수학 과목 (가형)

1. 정답 : ③

해설 : $\sqrt[3]{9}\times 3^{\frac{1}{3}}=3^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}=3^1=3$

2. 정답 : ②

해설 : 유리화 하면된다. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{4n^2+2n+1}-2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4n^2+2n+1}+2n}{2n+1}=2$

3. 정답 : ①

해설 : θ가 2사분면 각이고, $\sin\theta=\frac{\sqrt{21}}{7}$ 이므로 $\cos\theta=-\frac{2\sqrt{7}}{7}$ 따라서 $\tan\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

4. 정답 : ④

해설 : $P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{1}{4}$, $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{1}{3}$, $P(A)+P(B)=\frac{7}{10}$

$P(A)=4P(A\cap B)$, $P(B)=3P(A\cap B)$ 따라서 $P(A)+P(B)=\frac{7}{10}=7P(A\cap B)$

$P(A\cap B)=\frac{1}{10}$

5. 정답 : ⑤

해설 : $3^{-2x}<3^{21-4x}$, $-2x<21-4x$,$0<x<\frac{21}{2}$ 자연수 $x=1,2,3,\cdots,10$ 10개

6. 정답 : ②

해설 : $E(X)=20$,$\sigma(X)=5$, $n=16$, $E(\overline{X})=E(X)=20$, $\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}=\frac{5}{4}$

$E(\overline{X})+\sigma(\overline{X})=\frac{85}{4}$

7. 정답 : ①

해설 : $f'(x)=(2x-2)e^x+(x^2-2x-7)e^x=(x^2-9)e^x=0$

극댓값 $f(-3)=8e^3, f(3)=-4e^{-3}$ 따라서 $ab=-32$

8. 정답 : ②

해설 : $\int_{\ln\frac{1}{2}}^{\ln 2}e^{2x}dx=\frac{1}{2}[e^{2x}]_{\ln\frac{1}{2}}^{\ln 2}=\frac{1}{2}(4-\frac{1}{4})=\frac{15}{8}$

9. 정답 : ④

해설 : $\frac{7!\times{}_4C_2\times 2}{9!}=\frac{1}{6}$

10. 정답 : ②

해설 : 사인법칙에 의하여 $\dfrac{x}{\sin\dfrac{\pi}{3}}=2R=14$, $\overline{BC}=x=7\sqrt{3}$

$\overline{AB}=3k$, $\overline{AC}=k$, 코사인 제2법칙에 의하여 $\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}=\dfrac{9k^2+k^2-147}{2\times3k\times k}$, $k^2=21$ 따라서 $k=\sqrt{21}$

11. 정답 : ①

해설 : $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{\dfrac{1}{1+\dfrac{k}{3n}}}\cdot\dfrac{1}{3n}\cdot3=\int_{1}^{1+\frac{1}{3}}\sqrt{\dfrac{1}{x}}\,dx\cdot3$

$$=3\times\left[\frac{1}{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}\right]_{1}^{\frac{4}{3}}=3\times\left(\sqrt{\frac{4}{3}}-1\right)=4\sqrt{3}-6$$

12. 정답 : ④

해설 : $P(4\le X\le8)+P(Y\ge8)=\dfrac{1}{2}$

$P(4\le X\le8)+P(X\le4)=\dfrac{1}{2}$ 이므로

$P(Y\ge8)=P(X\le4)$

$P(Z\ge\dfrac{8-m}{\sigma})=P(Z\le\dfrac{4-8}{3})$

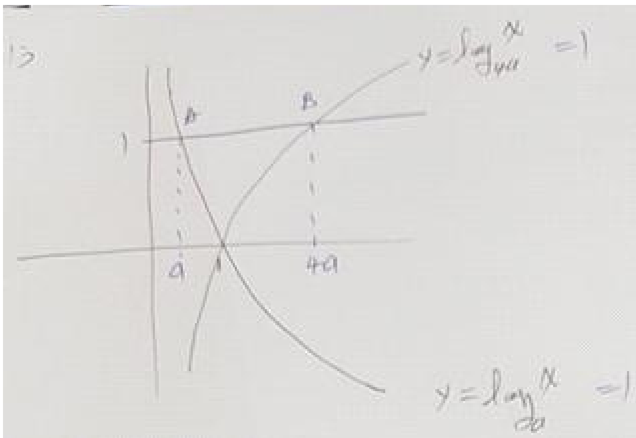
$\therefore\dfrac{8-m}{\sigma}=\dfrac{4}{3}$

