수학(가형)

1. 정답 : ⑤
   해설 :

$$\vec{a}+2\vec{b} = (1,-2)+(-2,8)$$
$$=(-1,6)$$

모든 성분의 합은 5이다

2. 정답 : ③
   해설 :

$$\frac{5}{3}$$

3. 정답 : ④
   해설 :

선분 AB의 내분점이 x축위에 있으므로 내분점의
y좌표 z좌표는 0이다.

$$y\text{좌표} = \frac{-4+a}{2+1} = 0$$
$$a=4$$

4. 정답 : ②
   해설 :

A와 B^c은 배반사건이므로 $A \subset B$이다.

$$P(A^c \cap B) = P(B-A)$$
$$= P(B)-P(A\cap B)$$
$$= P(B)-P(A)$$
$$= P(B)-\frac{1}{3}$$
$$= \frac{1}{6}$$

따라서 $P(B) = \frac{1}{2}$

5. 정답 : ③
   해설 :

$$y = 2^{(x-m)}+2$$

$$y = 3+\log_2(x-2)$$

두 함수가 $y=x$에 대칭이 되어서 역함수관계가 성립된다.

$$y-3 = \log_2(x-2)$$
$$x-2 = 2^{(y-3)}$$
$$y = 2^{(x-3)}+2$$

따라서 $m=3$이다.

6. 정답 : ①
   해설 :

점P(x,y)에서 준선까지의 거리가 9이므로
x+3=9이다
x=6이다.

7. 정답 : ③
해설 :
준식을 미분하면
$e^x - e^y - xe^y y' = y'$
x, y에 $(0,1)$을 대입하면
$y' = 1 - e$ 이다.

8. 정답 : ①
해설 :
$E(X) = \frac{1}{2}n$
$V(X) = \frac{1}{4}n$
$\frac{1}{4}n = E(X^2) - \frac{1}{4}n^2$
$E(X^2) = \frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{4}n$
$\frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{4}n = \frac{1}{4}n + 25$
$n^2 = 100$
$n = 10$

9. 정답 : ⑤
해설 :
$f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}} \Rightarrow f(-1) = \frac{1}{1+e}$
$f; y = \frac{1}{1+e^{-x}}$
$f^{-1}; x = \frac{1}{1+e^{-y}}$
$y = \ln\frac{x}{1-x} = \ln x - \ln(1-x)$
$g'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}$
$g'(f(-1)) = 1 + e + \frac{1}{1-\frac{1}{1+e}}$
$= \frac{(1+e)^2}{e}$

10. 정답 : ④

해설 :

주머니에서 2개를 꺼내므로 전체의 경우의 수는 ${}_7C_2 = 21$

두 자연수가 서로소

$2 \Rightarrow 3, 5, 7$

$3 \Rightarrow 4, 5, 7, 8$

$4 \Rightarrow 5, 7$

$5 \Rightarrow 6, 7, 8$

$6 \Rightarrow 7$

$7 \Rightarrow 8$

$\therefore \frac{14}{21} = \frac{2}{3}$

11. 정답 : ④

해설 :

$6x^2 + (4\cos\theta)x + \sin\theta = 0$

$\frac{D}{4} = 4\cos^2\theta - 6\sin\theta < 0$

$2\sin^2\theta + 3\sin\theta - 2 > 0$

$(2\sin\theta - 1)(\sin\theta + 2) > 0$

$\sin\theta > \frac{1}{2}$

$\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{5\pi}{6}$

$\therefore 3\alpha + \beta = \frac{4\pi}{3}$

12. 정답 : ②

해설 :

