Download di Folder OSN
https://folderosn.blogspot.co.id/

Hak Cipta
Dilindungi Undang-undang

SOAL UJIAN
SELEKSI CALON PESERTA OLIMPIADE SAINS NASIONAL 2018
TINGKAT KABUPATEN / KOTA

FISIKA

Waktu: 3 jam

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN

DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
DIREKTORAT PEMBINAAN SEKOLAH MENENGAH ATAS
TAHUN 2018

Download di Folder OSN
https://folderosn.blogspot.co.id/

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
DIREKTORAT PEMBINAAN SEKOLAH MENENGAH ATAS

Tes Seleksi OSN 2018 Bidang FISIKA
TINGKAT KABUPATEN/KOTA
Waktu: 3 Jam

Petunjuk:

Untuk polinom: $13\,x^5 - 45\,x^2 + 32 = 0$,

Salah satu solusinya adalah: $x = 1{,}215$

1. (10 poin) Pada tahun 1899 Max Planck memperkenalkan suatu sistem satuan universal sehingga besaran-besaran fisika dapat dinyatakan dalam tiga satuan Planck yaitu massa Planck M_p, panjang Planck L_p, dan waktu Planck T_p. Ketiga satuan Planck tersebut dapat dinyatakan dalam tiga konstanta alamiah dalam mekanika kuantum serta dalam teori relativitas khusus dan relativitas umum yaitu konstanta Planck tereduksi $\hbar = h/2\pi = 1{,}05 \times 10^{-34}$ Js, kelajuan cahaya dalam ruang hampa $c = 3{,}0 \times 10^{8}$ m/s, dan konstanta gravitasi umum $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ Nm^2 kg^{-2}. Ketiga satuan Planck ini $M_\mathrm{p}, L_\mathrm{p}$, dan T_p dapat dituliskan dalam bentuk: (i) $M_\mathrm{p} = M_\mathrm{p}(\hbar, c, G)$; (ii) $L_\mathrm{p} = L_\mathrm{p}(\hbar, c, G)$; dan (iii) $T_\mathrm{p} = T_\mathrm{p}(\hbar, c, G)$.
   (a) Tentukan bentuk akhir dari tiga persamaan (i), (ii), dan (iii) di atas yang menampilkan secara eksplisit ketergantungan M_p, L_p, dan T_p kepada $\hbar$, c, dan G.
   (b) Hitung nilai numerik dari ketiga satuan Planck M_p, L_p, dan T_p dalam sistem satuan SI.

   Selanjutnya dengan menggunakan ketiga satuan Planck di atas dapat pula dibentuk 4(empat) satuan Planck lainnya yaitu energi Planck $E_\mathrm{p} = M_\mathrm{p}c^2$, kecepatan Planck $v_\mathrm{p} = L_\mathrm{p}/T_\mathrm{p}$, percepatan Planck $a_\mathrm{p} = L_\mathrm{p}/T_\mathrm{p}^2$, dan rapat massa Planck $\rho_\mathrm{p} = M_\mathrm{p}/L_\mathrm{p}^3$.

   (c) Hitung nilai numerik dari E_p, v_p, a_p dan ρ_p dalam sistem satuan SI.

Jawab:

Dari persamaan Planck $E = \hbar\omega$ dapat diperoleh satuan dari $\hbar$ yaitu energy x waktu (Js), sehingga dimensi fisis dari $\hbar$ adalah $[\hbar] = ML^2T^{-1}$. Sementara itu dimensi c dan G berturut-turut adalah $[c] = LT^{-1}$ dan $[G] = M^{-1}L^3T^{-2}$.

(a) (i) (**2 poin**) Dari M_p dapat dinyatakan dalam bentuk umum $M_\mathrm{p} = \hbar^x c^y G^z$:

Download di Folder OSN
https://folderosn.blogspot.co.id

$$\Leftrightarrow \; ML^0T^0 = (ML^2T^{-1})^x (LT^{-1})^y (M^{-1}L^3T^{-2})^z$$

diperoleh persamaan-persamaan

$$x - z = 1, \qquad 2x + y + 3z = 0, \qquad -x - y - 2z = 0$$

yang menghasilkan nilai-nilai $x = y = -z = 1/2$ sehingga akhirnya diperoleh

$$M_\mathrm{p} = \sqrt{\hbar c / G}$$

(ii) (**2 poin**) Dengan cara serupa di atas, selanjutnya dari bentuk $L_\mathrm{p} = \hbar^m c^n G^k$ diperoleh hasil: $m = k$, $2m + n + 3k = 1$, dan $m + n + 2k = 0$ sehingga $m = n = -k/3 = 1/2$.

