1. MECÁNICA GENERAL

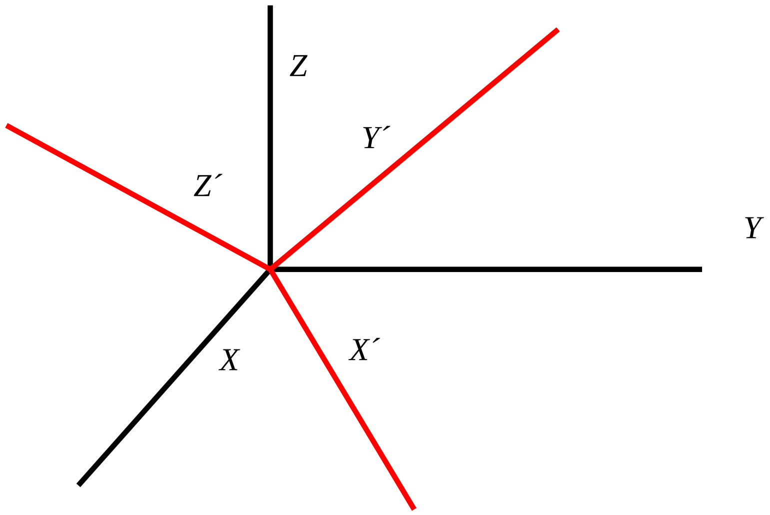
1.4. FUNDAMENTOS DE ANÁLISIS TENSORIAL

1.4.1. Introducción

La mayoría de las magnitudes físicas y relaciones matemáticas entre las mismas quedan perfectamente definidas trabajando con escalares y vectores. Estas magnitudes físicas existen independientemente de cualquier sistema de referencia (temperatura, fuerzas...). No obstante, para representarlas escogemos un sistema de referencia y las especificamos por sus componentes. Las componentes que especifican dichas magnitudes dependen del sistema de referencia escogido y por tanto, es esencial conocer la ***"ley de transformación"*** que nos permita encontrar la relación entre las componentes de dicha propiedad física en distintos sistemas de referencia.

1.4.2. Transformación de coordenadas

Cuando una propiedad física está representada por un escalar, el valor de ésta no depende del sistema de ejes coordenados utilizado. Cuando una propiedad física es de carácter vectorial, su módulo no depende de la orientación escogida para los ejes coordenados, pero sí sus componentes según estos ejes. Vamos a encontrar la relación entre las componentes de la propiedad física expresada en un sistema de referencia ortogonal *OXYZ* y un sistema de referencia ortogonal *OX´Y´Z´* rotado respecto al primero:



Sean $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ y $\vec{u}_3$ los vectores unitarios que definen las direcciones del sistema de referencia *OXYZ* y $\vec{u}_1'$, $\vec{u}_2'$ y $\vec{u}_3'$ los que definen las direcciones del sistema de referencia *OX´Y´Z´*. Sean (v_1, v_2, v_3) las componentes del vector $\vec{v}$ en el sistema de referencia *OXYZ* y (v_1', v_2', v_3') sus componentes en el sistema *OX´Y´Z´*. Por tanto, podemos escribir:

$$\vec{v} = v_1\vec{u}_1 + v_2\vec{u}_2 + v_3\vec{u}_3 = v_1'\vec{u}_1' + v_2'\vec{u}_2' + v_3'\vec{u}_3'$$

Primero encontraremos la relación entre los vectores unitarios que definen uno y otro sistema de referencia. Los vectores unitarios $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ y $\vec{u}_3$ se pueden escribir como combinación lineal de los vectores unitarios $\vec{u}_1^{\,\prime}$, $\vec{u}_2^{\,\prime}$ y $\vec{u}_3^{\,\prime}$ del sistema *OX´Y´Z*:

$$\begin{aligned}
\vec{u}_1 &= a_{11}\vec{u}_1^{\,\prime} + a_{21}\vec{u}_2^{\,\prime} + a_{31}\vec{u}_3^{\,\prime} \\
\vec{u}_2 &= a_{12}\vec{u}_1^{\,\prime} + a_{22}\vec{u}_2^{\,\prime} + a_{32}\vec{u}_3^{\,\prime} \\
\vec{u}_3 &= a_{13}\vec{u}_1^{\,\prime} + a_{23}\vec{u}_2^{\,\prime} + a_{33}\vec{u}_3^{\,\prime}
\end{aligned}$$