$A + B + C + D = 8 \ \ (A, B, C, D \geq 1)$

$A + B + c + d = 6 \ (A, B \geq 1,\ c, d \geq 0)$

$A = 2,\ B = 1\ ; c + d = 3 \Rightarrow {}_2H_3 = 4$

$A = 3,\ B = 1\ ; c + d = 2 \Rightarrow {}_2H_2 = 3$

$\quad B = 2\ ; c + d = 1 \Rightarrow {}_2H_1 = 2$

$A = 4,\ B = 1\ ; c + d = 1 \Rightarrow {}_2H_1 = 2$

$\quad B = 2\ ; c + d = 0 \Rightarrow {}_2H_0 = 1$

$A = 5,\ B = 1\ ; c + d = 0 \Rightarrow {}_2H_0 = 1$

경우의 수는 13

13. 정답 : ①
해설 :

점$A(2,\ 0,\ 5)$을 지나고 직선$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{2}$을 포함하는

평면의 법선벡터 $\vec{h}=(1,\ a,\ b)$라 두고 직선의 방향벡터$\vec{d}=(1,\ -1,\ 2)$와

직선 위의 점 $B(t+1,\ -t+2,\ 2t-1)$

$\vec{h}\bullet\vec{d}=1-a+2b=0$

$\vec{h}\bullet\overrightarrow{AB}=t-1+a(-t+2)+b(2t-6)=0$

$\therefore\ a=2,\ b=\frac{1}{2}$

평면의 방정식은

$x-2+2y+\frac{1}{2}(z-5)=0$에서$x$축과의 교점은 $x=\frac{9}{2}$

14. 정답 : ④
해설 :

$(\frac{1}{2})^{f(x)g(x)}\geq(\frac{1}{8})^{g(x)}=(\frac{1}{2})^{f(x)g(x)}\geq(\frac{1}{2})^{3g(x)}$

이므로 g(x)가 0보다 클때와 작을때로 나누어 생각 하여야 한다

$g(x)\geq 0$인 경우 $f(x)$는 3보다 작아야 하므로 3,4,5가 되고

$g(x)\leq 0$인 경우 $f(x)$는 3이거나 3보다 커야 하므로 1이된다

따라서 합은 13이다.

15. 정답 : ⑤
해설 :

출근 시간이 73분 이상인 직원들의 확률은 0.33이고

출근 시간이 73분 미만인 직원들의 확률은 0.67이다

$0.33\times0.4=0.132$

$0.67\times0.2=0.134$

$0.132+0.134=0.266$

16. 정답 : ②
해설 :

$f(x)=\frac{1}{2}(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})-\frac{1}{2}(\frac{1}{x^2}f(\frac{1}{x^2}))$

$\int_{\frac{1}{2}}^{2}f(x)dx=\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx-\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{1}{x^2}f(\frac{1}{x})dx$

$\frac{3}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{2}f(x)dx=\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx$

$=\frac{2\ln 2}{3}+\frac{1}{2}$

17. 정답 : ①

해설 :

가 ${}_6C_5 = 6$

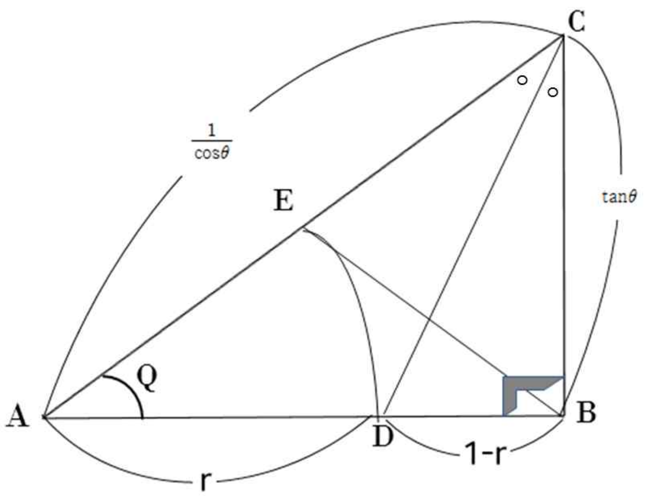
나 ${}_5C_1 = 5$

다 5개의 원소의 일대일 대응 함수의 개수는 5!=120 120

따라서 합은 131

18. 정답 : ②

해설 :