$P(Y\le8+\dfrac{2\sigma}{3})=P\left(Z\le\dfrac{8+\dfrac{2\sigma}{3}-m}{\sigma}\right)P(Z\le\dfrac{\dfrac{4\sigma}{3}+\dfrac{2\sigma}{3}}{\sigma})=P(Z\le2)=0.5+P(0\le Z\le2)$

$=0.5+0.4772=0.9772$

13. 정답 : ③

해설 :



ㄱ. A(a,1) B(4a,1)

외분$((\dfrac{4a-4a}{1-4},\dfrac{1-4}{1-4})=(0,1)$ 참

ㄴ.ABCD가 직사각형이면 A와C B와D가 X축에 대칭이면 직사각형
A(a,1) B(4a,1)

$\log_{4a}x = -1 \quad \log_a x = -1 \quad C(\frac{1}{4a}, -1) \quad D(\frac{1}{a}, -1)$

$\frac{1}{4a} = a$

$4a^2 = 1 \quad a = \frac{1}{2}$

참

ㄷ. $\overline{AB} < \overline{CD}$

$4a - a < \frac{1}{a} - \frac{1}{4a}$

$4a^2 < 1$

$0 < a < \frac{1}{2}$

거짓

14. 정답 : ③
 해설 : 준비중

15. 정답 : ②
 해설 : $f(x) = \int 2 - 3x^{-2} dx = 2x + \frac{3}{x} + c$
$f(1) = 5 \quad c = 0$
$f(x) = 2x + \frac{3}{x}$

$g(2) = 4 + \frac{3}{2} = \frac{11}{2}$
$g(x) = \int 2 - 3x^{-2} dx = 2x + \frac{3}{x} + c$
$c = 9$
$g(x) = 2x + \frac{3}{x} + 9$
$g(-3) = 2$

16. 정답 : ②
 해설 : a_n : 공차가 d인 등차수열

$A_n = \frac{1}{2}(a_{n+1} - a_n)(2^{a_{n+1}} - 2^{a_n})$

$\frac{A_3}{A_1} = \frac{\frac{1}{2}(a_4 - a_3)(2^{a_4} - 2^{a_3})}{\frac{1}{2}(a_2 - a_1)(2^{a_2} - 2^{a_1})} = 16$

$\frac{(2^{a_2+2d} - 2^{a_1+2d})}{(2^{a_2} - 2^{a_1})} = \frac{2^{2d}(2^{a_2} - 2^{a_1})}{(2^{a_2} - 2^{a_1})} = 2^{2d} = 16$

2d=4 d=2 => p=2

$a_n = a_1 + (n-1)d$
$\quad = 1 + (n-1)2 = 2n-1 \;=>$ (나)

$A_n = \frac{1}{2}(a_{n+1} - a_n)(2^{a_{n+1}} - 2^{a_n})$

$g(n) = (2^{a_{n+1}} - 2^{a_n})$

$g(4) = 2^{a_5} - 2^{a_4} = 2^9 - 2^7 = 384$

답 : $2 + \frac{384}{3} = 130$

17. 정답 : ③

해설 : $d = \frac{|3x+4y|}{5}$

2 이하 $\frac{1}{3} \to +9$

3이상 $\frac{2}{3} \to +4$

$(3 + \frac{8}{3}) \times \frac{15}{5} = 17$

18. 정답 : ③

해설 : $x > 1$에서 $f(x) = \frac{(a-2)}{3}x$

$-1 < x < 1$에서 $f(x) = 2x$

$x = 1$에서 $f(x) = \frac{a}{4}$

1. $a > 4$

$f(f(x)) = \frac{a-2}{3} \times \frac{a}{4} = \frac{5}{4}$

$a^2 - 2a - 15 = 0$

$a = -3, 5 \qquad a > 4$이므로 $a = 5$

2. $a < 4$

$f(f(1) = \frac{a}{2} = \frac{5}{4} \qquad a = \frac{5}{2}$

a의 합 $5 + \frac{5}{2} = \frac{15}{2}$

19. 정답 : ⑤

해설 :

1. 꺼낸수 3 (확률 2/5)

(1,3,6) (2,2,6), (3,3,4), (1,4,5), (2,3,5), (2,4,4)

$\frac{2}{5} \times \frac{6+6+3+6+3+3}{6^3} = \frac{54}{1080} = \frac{1}{20}$

2. 꺼낸수 4(확률 3/5)

(1,1,2,6), (2,2,,2,4), (1,1,3,5), (2,2,3,3,), (1,1,4,4), (1,2,2,5), (1,2,3,4,), (1,3,3,3)

