به ارائه برخی از تعاریف مربوط به این حوزه می‌پردازیم.

تعریف ۱.۱.۱. اختیار روی سهام[۵] قراردادی است که امتیاز مبادله تعداد مشخصی از سهام عادی به قیمت ثابت در زمان آینده را به دارندهٔ خود می‌دهد.

آخرین زمان اجرای اختیار و قیمت مشخص شده در آن را به ترتیب **سررسید**[۶] و **قیمت توافق شده**[۷] می‌خوانیم.

امتیاز داده شده به دارندهٔ اختیار به معنای گرفتن تعهد نیست و بنابراین دارنده اختیار می‌تواند گزینه اجرا نکردن اختیار را انتخاب کند.

تعریف ۱.۲.۱. پرداخت نهایی[۸] تابعی است که ارزش اختیار در زمان معین t را مشخص می‌کند.

اختیارات بر اساس پرداخت نهایی، انواع مختلفی دارند. در واقع می‌توان گفت تفاوت عمده اختیارات در پرداخت نهایی آن‌ها است. بر همین اساس اختیارات به دو دسته زیر تقسیم می‌شوند:

---

۱ Forwards

۲ Futures

۳ Options

۴ Swaps

۵ Stock Option

۶ Maturity

۷ Strike Price

۸ Payoff

الف. **اختیار خرید**[۱]: اختیاری است که حق خرید دارایی پایه در تاریخ معین و قیمت مشخص را به دارندهٔ خود می‌دهد.

ب. **اختیار فروش**[۲]: اختیاری است که حق فروش دارایی پایه در تاریخ معین و قیمت مشخص را به دارندهٔ خود می‌دهد.

با توجه به زمان اجرا می‌توانیم اختیار خرید و فروش را به دو دسته کلی زیر تقسیم‌بندی کنیم:

تعریف ۱.۳.۱. اختیاری را که تنها بتوان در زمان سررسید اجرا کرد، اختیار اروپایی می‌نامیم.

تعریف ۱.۴.۱. اختیاری را که بتوان آن را در هر زمانی قبل از سررسید و نیز خود سررسید اجرا کرد را اختیار آمریکایی می‌نامیم.

با توجه به علامت پرداخت نهایی در زمان اجرا، دو مفهوم زیر را خواهیم داشت:

تعریف ۱.۵.۱. در زمان اجرا اختیار با قیمت[۳] است اگر پرداخت نهایی آن مثبت باشد و بی قیمت [۴] است اگر پرداخت نهایی آن مثبت نباشد.

ارزش اختیار به مشخصات دینامیک قیمت دارایی پایه مانند نوسانات قیمت[۵] و نرخ بهره بستگی دارد. به طور مثال ارزش هر اختیار با افزایش نوسانات قیمت افزایش می‌یابد و یا ارزش اختیار خرید (فروش)، با افزایش نرخ بهرهٔ بدون ریسک، افزایش (کاهش) می‌یابد. ارزش اختیار آمریکایی به دلیل آزادی عمل بیشتر در مقایسه با اختیار اروپایی مشابه، بیشتر است. با توجه به نوع اختیار آمریکایی ارزش این اختیار براساس اجرای بهینه بدست می‌آید. در واقع یافتن ارزش اختیار آمریکایی معادل با یافتن بهترین زمان اجرای اختیار است.

---

۱ Call Option

۲ Put Option

۳ In-the-Money

۴ Out-of-the-Money

۵ Volatility

تعریف ۱.۶.۱. موقعیتی که در آن سرمایه‌گذار بدون قرار گرفتن در معرض ریسک، درآمد بدست بیاورد را موقعیت آربیتراژ[۱] می‌گوییم.

فرض اساسی در قیمت‌گذاری، عدم آربیتراژ در بازار است. با توجه به این اصل، اندازه‌ای به نام اندازه ریسک-خنثی[۲] بدست می‌آید که برای قیمت‌گذاری به کار می‌رود.