Akhirnya diperoleh

$$L_\mathrm{p} = \sqrt{\hbar G / c^3}$$

(iii) (**2 poin**) Dari bentuk $T_\mathrm{p} = \hbar^\alpha c^\beta G^\gamma$ diperoleh $\alpha = \gamma$, $2\alpha + \beta + 3\gamma = 0$, dan $\alpha + \beta + 2\gamma = -1$ sehingga diperoleh nilai-nilai $\alpha = \gamma = \beta/5 = 1/2$. Dengan demikian dihasilkan bentuk akhir

$$T_\mathrm{p} = \sqrt{\hbar G / c^5}$$

(b) (**2 poin**) Nilai numerik ketiga satuan Planck M_p, L_p, dan T_p dalam sistem SI:

$$M_\mathrm{p} = \sqrt{\hbar c / G} = 2{,}18 \times 10^{-8}\ \mathrm{kg}\ , \quad L_\mathrm{p} = \sqrt{\hbar G / c^3} = 1{,}62 \times 10^{-35}\ \mathrm{m}\,, \quad T_\mathrm{p} = \sqrt{\hbar G / c^5} = 5{,}39 \times 10^{-44}\ \mathrm{s}$$

(c) (**2 poin**) Menghitung nilai numerik dari E_p, v_p, a_p dan ρ_p dalam sistem SI:

$$E_\mathrm{p} = M_\mathrm{p} c^2 = 1{,}96 \times 10^9\ \mathrm{J}\ , \quad v_\mathrm{p} = L_\mathrm{p} / T_\mathrm{p} = c\,, \quad a_\mathrm{p} = L_\mathrm{p} / T_\mathrm{p}^2 = 5{,}58 \times 10^{51}\ \mathrm{m/s^2}\ ,$$

$$\rho_\mathrm{p} = M_\mathrm{p} / L_\mathrm{p}^3 = 5{,}16 \times 10^{96}\ \mathrm{kg/m^3}$$

Download di Folder OSN
https://folderosn.blogspot.co.id/

2. (10 poin) Sebuah peluru ditembakkan ke atas dengan kecepatan awal dan sudut elevasi tertentu dari permukaan tanah. Ketika peluru tersebut berada pada ketinggian H_1 untuk pertama dan kedua kalinya, selang waktu antara keduanya adalah T_1. Sedangkan ketika peluru tersebut berada pada ketinggian H_2 untuk pertama dan kedua kalinya, selang waktu antara keduanya adalah T_2. Asumsikan $H_2 > H_1$ dan $T_1 > T_2$. Tentukan:
   a. Selang waktu ketika peluru tersebut berada pada ketinggian H_3 untuk pertama dan kedua kalinya, dinyatakan dalam H_1, H_2, H_3, T_1 dan T_2.
   b. Syarat untuk H_3 (dinyatakan dalam H_1, H_2, T_1 dan T_2) agar selang waktu pada soal (a) ada nilainya.

Jawab:

a. (**7 poin**) Persamaan gerak peluru adalah

$$y = v_0 \sin\alpha - \tfrac{1}{2} g t^2$$

dengan v_0 = kecepatan awal peluru dan α = sudut elevasi. Pada ketinggian H_1, persamaan gerak peluru adalah

$$\tfrac{1}{2} g t^2 - v_0 \sin\alpha + H_1 = 0$$

dengan solusi untuk waktu t_1 dan t_2 adalah

$$t_{1,2} = \frac{v_0 \sin\alpha \pm \sqrt{v_0^{\,2} \sin^2\alpha - 2gH_1}}{g}.$$

Selisih waktu antara t_1 dan t_2 adalah T_1, sehingga

$$T_1 = |t_1 - t_2| = \frac{2\sqrt{v_0^{\,2} \sin^2\alpha - 2gH_1}}{g}$$

yang jika dikuadratkan dapat dinyatakan dalam bentuk

$$v_0^{\,2} \sin^2\alpha = \tfrac{1}{4} g^2 T_1^{\,2} + 2gH_1$$

Untuk kasus ketinggian H_2 dengan selang waktu T_2, persamaannya sama seperti di atas.

$$v_0^{\,2} \sin^2\alpha = \tfrac{1}{4} g^2 T_2^{\,2} + 2gH_2$$

Dengan demikian berlaku

$$\tfrac{1}{4} g^2 T_1^{\,2} + 2gH_1 = \tfrac{1}{4} g^2 T_2^{\,2} + 2gH_2$$

Sehingga diperoleh percepatan gravitasi g yang dapat dinyatakan sebagai

$$g = \frac{8(H_2 - H_1)}{T_1^2 - T_2^2}.$$

Download di Folder OSN
https://folderosn.blogspot.co.id/

Untuk kasus ketinggian H_3 dengan selang waktu T_3, maka selang waktu T_3 dapat dinyatakan sebagai:

$$T_3 = \frac{2\sqrt{v_0{}^2 \sin^2 \alpha - 2gH_3}}{g} = \frac{2\sqrt{\frac{1}{4}g^2 T_1^2 + 2gH_1 - 2gH_3}}{g}$$

$$= \sqrt{T_1^2 + \frac{8(H_1 - H_3)}{g}} = \sqrt{T_1^2 + \frac{(H_1 - H_3)T_1^2 - T_2{}^2}{(H_2 - H_1)}}$$

$$T_3 = \sqrt{\frac{T_1^2 H_2 - T_2{}^2 H_1 - H_3(T_1^2 - T_2{}^2)}{(H_2 - H_1)}}\,.$$

b. (**3 poin**) Syarat agar nilai T_3 ada adalah nilai yang berada di dalam akar harus tak negatif. Jika diasumsikan $H_2 > H_1$ maka