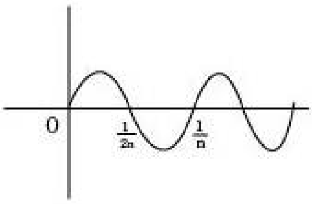
$\frac{3}{5} \times \frac{12+12+6+12+24+4+4+6}{6^4} = \frac{1}{27}$

따라서 $\frac{1}{20} + \frac{1}{27} = \frac{47}{540}$

20. 정답 : ⑤

해설 : $h(x)$가 연속이면서 $\int_{-1}^{1} h(x)dx = 2$

$y = f(nx) = \pi \sin 2n\pi x$

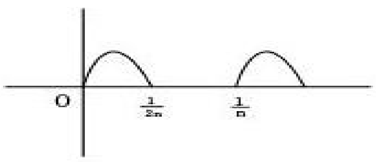


그래프 h(x)는

$\int_{0}^{\frac{1}{2n}} \pi \sin 2n\pi x dx = \left[-\frac{1}{2n} cos 2n\pi x \right]_{0}^{\frac{1}{2n}}$

$= \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}$

$\int_{-1}^{1} h(x)dx = 2n \times \int_{0}^{\frac{1}{2n}} f(nx)dx = 2$이다



따라서 $\int_{-1}^{1} h(x)dx = 2n \times \int_{0}^{1} xh(x)dx$

$= 2n[-\frac{1}{2n} x cos 2n\pi x]_{0}^{\frac{1}{2n}} + 2n[\frac{1}{4n} sin 2n\pi x]_{0}^{\frac{1}{2n}}$

$= 2n(-\frac{1}{4n^2} + 0) = -\frac{1}{2n} = -\frac{1}{32}$

n=16

21. 정답 : ②

해설 : $a_8 = a_2 a_4 + 1$

$a_4 = a_2^2 + 1$

$a_8 = a_2(a_2^2+1)+1 = a_2^3 + a_2 + 1$

$a_{15} = a_2 \times a_7 - 2$

$a_7 = a_2 \times a_3 - 2$

$a_3 = a_2 \times a_1 - 2$

$a_{15} = a_2(a_2 \times a_3 - 2) - 2 = a_2^2 a_3 - 2a_2 - 2$

$= a_2^2(a_2 \times a_1 - 2) - 2a_2 - 2$

$= a_1 a_2^3 - 2a_2^2 - 2a_2 - 2$

$a_8 - a_{15} = a_2^3(1-a_1) + 2a_2^2 + 3a_2 + 3 = 63$

$= 3a_2^2 + 3a_2 + 3 = 63$

$= a_2^2 + a_2 - 20 = 0$

$a_2 = 4, -5$

$a_2 = 4 \; a_1 = \frac{3}{4} \qquad a_4 = 17$

$a_8 = a_2 a_4 + 1 = 69$

$\frac{a_8}{a_1} = 69 \times \frac{4}{3} = 92$

22. 정답 : 15

해설 : ${}_5C_1 x^4 (\frac{3}{x^2})^1 = 15x^2$

23. 정답 : 8

해설 : $f'(x) = \frac{(2x-2)(x-1)-(x^2-2x-6)}{(x-1)^2}$

$\therefore f'(0) = 8$

24. 정답 : 60

해설 : $\angle DAF = \theta$, $\angle FAE = 2\theta$이다.

따라서 $f(\theta) = \frac{1}{2}tan\theta - \frac{1}{2}\theta$, $g(\theta) = \frac{1}{2} \times 1^2 \times 2\theta = \theta$

$$40 \times \lim_{\theta \to 0+} \frac{2\tan\theta - \frac{1}{2}\theta}{\theta} = 60$$

25. 정답 : 160

해설 : $a_1 = 3$, $a_2 = 3+d$, $a_3 = 3+2d$, $a_4 = 3+3d$, $a_5 = 3+4d$

따라서 모두 더하면 $15 + 10d = 55 \;\; \therefore d = 4$

$$\sum_{k=1}^{5} k(4k-1) = \sum_{k=1}^{5}(4k^2 - k) = 4 \times \frac{5 \times 6 \times 11}{6} - \frac{5 \times 6}{2} = 160$$