$\overline{AC} : \overline{BC} = \overline{AD} : \overline{BD}$ 이므로

$\frac{1}{\cos\theta} : \tan\theta = r : 1-r$

$\therefore r = \frac{1}{\sin\theta+1}$

$\therefore S(\theta) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin\theta+1}\right)^2\theta$

$$T(\theta) = \frac{1}{2}\tan\theta\left(\frac{1}{\cos\theta} - \frac{1}{\sin\theta+1}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$

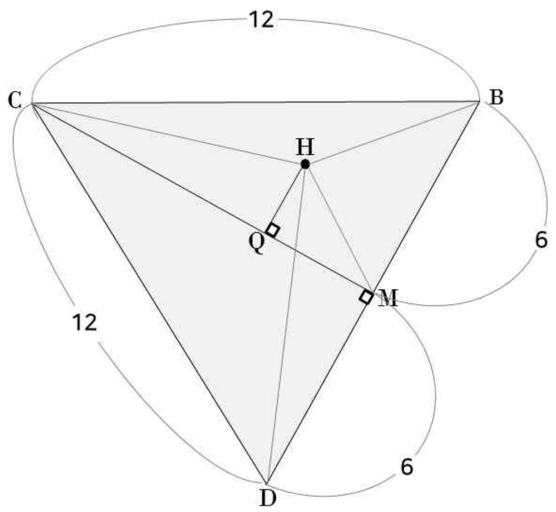
$$= \frac{1}{2}\sin\theta \cdot \frac{\sin\theta+1-\cos\theta}{\cos\theta(\sin\theta+1)}$$

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{(S(\theta))^2}{T(\theta)} = \lim_{\theta\to0+}\frac{1}{2}\cdot\frac{\theta^2 \cdot \cos\theta \cdot (\sin\theta+1)}{(\sin\theta+1)^4 \cdot (\sin\theta+1-\cos\theta)\sin\theta}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{\theta\to0+}\frac{1}{\left(\frac{\sin\theta}{\theta}+\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{\theta}\right)} = \frac{1}{2}$$

19. 정답 : ③

해설 :



$\overline{HQ}$를 구하면 피타고라스로 $\overline{AQ}$를 구할 수 있다.

$\triangle BCD = \triangle BCH + \triangle CDH + \triangle BDH$ 이므로

$\frac{\sqrt{3}}{4} \times 12^2 = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot K + \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot K + \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot K$

$\therefore K = \sqrt{3}$ 이다.

$\overline{HQ} = x$ 라고 하자

$\triangle CBM = \triangle CBH + \triangle BHM + \triangle CMH$ 이므로

$\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 144 = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot \sqrt{3} + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2\sqrt{3} + \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{3} \cdot x$

$\therefore x = 2$

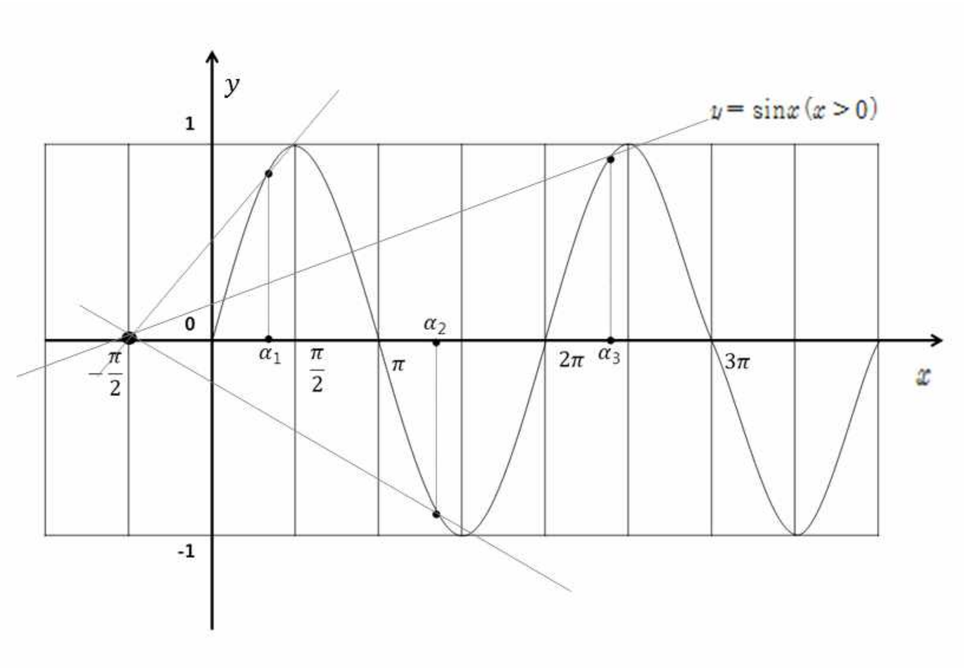
$\overline{AQ}^2 = \overline{HQ}^2 + \overline{AH}^2$