donde el segundo índice de los coeficientes *a* indica de que vector unitario del sistema *OXYZ* se trata y el primero indica la componente cartesiana. Para deducir el valor de los coeficientes *a* basta multiplicar escalarmente las expresiones anteriores por cada uno de los vectores unitarios del sistema *OX´Y´Z*:

$$\begin{aligned}
&\vec{u}_1^{\,\prime} \bullet \vec{u}_1 = a_{11}(\vec{u}_1^{\,\prime} \bullet \vec{u}_1^{\,\prime}) + a_{21}(\vec{u}_1^{\,\prime} \bullet \vec{u}_2^{\,\prime}) + a_{31}(\vec{u}_1^{\,\prime} \bullet \vec{u}_3^{\,\prime}) = a_{11} \\
&\vec{u}_1^{\,\prime} \bullet \vec{u}_2 = a_{12}(\vec{u}_1^{\,\prime} \bullet \vec{u}_1^{\,\prime}) + a_{22}(\vec{u}_1^{\,\prime} \bullet \vec{u}_2^{\,\prime}) + a_{32}(\vec{u}_1^{\,\prime} \bullet \vec{u}_3^{\,\prime}) = a_{12} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Y en general podemos escribir para siguiente expresión para deducir los valores de los coeficientes a:

$$a_{ij} = \vec{u}_i^{\,\prime} \bullet \vec{u}_j = \cos(\vec{u}_i^{\,\prime}, \vec{u}_j)$$

donde el producto $\vec{u}_i^{\,\prime} \bullet \vec{u}_j$ representa la proyección del vector unitario $\vec{u}_i^{\,\prime}$ sobre la dirección dada por el vector unitario $\vec{u}_j$. Como todos ellos son vectores unitarios, cada una de estos coeficientes *a* no es más que el coseno del ángulo que forman los dos vectores unitarios. A los cosenos de los ángulos que forma un vector con los ejes cartesianos del sistema de referencia en el que se escriben sus componentes se les denominan ***cosenos directores***. En el caso particular de un vector unitario, sus componentes corresponden a sus cosenos directores.

Si tomamos la expresión del vector $\vec{v}$ escrita al inicio de la demostración y multiplicamos ambos miembros de la igualdad por $\vec{u}_1^{\,\prime}$ obtenemos:

$$\begin{aligned}
&\vec{u}_1^{\,\prime} \bullet \vec{v} = v_1(\vec{u}_1^{\,\prime} \bullet \vec{u}_1) + v_2(\vec{u}_1^{\,\prime} \bullet \vec{u}_2) + v_3(\vec{u}_1^{\,\prime} \bullet \vec{u}_3) = v_1^{\prime}(\vec{u}_1^{\,\prime} \bullet \vec{u}_1^{\,\prime}) + v_2^{\prime}(\vec{u}_1^{\,\prime} \bullet \vec{u}_2^{\,\prime}) + v_3^{\prime}(\vec{u}_1^{\,\prime} \bullet \vec{u}_3^{\,\prime}) \\
&v_1(\vec{u}_1^{\,\prime} \bullet \vec{u}_1) + v_2(\vec{u}_1^{\,\prime} \bullet \vec{u}_2) + v_3(\vec{u}_1^{\,\prime} \bullet \vec{u}_3) = v_1^{\prime} = a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + a_{13}v_3
\end{aligned}$$

De igual manera multiplicando por $\vec{u}_2^{\,\prime}$ y $\vec{u}_3^{\,\prime}$ obtenemos:

$$\begin{aligned}
v_2^{\prime} &= a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + a_{23}v_3 \\
v_3^{\prime} &= a_{31}v_1 + a_{32}v_2 + a_{33}v_3
\end{aligned}$$

Expresiones que escritas de forma matricial dan lugar a:

$$\begin{bmatrix} v_1' \\ v_2' \\ v_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{v}' = R \cdot \vec{v}$$

donde R es la matriz de rotación cuyas componentes son los cosenos directores .