$$T_1^2 H_2 - T_2{}^2 H_1 - H_3(T_1^2 - T_2{}^2) \geq 0$$

$$H_3 \leq \frac{T_1^2 H_2 - T_2{}^2 H_1}{T_1^2 - T_2{}^2}\,.$$

Download di Folder OSN
https://folderosn.blogspot.co.id/

3. (14 poin) Sebuah bola berongga berdinding tebal dimana jari-jari dinding luar dan dinding dalamnya masing-masing adalah R_0 dan R_1. Densitas bola pada $R_1 < r < R_0$ dianggap homogen, ρ. Bola menggelinding ke bawah tanpa slip dari keadaan diam pada suatu bidang miring, dan kecepatannya saat mencapai dasar bidang miring adalah v_0. Bila bidang miringnya licin dan bola menuruni bidang miring dari keadaan dan posisi yang sama dengan yang pertama, maka kecepatannya saat mencapai dasar bidang miring menjadi $5v_0/4$. Tentukan:
   a. Jari-jari girasi bola berongga tersebut terhadap sumbu yang melalui pusat bola;
   b. Perbandingan nilai R_1/R_0; dan
   c. Perbandingan volume rongga bola terhadap volume total bola.

Jawab:

a. (**6 poin**) Dari kekekalan energy diperoleh:

$$EK_f = EP_i \quad \rightarrow \quad \tfrac{1}{2} mv^2 + \tfrac{1}{2} I\omega^2 = mgh$$

Ketika bola menggelinding tanpa slip, maka: $v = \omega R$

dan untuk bola $I = mR_G^2$, maka (R_G = jari-jari girasi) :

$$mgh = \tfrac{1}{2} mv_0^2 + \tfrac{1}{2} mR_G^2 (v_0/R_0)^2 = \tfrac{1}{2} mv_0^2 \{1 + (R_G/R_0)^2\} \qquad (1)$$

Ketika bola meluncur dengan slip, berlaku $\omega = 0$ sehingga:

$$mgh = \tfrac{1}{2} m (5v_0/4)^2 = \tfrac{1}{2} mv_0^2 (25/16) \qquad (2)$$

substitusi persamaan (2) ke (1) diperoleh:

$9/16 = (R_G/R_0)^2$. Jadi jari-jari girasi bola berongga: $R_G = 3R_0/4$.

b. (**5 poin**) Katakan bagian bola yang pejal itu memiliki densitas sebesar ρ. Maka massa bola berongga tersebut adalah:

$$m = (4\pi/3)(\rho R_0^3 - \rho R_1^3)$$

dan momen inersianya dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$I = \frac{2}{5}\left(\frac{4\pi}{3}\rho R_0^3\right)R_0^2 - \frac{2}{5}\left(\frac{4\pi}{3}\rho R_1^3\right)R_1^2$$

Sementara jari-jari girasi dipenuhi oleh persamaan:

$$R_G^2 = \frac{I}{m} = \frac{2}{5}\left(\frac{R_0^5 - R_1^5}{R_0^3 - R_1^3}\right) = \frac{2}{5}R_0^2\left[\frac{1-(R_1/R_0)^5}{1-(R_1/R_0)^3}\right]$$

Masukan nilai R_G dari soal a) diatas, sehingga diperoleh:

$$\frac{45}{32} = \frac{1-(R_1/R_0)^5}{1-(R_1/R_0)^3} \quad \rightarrow \quad \frac{13}{45} = \left(\frac{R_1}{R_0}\right)^3\left[1 - \frac{32}{45}\left(\frac{R_1}{R_0}\right)^2\right]$$

Dengan menggunakan prinsip trial and error, diperoleh solusi:

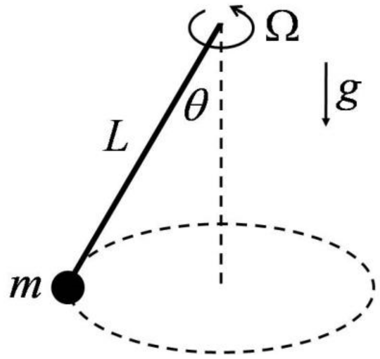
$R_1/R_0 = 0{,}823$.

c. (**3 poin**) Perbandingan volume rongga terhadap volume totalnya adalah:

$$\frac{V_1}{V_0} = \left(\frac{R_1}{R_0}\right)^3 = (0{,}823)^3 = 0{,}557.$$

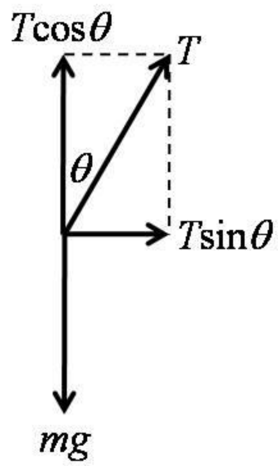
Download di Folder OSN
https://folderosn.blogspot.co.id

4. (13 poin) Sebuah partikel bermassa *m* diikat pada ujung tali tegar tak bermassa dengan panjang *L*. Ujung tali satunya dipasang tetap. Partikel tersebut diputar dengan kecepatan sudut konstan $\vec{\Omega} = \Omega\hat{z}$ sehingga bergerak dalam bidang horisontal *xy*. Sudut antara tali dengan sumbu vertikal *z* adalah θ. Percepatan gravitasi *g* ke arah sumbu *z* negatif.
   a. Jika sudut konstan $\theta = \theta_0$ adalah sudut antara tali dengan garis vertikal sehingga *m* berada pada bidang horisontal yang tetap, tentukan θ_0 dinyatakan dalam *L*, *g* dan Ω.
   b. Ketika partikel tersebut sedang berotasi terhadap sumbu vertikal, sudut θ_0 dapat divariasi dengan sudut infinitesimal δ ($\theta = \theta_0 + \delta$) sehingga partikel tersebut juga melakukan gerak osilasi terhadap δ. Tentukan kecepatan sudut osilasi ω dinyatakan dalam *L*, *g* dan Ω.