۲.۱ مفاهیم احتمالاتی

ارزش اختیار به مدل تغییرات قیمت دارایی پایه که در فضای احتمالاتی بیان می‌شود بستگی دارد و لذا برای ارزشیابی و قیمت‌گذاری اختیارات ناگریز به بررسی آن هستیم. در این بخش پیش زمینهٔ کوتاهی برای مفاهیم احتمالاتی و محاسبات تصادفی بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۱.۲. در فضای ناتهی Ω، کلاس $\mathcal{F}$ از زیر مجموعه‌های Ω، را میدان[۳] گوییم اگر شامل Ω باشد و تحت عمل مکمل‌گیری[۴] و اجتماع متناهی[۵] بسته باشد.

تعریف ۲.۲.۱. کلاس $\mathcal{F}$ از زیر مجموعه‌های Ω را سیگما-میدان[۶] گوییم اگر $\mathcal{F}$ میدان باشد و علاوه بر آن تحت عمل اجتماع شمارش‌پذیر[۷] بسته باشد.

سیگما-میدان تولید شده توسط $\mathcal{F}$ را با $\sigma(\mathcal{F})$ نمایش می‌دهیم که دارای ویژگی‌های زیر است:

---

[۱] Arbitrage

[۲] Risk-Neutral

[۳] Field

[۴] Formation of Complements

[۵] Finite Unions

[۶] σ-Field

[۷] Formation of Countable Unions

۱. $\mathcal{F} \subset \sigma(\mathcal{F})$.

۲. $\sigma(\mathcal{F})$ سیگما-میدان است.

۳. اگر $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ باشد، آن‌گاه $\sigma(\mathcal{F}) \subset \sigma(\mathcal{A})$ است.

تعریف ۲.۳.۱. تابع $\mathcal{P}$ روی $\mathcal{F}$ را تابع اندازه احتمال[1] می‌گوییم اگر شرایط زیر برای آن برقرار باشد:

۱. برای هر $A \in \mathcal{F}$، $0 \leq \mathcal{P}(A) \leq 1$ باشد.

۲. $\mathcal{P}(\varnothing) = 0$ و $\mathcal{P}(\Omega) = 1$ باشد.

۳. اگر $\{A_1, A_2, ...\} \in \mathcal{F}$ دنباله‌ای از مجموعه‌های مجزا[2] از هم باشند به طوری‌که $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{F}$ باشد، آن‌گاه داشته باشیم:

$$\mathcal{P}(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{P}(A_k).$$

حال اگر $\mathcal{P}$ تابع اندازه احتمال و $\mathcal{F}$ سیگما-میدان روی فضای ناتهی Ω باشد، آن‌گاه سه‌تایی $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ را یک **فضای احتمالاتی**[3] می‌نامیم.

تعریف ۲.۴.۱. تابع حقیقی f روی Ω را اندازه پذیر ($\mathcal{F}$-اندازه پذیر) گوییم اگر برای هر $A \in \mathbb{R}$ تساوی $f^{-1}(A) = \{w : f(w) \in A\} \in \mathcal{F}$ برقرار باشد.

تابع حقیقی اندازه پذیر روی $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ را یک **متغیر تصادفی** می‌گوییم. فرض می‌کنیم X یک متغیر تصادفی روی فضای احتمالاتی $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ باشد و $\mathcal{G}$ سیگما-میدان داده شده در $\mathcal{F}$ باشد.

تعریف ۲.۵.۱. امید ریاضی متغیر تصادفی X، بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbb{E}[X] = \int_{Omega} X d\mathcal{P}$$

[1] Probability Measure

[2] Disjoint Sequence

[3] Probability Space

همچنین در این صورت متغیر تصادفی $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ با خصوصیات زیر وجود دارد:

* $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$، $\mathcal{G}$ اندازه پذیر است.

* $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$، برای هر $G \in \mathcal{G}$ در تساوی $\int_G \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]d\mathcal{P} = \int_G Xd\mathcal{P}$، صدق می‌کند.