1.4.3. Definición de tensor y leyes de transformación

La siguiente pregunta que debemos hacernos es si con escalares y vectores es suficiente para describir todas las magnitudes físicas y las relaciones que existen entre ellas. La respuesta es negativa, ya que existen magnitudes físicas para las que el carácter escalar o vectorial es demasiado restringido, ya que vienen definidas por un mayor número de componentes. Veamos unos ejemplos que intuitivamente nos permitan observar la necesidad de operar con magnitudes más complejas:

- En un medio isótropo y elástico existe una relación lineal entre esfuerzo y deformación, $\vec{F} = K\vec{X}$ siendo K un escalar. ¿Qué sucede si el medio es anisótropo? $\vec{F}$ y $\vec{X}$ serán de diferente dirección y por ello habrá que reemplazar el escalar K por un operador matemático más general capaz de modificar el módulo y sentido de $\vec{X}$.

- El mismo problema se plantea cuando se estudia la rotación de un cuerpo respecto a un eje. Si el cuerpo es un anillo delgado que gira con velocidad $\vec{\omega}$ respecto a un eje normal, se tiene que el momento angular $\vec{L} = I\vec{\omega}$, siendo I un escalar. Si la forma del cuerpo es arbitraria, I no puede ser escalar, pues $\vec{L}$ y $\vec{\omega}$ no tienen la misma dirección.

Por tanto de manera general, podemos llamar ***tensor*** a una entidad matemática que nos permite describir las magnitudes físicas y las relaciones que existen entre ellas. Un tensor existe independientemente de cualquier sistema de referencia, no obstante, para trabajar más fácilmente con ellos pueden ser especificados por sus ***"componentes"*** respecto a un sistema de referencia. El número de componentes o números que se requieren para representar un tensor en un sistema de referencia son n^m, siendo n la dimensión del espacio en el que se trabaja y m el orden del tensor. En este sentido, dependiendo de la complejidad de la magnitud física necesitaremos más o menos componentes lo que fijará el orden del tensor que la represente. Además de sus componentes, una propiedad fundamental que sirve para describir un tensor es la ***ley de transformación*** de sus componentes, como ya hemos visto para el caso de vectores. Cuando se trata de transformaciones entre sistema de coordenadas generales o arbitrarios, los tensores definidos se conoce como ***tensores generales.*** Cuando las transformaciones se realizan entre sistemas de ejes cartesianos rotados entre sí, los tensores que intervienen son los ***tensores cartesianos.*** Gran parte de la Mecánica se puede desarrollar en términos de tensores cartesianos, por lo que si no se especifica lo contrario utilizar el término tensor equivale a considerar un tensor cartesiano.

Como hemos adelantado, los tensores se pueden clasificar por su orden. En un espacio tridimensional que es donde vamos a trabajar, un tensor de orden m tendrá 3^m componentes. Los tensores con los que vamos a trabajar normalmente van a ser los siguientes:

- **Tensor de orden cero: 3^0=1**, queda especificado en cualquier sistema de referencia por una componente. Por tanto, un escalar es un ejemplo de tensor de rango más simple. El valor de la componente que lo representa no depende del sistema de coordenadas utilizado.

- **Tensor de orden uno: 3^1=3**, queda especificado por tres componentes en el espacio físico tridimensional y se conoce comúnmente como vectores. Su módulo no depende del a orientación escogida para los ejes coordenados por sí sus componentes según estos ejes. La ley de transformación para los tensores de orden uno es la vista anteriormente para vectores:

$$\vec{v} = R\vec{v}^{\,\prime}$$

siendo *R* la matriz de cosenos directores.

- **Tensor de orden dos: 3^2=9**, queda especificado por nueve componentes, es decir, una matriz 3×3. La ley de transformación de un tensor de segundo orden es la misma que la de una matriz 3×3 frente a una rotación:

$$T' = R\cdot T\cdot R^{-1} = R\cdot T\cdot R^{t}$$

siendo *R* la matriz de los cosenos directores deducida para la transformación de vectores o tensores de orden uno.

Ahora y de manera general podemos hablar de ***campos tensoriales*** en los que a cada punto del espacio se le asocia un tensor. Un ***campo escalar*** es un campo tensorial de orden cero, un ***campo vectorial*** es un campo tensorial de primer orden y un campo tensorial de orden dos asocia una matriz a cada punto del espacio.

1.4.4. Tipos de tensores (de segundo orden)

Algunos tipos de tensores de segundo orden son los siguientes:

- Tensor simétrico: un tensor simétrico es aquel para el cual $T_{ij} = T_{ji}$. Dichos tensores tienen seis componentes independientes.

- Tensor antisimético: un tensor antisimétrico es aquel para el cual $T_{ij} = -T_{ji}$, por lo que $T_{ii} = 0$. Dichos tensores quedan determinados por tres coordenadas independientes.