Jawab:

a. (**4 poin**) Diagram gaya disajikan pada Gambar disamping ini.



Kesetimbangan gaya vertikal

$$mg = T\cos\theta \quad (1)$$

Gaya horisontal sama dengan gaya sentripetal

$$m\Omega^2 r = m\Omega^2 L\sin\theta = T\sin\theta \quad (2)$$

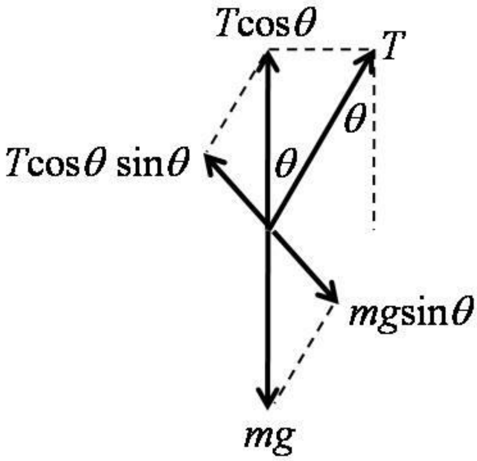
Gabungan (1) dan (2) menghasilkan

$$\cos\theta = \frac{g}{L\Omega^2}$$

$$\theta = \theta_0 = \arccos\left(\frac{g}{L\Omega^2}\right) \quad (3)$$

b. (**9 poin**) Untuk menentukan persamaan gaya ketika θ divariasi, $T\cos\theta$ dan *mg* diuraikan ke arah tegaklurus *T*, berturut-turut menjadi $T\cos\theta\sin\theta$ dan $mg\sin\theta$. Lihat gambar di bawah ini.

Download di Folder OSN
https://folderosn.blogspot.co.id



Persamaan gaya pada arah tegaklurus T adalah

$$T\cos\theta\sin\theta - mg\sin\theta = ma = mL\ddot{\theta} \tag{4}$$

Mengingat

$$\theta = \theta_0 + \delta \tag{5}$$

dengan $\delta << 1$ ($\sin\delta \approx \delta$ dan $\cos\delta \approx 1$), maka

$$\begin{aligned}\cos\theta\sin\theta &= \tfrac{1}{2}\sin 2\theta = \tfrac{1}{2}\sin(2\theta_0 + 2\delta) = \tfrac{1}{2}\left[\sin 2\theta_0 \cos 2\delta + \cos 2\theta_0 \sin 2\delta\right] \\ &\approx \cos\theta_0 \sin\theta_0 + \delta\cos 2\theta_0\end{aligned} \tag{6}$$

$$\sin\theta = \sin(\theta_0 + \delta) = \sin\theta_0 \cos\delta + \cos\theta_0 \sin\delta \approx \sin\theta_0 + \delta\cos\theta_0 \tag{7}$$

$$\ddot{\theta} = \ddot{\delta} \tag{8}$$

Dengan menggunakan persamaan (1), (5) – (8), persamaan (4) menjadi

$$T(\cos\theta_0 \sin\theta_0 + \delta\cos 2\theta_0) - mg(\sin\theta_0 + \delta\cos\theta_0) = mL\ddot{\delta}$$

$$mg\sin\theta_0 + \frac{mg(\cos^2\theta_0 - \sin^2\theta_0)\delta}{\cos\theta_0} - mg\sin\theta_0 - mg\delta\cos\theta_0 = mL\ddot{\delta}$$

$$-\frac{g\sin^2\theta_0}{L\cos\theta_0}\delta = \ddot{\delta} \tag{9}$$

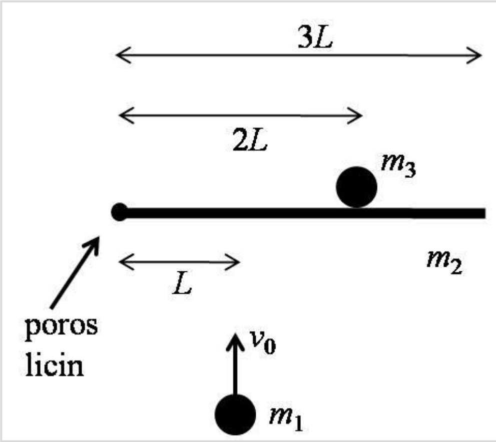
Dari persamaan (9) di atas maka kecepatan sudut osilasi adalah

$$\omega^2 = \frac{g\sin^2\theta_0}{L\cos\theta_0} = \frac{g(1-\cos^2\theta_0)}{L(g/L\Omega^2)} = \Omega^2\left(1 - \left(\frac{g}{L\Omega^2}\right)^2\right)$$