26. 정답 : 36

해설 : A와 B는 이웃하므로 한 묶음으로 보고 D,E,F 사이에 A와B를 넣으면 되므로

$(4-1)!\times 2\times 3=36$

27. 정답 : 13

해설 : $\log_4 2n^2-\frac{1}{2}log_2 n^2$

$=\log_4 2+\log_4 n^2-\frac{1}{4}log_2 n$

$=\frac{1}{2}+\log_2 n-\frac{1}{4}log_2 n$

$=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}log_2 n$

따라서 $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}log_2 n\le 40$

$=>\log_2 n\le\frac{158}{3}=52.\cdots$

따라서 $n=2^1,2^2,2^3\ldots,2^{52}$ 중에서 준 식이 자연수가 되기 위하여

$\log_2 n$ 이 4의 배수여야하므로 가능한 $n=2^4,2^8,\ldots,2^{52}$ 으로 총 13개

28. 정답 : 72

해설 :

(가)

$(x-1)|h(x)|$가 실수 전체 집합에서 미분 가능하기 위해서는

$f(x)$가 중근을 가지는 삼차 함수 꼴이기 때문에 중근을 가지지 않는 근인 $h(x)$는 $x=1$에서 0을 근으로 가져야한다.

$g^{-1}(x)=k(x)\quad h(x)=f(k(x))$

$h(1)=f(k(1))=0$이기 때문에 $k(1)=0$이고 $f(0)=0$이 된다. $f(x)=(x-a)(x-b)^2$임으로 $a=0$

$f(x)=x(x-b)^2$

(나)조건에서 $h'(3)=2\quad h'(x)=f'(k(x))k'(x)$에서 $h'(3)=f'(k(3))k'(3)$이고, $k(3)=1, k'(3)=1/4$

$h'(3)=f'(1)\frac{1}{4}=2$ $f'(1)=8$이 나온다.

$f'(x)=(x-b)^2+2x(x-b)$이고 $f'(1)=(1-b)^2+2(1-b)=8$을 계산하면 $b=-1$또는 5가 나온다

문제 조건에 a<b 때문에 b=5이고

f(8)=8×3^2=72가 나온다

29. 정답 : 201

해설 : 검은색 공을 a라 하고 흰공을 b라 하자

그럼 a,a,a,a,a,a b,b,b,b,b,b 나누어 주는 경우라 생각하면 된다.

A에게 검은색 4개이상을 줘야하고 A를 포함해서 a의 개수가 b의 개수보다 많은 사람은 2명뿐이라는 점에 유의해야한다.

따라서 검은공 a의 개수에 따른 case분류가 필요해보인다.

case1) A는 4개 그 외 한사람이 2개 받는경우

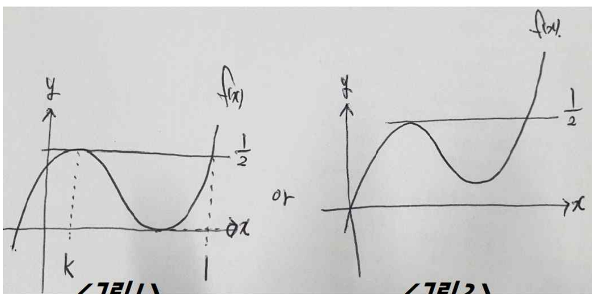
A를 제외한 한사람을 선택하는 경우의수는 3가지이고
그 사람이 a를 2개 b를 1개 받는경우와 a를 2개 b를 0개 받는경우가 있으므로
그리고 C,D에게 b 1개씩은 받아야 하므로 중복조합을 활용하여
${}_3H_3 + ({}_3H_4 - 1)$ 가 된다. 여기서 주의할점은 A가 a,a,a,a,b,b,b,b 받는경우는 빼줘야한다.
따라서 $3 \times ({}_3H_3 + ({}_3H_4 - 1)) = 72$가지

case2) A는 4개 그 외 두 사람에게 각 1개씩 받는 경우
case1)과 같은방법은
$3 \times 2 \times ({}_3H_4 - 1) = 84$가지

case3) A는 5개 그 외 한사람이 1개 받는 경우
$3 \times {}_3H_4 = 45$

case1,2,3 에의해 $72 + 84 + 45 = 201$

30. 정답 : 29
해설 : 합성함수의 그래프에 대한 이해력을 요구하는 문제이다.
$0 < x < 1$에서 $\sin^2(\pi x)$ 함숫값을 생각해보면 0→1→0 변화한다
따라서 극대값이 모두 같아야 하므로
아래의 <그림2> 와 같이 되어야 한다.
따라서 $f(x) = (x-k)^2(x-1) + \frac{1}{2}$이고
$f(0) = 0$이므로 $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$이다.
$f(2) = 5 - 2\sqrt{2}$이다.
따라서 $a^2 + b^2 = 29$



<그림1> <그림2>