تعریف ۲.۶.۱. متغییر تصادفی $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ را امید شرطی X به شرط $\mathcal{G}$ می‌گوییم.

فرض کنید T مجموعه‌ای از نقطه‌های زمانی باشد. در این صورت مجموعه‌ای از متغیرهای تصادفی به صورت

$$\{X(t), t \in T\} = \{X(t, w), t \in T, w \in \Omega\},$$

را یک فرآیند تصادفی روی Ω می‌نامیم. T می‌تواند بازهٔ زمانی $[a, b]$ و یا مجموعه‌ای از زمان‌های گسسته باشد.

تعریف ۲.۷.۱. اگر X متغیر تصادفی حقیقی باشد، سیگما میدان ساخته شده توسط آن را با $\sigma(X)$ و یا $\mathcal{F}_X$ نمایش می‌دهیم که بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sigma(X) = \{X^{-۱}(B) : B \in \mathbb{R}\}$$

فرض کنید $\{\mathcal{F}_t, t \geq ۰\}$ مجموعه از سیگما-میدان‌های $\mathcal{F}$ در Ω باشد.

تعریف ۲.۸.۱. مجموعهٔ $\{\mathcal{F}_t, t \geq ۰\}$ را یک فیلتر[۱] می‌نامیم هرگاه برای هر $۰ \leq s \leq t$، رابطه $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$ برقرار باشد.

تعریف ۲.۹.۱. فرآیند تصادفی $(X(t), t \geq ۰)$، فرآیند مارکوف با زمان پیوسته است اگر برای هر $۰ \leq t_۱ \leq t_۲ \leq \ldots \leq t_k \leq u$ و $k \geq ۱$ تساوی

$$\mathcal{P}[X(u)|X(t_۱), X(t_۲), \ldots, X(t_k)] = \mathcal{P}[X(u)|X(t_k)],$$

برقرار باشد.

---

[۱] Filtration

فرآیند تصادفی $\{(X(n), n = ۰, ۱, \ldots\}$، فرآیند مارکوف با زمان گسسته است اگر برای $k \leq n$ در تساوی

$$\mathcal{P}[X(n+۱)|X(۰), X(۱), \ldots, X(k)] = \mathcal{P}[X(n+۱)|X(k)],$$

صدق کند.

تعریف ۲.۱۰.۱. فرآیند تصادفی $(X(t), t \geq ۰)$، مارتینگل زمان پیوسته[1] نسبت به فیلتر $\mathcal{F}_t, t \geq ۰$ است اگر در شرایط زیر صدق کند:

۱. برای هر $t \geq ۰$، $\mathbb{E}[|X(t)|] < \infty$.

۲. $X(t)$، $\mathcal{F}_t$-اندازه پذیر باشد.

۳. برای هر $۰ \leq s \leq t$، $\mathbb{E}[X(t)|\mathcal{F}_s] = X(s)$.

تعریف ۲.۱۱.۱. فرآیند تصادفی $\{X(n),\ n = ۰, ۱, \ldots\}$، مارتینگل زمان گسسته[2] نسبت به فیلتر $\{\mathcal{F}_n, n = ۰, ۱, \ldots\}$ است اگر در شرایط زیر صدق کند:

۱. برای هر $n = ۰, ۱, \ldots$، $\mathbb{E}[|X(n)|] < \infty$.

۲. $X(n)$، $\mathcal{F}_n$ -اندازه پذیر باشد.

۳. برای هر $n = ۰, ۱, \ldots$، $\mathbb{E}[X(n+۱)|\mathcal{F}_n] = X(n)$.

تعریف ۲.۱۲.۱. فرآیند تصادفی $\{W(t), t \geq ۰\}$ را حرکت براونی[3] یا فرآیند وینر[4] گوییم، هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

۱. با احتمال یک $W(۰) = ۰$.

---

[1] Continuous-time Martingale

[2] Discrete-time Martingale

[3] Brownian Motion

[4] Wiener Process