$$\omega = \Omega\sqrt{1 - \frac{g}{L\Omega^2}}$$

Download di Folder OSN
https://folderosn.blogspot.co.id

5. (17 poin) Tinjau sistem disamping ini yang terdiri dari tiga buah massa m_1, m_2 dan m_3 yang saling lepas. Seluruh gerakan sistem berada pada bidang horisontal. Batang m_2 dengan panjang $3L$ dipasang pada poros licin. Massa m_3 yang hampir menyentuh batang m_2 berada pada posisi berjarak $2L$ dari poros. Massa m_1 bergerak lurus dengan kecepatan v_0 dengan arah tegak lurus batang dan akan menumbuk batang pada jarak L dari poros. Semua tumbukan yang terjadi bersifat lenting sempurna. Untuk selanjutnya dalam perhitungan, gunakan $m_1 = m_2 = m_3 = m$. Setelah tumbukan terjadi, tentukan:



a. Kecepatan m_1 dan kecepatan m_3 serta kecepatan sudut batang m_2,

b. Perbedaan momentum sudut total dan perbedaan energi kinetik sistim.

Jawab:

a. (**12 poin**) Asumsikan bahwa peristiwa tumbukan dapat dibagi menjadi dua bagian. Tinjau tumbukan pertama, yaitu m_1 menumbuk batang m_2 secara lenting sempurna. Momentum sudut sistem terhadap poros sebelum tumbukan pertama adalah

$$L_{awal} = m_1 v_0 L = m v_0 L\,. \qquad (1)$$

Momen inersia batang m_2 terhadap poros adalah $I = \frac{1}{3} m_2 (3L)^2 = 3mL^2$. Misalkan kecepatan sudut batang m_2 setelah tumbukan pertama adalah ω_1, serta kecepatan translasi m_1 setelah tumbukan pertama adalah v_1. Momentum sudut sistem terhadap poros setelah tumbukan pertama adalah:

$$L_{akhir} = m_1 v_1 L + I\omega_1 = m v_1 L + 3mL^2 \omega_1\,. \qquad (2)$$

Kelestarian momentum sudut pada tumbukan pertama:

$$m v_0 L = m v_1 L + 3mL^2 \omega_1$$

$$\omega_1 = \frac{v_0 - v_1}{3L}\,. \qquad (3)$$

Energi kinetik sistem sebelum tumbukan pertama adalah

$$EK_{awal} = \tfrac{1}{2} m_1 v_0^2 = \tfrac{1}{2} m v_0^2 \qquad (4)$$

Energi kinetik sistem setelah tumbukan pertama adalah

$$EK_{akhir} = \tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2} I\omega_1^2 = \tfrac{1}{2} m v_1^2 + \tfrac{1}{2}(3mL^2)\left(\frac{v_0 - v_1}{3L}\right)^2 \qquad (5)$$

Kekekalan energi kinetik sistem:

$$\tfrac{1}{2} m v_0^2 = \tfrac{1}{2} m v_1^2 + \tfrac{1}{2}(3mL^2)\left(\frac{v_0 - v_1}{3L}\right)^2$$

$$v_0^2 = v_1^2 + \tfrac{1}{3}(v_0 - v_1)^2 \qquad (6)$$

Download di Folder OSN
https://folderosn.blogspot.co.id

Persamaan terakhir di atas dapat disusun menjadi:

$$2v_1^2 - v_0 v_1 - v_0^2 = 0$$

$$(v_1 - v_0)(2v_1 + v_0) = 0$$

Solusi yang trivial adalah $v_1 = v_0$ dan $\omega_1 = 0$. Solusi nontrivial yang dicari adalah

$$v_1 = -\tfrac{1}{2} v_0 \text{ dan } \omega_1 = \tfrac{1}{2} v_0 / L. \qquad (7)$$

Hasil di atas menyatakan bahwa sesaat setelah tumbukan pertama, m_1 berbalik arah dengan kecepatan $\frac{1}{2} v_0$ menjauhi batang m_2, sedangkan batang m_2 berotasi (dengan arah berlawanan jarum jam jika dilihat dari atas) dengan kecepatan sudut $\frac{1}{2} v_0 / L$.

b. Sekarang tinjau tumbukan kedua. Momentum sudut sistem (m_2 dan m_3 saja) sebelum tumbukan kedua adalah

$$L_{awal} = I\omega_1 = \tfrac{3}{2} m v_0 L \qquad (8)$$

Misalkan kecepatan sudut batang m_2 setelah tumbukan kedua adalah ω_2, serta kecepatan translasi m_3 setelah tumbukan kedua adalah v_2. Momentum sudut sistem (m_2 dan m_3 saja) setelah tumbukan kedua adalah

$$L_{akhir} = I\omega_2 + m_3 v_2 2L = 3mL^2\omega_2 + 2mv_2 L. \qquad (9)$$

Kekekalan momentum sudut pada tumbukan kedua:

$$\tfrac{3}{2} m v_0 L = 3mL^2\omega_2 + 2mv_2 L$$

$$\omega_2 = \frac{3v_0 - 4v_2}{6L} \qquad (10)$$

Energi kinetik sistem (m_2 dan m_3 saja) sebelum tumbukan kedua adalah

$$EK_{awal} = \tfrac{1}{2} I\omega_1^2 = \tfrac{1}{2}(3mL^2)(v_0/2L)^2 = \tfrac{3}{8} m v_0^2 \qquad (11)$$