- Tensor diagonal: es un tensor cuyas únicas componentes no nulas son las de la diagonal principal. Si todas las componentes del tensor diagonal son iguales, el tensor se denomina esférico.

- Tensor unidad: es un tensor diagonal esférico cuyas componentes son iguales a la unidad.

1.4.5. Direcciones principales de un tensor de segundo orden

Se denominan ejes principales de un tensor al sistema de ejes coordenados en el cual el tensor tiene forma diagonal. Se denominan vectores principales o autovectores a los vectores que definen las direcciones principales. Para un autovector se cumple:

$$T \cdot \vec{v}_P = \lambda \cdot \vec{v}_P$$

es decir, cuando un vector $\vec{v}_P$ está dirigido según una de las direcciones principales, el vector resultante de aplicar T sobre el vector $\vec{v}_P$ es proporcional al mismo, con independencia del sistema de referencia respecto al que se representan T y $\vec{v}_P$ (pero con ambos expresados respecto del mismo sistema). A λ se le denomina autovalor, valor propio o valor principal.

Las operaciones con tensores cartesianos de segundo orden son iguales a las realizadas con las matrices asociadas. El cálculo de los valores propios y direcciones principales de un tensor se identifica con los de la correspondiente matriz. Por tanto, si la ecuación anterior la escribimos de la siguiente manera:

$$(T - \lambda I) \cdot \vec{v}_P = 0$$

donde I representa la matriz identidad. Al ser $\vec{v}_P$ un vector no nulo, debe cumplirse que el determinante de $(T - \lambda I)$ sea cero:

$$\begin{vmatrix} T_{11}-\lambda & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22}-\lambda & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

El problema se reduce al conocido problema de diagonalización de una matriz:

1) Los valores propios o autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ son las raíces de la ecuación resultante del desarrollo del siguiente determinante:

$$\begin{bmatrix} T_{11}-\lambda & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22}-\lambda & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33}-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

La matriz diagonal que representa el tensor T:

$$T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

2) Las componentes $\vec{v}_i = (a_i, b_i, c_i)$ de los tres vectores $(i = 1,2,3)$ que forman los ejes del nuevo sistema coordenado ortogonal, llamados ***ejes principales***, se calculan sustituyendo los valores de los tres autovalores en el siguiente sistema:

$$T \cdot \vec{v}_P = \lambda \cdot \vec{v}_P$$

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{bmatrix} = \lambda_i \begin{bmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{bmatrix}$$

Algunos tensores de segundo orden que nos van a aparecer en Mecánica son, el tensor de tensiones, el tensor de deformaciones.... y simplificará enormemente el problema poder reducirlos a una matriz diagonal.

El desarrollo del determinante constituye un polinomio de orden tres, denominado ***polinomio característico*** que igualado a cero nos permite calcular los tres valores propios del tensor λ_1, λ_2 y λ_3. El desarrollo del polinomio característico puede escribirse de la siguiente manera:

$$\det(T - \lambda I) = -\lambda^3 + (T_{11} + T_{22} + T_{33})\lambda^2 - (T_{22}T_{33} + T_{11}T_{33} + T_{11}T_{22} - T_{23}T_{32} - T_{13}T_{31} - T_{12}T_{21})\lambda + \det(T)$$

Los tres coeficientes del polinomio son los denominados invariantes del tensor, esto es su valores es independiente del sistema de referencia escogido para representar las componentes del tensor:

$I_1 = T_{11} + T_{22} + T_{33}$ ***Traza del tensor o Invariante Lineal***

$I_2 = T_{22}T_{33} + T_{11}T_{33} + T_{11}T_{22} - T_{23}T_{32} - T_{13}T_{31} - T_{12}T_{21}$ ***Invariante Cuadrático***

$I_3 = \det(T)$ ***Invariante Cúbico***

1.4.6. Propiedades de los tensores simétricos de segundo orden

La mayor parte de los tensores de segundo orden que describen propiedades físicas son simétricos. Los tensores simétricos de segundo orden tienen una serie de propiedades muy importantes. Estas son:

- Existe siempre un sistema de ejes en el cual el tensor toma la forma diagonal y los tres autovalores son reales.

- Como los invariantes no dependen del sistema de coordenadas, en el caso de que existan tres autovalores reales podemos expresar los invariantes también en el sistema de ejes principales de la siguiente manera:

$$I_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$$
$$I_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1$$
$$I_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$$