Energi kinetik sistem (m_2 dan m_3 saja) setelah tumbukan kedua adalah

$$EK_{akhir} = \tfrac{1}{2} I\omega_2^2 + \tfrac{1}{2} m_3 v_2^2 = \tfrac{3}{2} mL^2\omega_2^2 + \tfrac{1}{2} m v_2^2 = \tfrac{1}{24} m(3v_0 - 4v_2)^2 + \tfrac{1}{2} m v_2^2 \qquad (12)$$

Kekekalan energi kinetik sistem:

$$\tfrac{3}{8} m v_0^2 = \tfrac{1}{24} m(3v_0 - 4v_2)^2 + \tfrac{1}{2} m v_2^2 \qquad (13)$$

yang akhirnya akan memberikan solusi nontrivial berupa

$$v_2 = \tfrac{6}{7} v_0 \text{ dan } \omega_2 = -v_0 / 14L. \qquad (14)$$

Setelah tumbukan kedua, m_1 bergerak dengan kecepatan $v_0 / 2$ berlawanan arah gerak mula-mula, batang m_2 berputar dengan kecepatan sudut $v_0 / 14L$ searah jarum jam (jika dilihat dari atas) dan m_3 bergerak lurus meninggalkan batang dengan kecepatan $\frac{6}{7} v_0$.

c. (**5 poin**) Dapat ditunjukkan konsistensi nilai momentum sudut awal dan akhir maupun energi kinetiknya.
Sebelum tumbukan pertama, momentum sudut total sistem adalah $mv_0 L$.
Setelah tumbukan kedua, momentum sudut total sistem adalah

Download di Folder OSN
https://folderosn.blogspot.co.id

$$L = m(-v_0/2)L + (3mL^2)(-v_0/14L) + m(6v_0/7)(2L) = mv_0L\,.$$

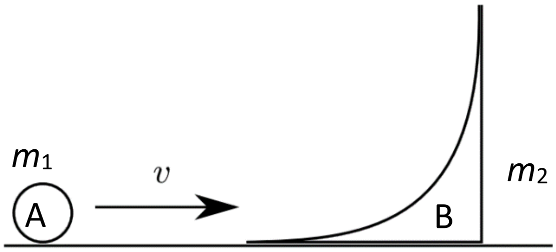
Sebelum tumbukan pertama, energi kinetik total sistem adalah $\frac{1}{2}mv_0{}^2$.

Setelah tumbukan kedua, energi kinetik total sistem adalah

$$EK = \frac{1}{2}m(-v_0/2)^2 + \frac{1}{2}(3mL)^2(-v_0/14L)^2 + \frac{1}{2}m(6v_0/7)^2 = \frac{1}{2}mv_0{}^2\,.$$

Download di Folder OSN
https://folderosn.blogspot.co.id

6. (18 poin) Suatu bola pejal A bermassa m_1 dan berjari – jari r bergerak dengan kecepatan v_0 ke arah sebuah benda B bermassa $m_2 >> m_1$ dengan sisi melengkung seperti terlihat pada gambar di bawah ini.



Bola A kemudian melintasi permukaan benda B hingga terpental secara vertikal ke atas relatif terhadap benda B, lalu bola terjatuh melewati lintasan yang sama. Asumsikan lantainya licin dan bola terhempas sangat tinggi sehingga dimensi balok dapat diabaikan,

a) Apabila gaya gesek bola-balok diabaikan, tentukan waktu tempuh bola kembali ke titik semula!
b) Apabila gaya gesek bola-balok tidak diabaikan, tentukan ketinggian maksimum bola!

Jawab:

a) (**8 poin**) Pada saat bola terhempas ke atas, bola dan balok bergerak bersama-sama secara horizontal.

Kekekalan momentum horizontal:

$$mv_0 = (m+M)v_x \rightarrow v_x = \frac{mv_0}{m+M} \qquad (1)$$

Karena tidak ada gesekan, berlaku hukum kekekalan energi:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m\left(v_x^2 + v_y^2\right) + \frac{1}{2}Mv_x^2 \qquad (2)$$

maka

$$m\left(v_0^2 - v_y^2\right) = (m+M)v_x^2 = \frac{m^2}{m+M}v_0^2$$

$$v_y^2 = \left(1 - \frac{m}{m+M}\right)v_0^2 \quad \rightarrow \quad v_y = v_0\sqrt{\frac{M}{m+M}} \qquad (3)$$

Waktu selama bola di udara:

$$t = \frac{2v_y}{g} = \frac{2v_0}{g}\sqrt{\frac{M}{m+M}} \qquad (4)$$

dan jarak horizontal yang telah ditempuh:

$$x = v_x t = \frac{2v_x v_y}{g} = \frac{2v_0^2}{g}\sqrt{\frac{m^2 M}{(m+M)^3}} \qquad (5)$$

Setelah itu, bola akan bergerak ke arah sebaliknya.
Kekekalan momentum berlaku:

Download di Folder OSN
https://folderosn.blogspot.co.id

$$mv_0 = mv_1 + Mv_2 \qquad (6)$$

dan dari kekekalan energi:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}Mv_2^2 \qquad (7)$$

lalu

$$v_2^2 = \frac{m}{M}(v_0^2 - v_1^2) = \frac{m^2}{M^2}(v_0 - v_1)^2$$

$$v_0^2 - v_1^2 = \frac{m}{M}(v_0^2 + v_1^2 - 2v_0v_1)$$

$$v_1^2 - \frac{2m}{m+M}v_0v_1 + \left(\frac{m-M}{m+M}\right)v_0^2 = 0$$

$$v_1 = v_0\left(\frac{m}{m+M} \pm \sqrt{\frac{m^2}{(m+M)^2} - \frac{m-M}{m+M}}\right) = v_0\left(\frac{m}{m+M} \pm \frac{M}{m+M}\right)$$

Karena $v_1 \neq v_0$, maka kecepatan balik:

$$v_1 = -v_0\left(\frac{M-m}{m+M}\right) \qquad (8)$$

Dan waktu tempuh balik:

$$t' = \frac{x}{-v_1} = \frac{2v_0}{g}\sqrt{\frac{m^2M}{(m+M)^3}}\frac{m+M}{M-m} = \frac{2v_0}{g}\sqrt{\frac{m^2M}{(m+M)(M-m)^2}} \qquad (9)$$

Waktu tempuh total

$$t_{tot} = t + t' = \frac{2v_0}{g}\left(\sqrt{\frac{M}{m+M}} + \sqrt{\frac{m^2M}{(m+M)(M-m)^2}}\right)$$

didapat:

$$t_{tot} = \frac{2v_0}{g}\sqrt{\frac{M}{m+M}}\left(\frac{M}{M-m}\right) \qquad (10)$$

b) (**10 poin**) Sama seperti sebelumnya, kita tinjau kekekalan momentum pada arah horizontal:

$$v_x' = v_x = \frac{mv_0}{m+M} \qquad (11)$$

Awalnya kita asumsikan bola berputar tanpa slip di tepi atas balok setelah terjadi transfer energi.
Maka terjadi perubahan momentum sudut:

$$\Delta L = \tau\Delta t = rf\Delta t \qquad (12)$$

Download di Folder OSN
https://folderosn.blogspot.co.id

Karena pengurangan kecepatan setara dengan $\Delta v_y = \frac{f\Delta t}{m}$, maka

$$\Delta L = rm\left(v_y - v_y'\right) = I(\omega - 0) = I\,\frac{v_y'}{r}$$

lalu didapat

$$v_y' = \frac{v_y}{1 + \frac{I}{mr^2}} = v_0\left(\frac{1}{1 + \frac{I}{mr^2}}\right)\sqrt{\frac{M}{m+M}} \qquad (13)$$

Ketinggian maksimum yang dicapai bola apabila tidak slip di akhir:

$$h = \frac{v_y'^2}{2g} = \frac{v_0^2}{2g}\left(\frac{1}{1 + \frac{I}{mr^2}}\right)^2\left(\frac{M}{m+M}\right) \qquad (12)$$

Karena ada kemungkinan masih tetap slip di akhir sehingga $v_y' \leq v < v_y$, maka didapat ketinggian maksimum yang dicapai bola:

$$\frac{{v_y'}^2}{2g} \leq h < \frac{v_y^2}{2g}$$

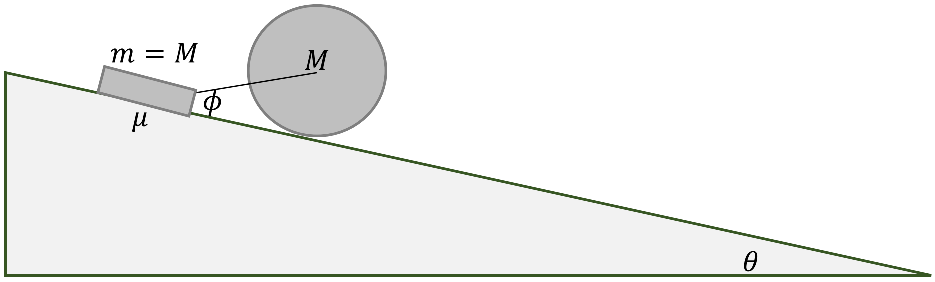
$$\frac{v_0^2}{2g}\left(\frac{1}{1 + \frac{I}{mr^2}}\right)^2\left(\frac{M}{m+M}\right) \leq h < \frac{v_0^2}{2g}\left(\frac{M}{m+M}\right) \qquad (13)$$

Untuk kasus bola pejal, $I = \frac{2}{5}mr^2$:

$$\frac{25}{49}\frac{v_0^2}{2g}\left(\frac{M}{m+M}\right) \leq h < \frac{v_0^2}{2g}\left(\frac{M}{m+M}\right) \qquad (14)$$

Download di Folder OSN
https://folderosn.blogspot.co.id

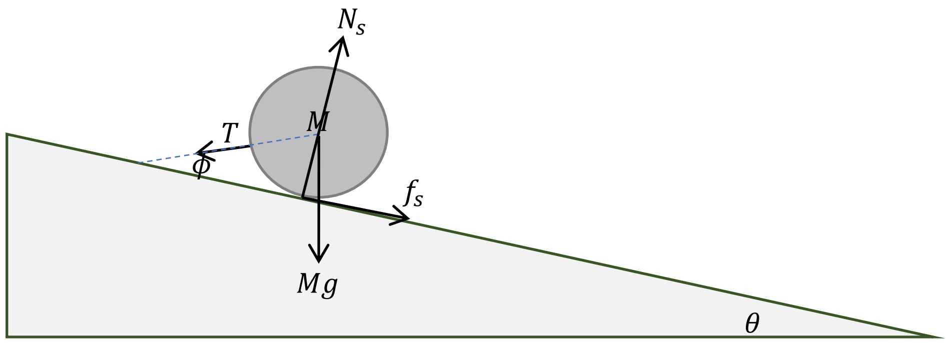
7. (18 poin) Sebuah silinder pejal massa M menggelinding tanpa slip menuruni bidang miring diam bersudut elevasi θ, dengan kecepatan v_0. Seseorang ingin menghentikan silinder tersebut dengan memberikan beban. Pada pusat silinder tersebut dikaitkan tali sehingga tali membentuk sudut ϕ terhadap permukaan bidang miring. Di ujung lain tali tersebut, diikatkan ke sebuah beban balok m yang memiliki massa sama dengan silinder. Diketahui koefisien gesek antara balok dan bidang miring adalah μ serta percepatan gravitasi adalah g. Asumsikan gesekan beban mampu menghentikan gerak silinder. Tentukanlah:
   a. Jarak yang ditempuh silinder hingga berhenti!
   b. Syarat sudut ϕ yang dapat memenuhi asumsi di atas (nyatakan dalam θ dan μ)!



Jawab:

a. (**12 poin**) Agar silinder dapat berhenti, torsi akibat gaya geseknya harus dapat memperkecil kecepatan sudutnya, maka gaya gesek harus berarah turun mengikuti permukaan bidang miring.

Diagram gaya pada silinder:



Persamaan gaya pada silinder searah permukaan bidang miring ($\Sigma F = Ma$):

$$Mg\sin\theta + f_s - T\cos\phi = Ma$$

Persamaan torsi pada silinder ($\Sigma\tau = I\alpha$):

$$-f_s R = \frac{1}{2}MR^2\left(\frac{a}{R}\right)$$

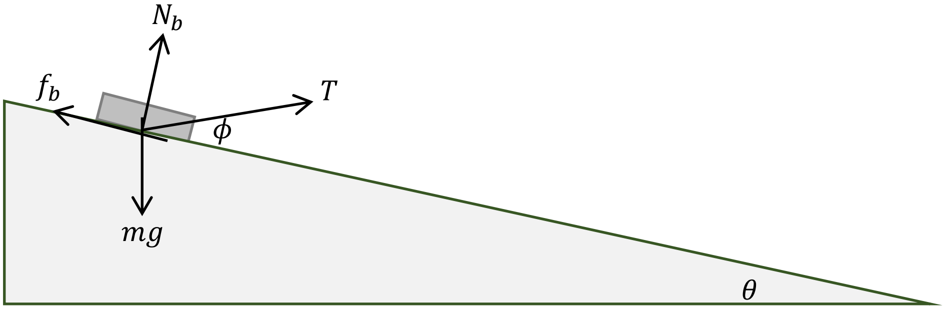
$$-f_s = \frac{1}{2}Ma$$

Dengan mensubstitusi f_s, didapatkan:

$$Mg\sin\theta - T\cos\phi = \frac{3}{2}Ma \quad \ldots (1)$$

Download di Folder OSN
https://folderosn.blogspot.co.id

Diagram gaya pada beban:



Persamaan gaya pada beban searah permukaan bidang miring:

$$T\cos\phi + mg\sin\theta - f_b = ma$$

Persamaan gaya pada beban arah tegak lurus permukaan bidang miring:

$$N_b + T\sin\phi - mg\cos\theta = 0$$

Dengan $f_b = \mu N_b$, substitusikan N_b:

$$T(\cos\phi + \mu\sin\phi) + mg(\sin\theta - \mu\cos\theta) = ma \quad \dots (2)$$

Substitusikan T dari persamaan (1) dan (2), sehingga didapatkan a:

$$a = -\frac{m(\mu\cos\theta - \sin\theta) - M\sin\theta\,(1 + \mu\tan\phi)}{3M(1 + \mu\tan\phi) + 2m}2g$$

Dengan memasukan nilai $m = M$, didapatkan:

$$a = -\frac{\mu\cos\theta - \sin\theta\,(2 + \mu\tan\phi)}{5 + 3\mu\tan\phi}2g$$

Persamaan gerak hingga silinder berhenti:

$$0 = v_0^2 + 2as$$

$$s = -\frac{v_0^2}{2a}$$

$$\boldsymbol{s = \frac{v_0^2(5 + 3\mu\tan\phi)}{4g[\mu\cos\theta - \sin\theta\,(2 + \mu\tan\phi)]}}$$

b. (**6 poin**) Agar silinder dapat berhenti, maka $a < 0$:

$$-\frac{\mu\cos\theta - \sin\theta\,(2 + \mu\tan\phi)}{5 + 3\mu\tan\phi}2g < 0$$

$$\mu\cos\theta - \sin\theta\,(2 + \mu\tan\phi) > 0$$

$$\boldsymbol{\tan\phi < \cot\theta - \frac{2}{\mu}}$$