$\overline{AQ}^2 = 4 + 9 = 13$

$\therefore \overline{AQ} = \sqrt{13}$

20. 정답 : ⑤

해설 :



$y = \sin x$에서 $(-\frac{\pi}{2}, 0)$에서 그은 접선의 접점을 $(t, \sin t)$라고 하자

접선 $y - \sin t = \cos t(x - t)$에 $(-\frac{\pi}{2}, 0)$을 대입하면

$-\sin t = \cos t(-\frac{\pi}{2} - t)$

$-\tan t = -\frac{\pi}{2} - t$

$\therefore \tan t = t + \frac{\pi}{2}$이다

즉, $\tan\alpha_n = \alpha_n + \frac{\pi}{2}$가 성립한다.

∴ ㄱ은 참

ㄴ. $\tan\alpha_{n+2} - \tan\alpha_n = (\alpha_{n+2} + \frac{\pi}{2}) - (\alpha_n + \frac{\pi}{2})$

$= \alpha_{n+2} - \alpha_n > 2\pi$

∴ 참이된다

ㄷ. $\alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} - \alpha_n - \alpha_{n+3}$

$= (\alpha_{n+2} - \alpha_n) - (\alpha_{n+3} - \alpha_{n+1})$

$\alpha_{n+2} - \alpha_n > \alpha_{n+3} - \alpha_{n+1}$이므로

$\alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} > \alpha_n + \alpha_{n+3}$이다.

21. 정답 : ④
해설 :

$4\{f(x)\}^3 = \{f(2x+1)\}^3 + C$

위식에 $x = -\frac{1}{8}, \frac{5}{2}, \frac{3}{4}$를 대입하면

$c = \frac{8}{3}$이다.

$4\{f(-1)\}^3 = \{f(-1)\}^3 + \frac{8}{3}$

$\{f(-1)\}^3 = \frac{2}{3}, f(-1) = \frac{2\sqrt[3]{3}}{3}$

22. 정답 : 15
해설 :

$6 \times 5 - \frac{6 \times 5}{2} = 15$

23. 정답 : 26
해설 :

$\tan\theta = 5$ 이면 $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{26}}$ 이고 $\sec^2\theta = 26$이다.

24. 정답 : 4
해설 :
속력의 크기가 최대가 될 때는
$\sqrt{16\sin^2 4t + \cos^2 4t}$ 가 최대가 될 때이므로 $\sin^2 4t$가 1이 될 때이다.
따라서 가속도 크기의 최대값은 4이다

25. 정답 : 2
해설 :

$\int_0^\pi x\cos(\pi - x)dx$ 에서 $\pi - x = t$, $\int_\pi^0 (x-t)\cos t(-dt) = \int_0^\pi (x-t)\cos t(dt)$

26. 정답 : 12
해설 :

$\overline{X} - k\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{X} + k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 에서 모평균과 모표준편차를 대입

$75 - 1.96\frac{\sigma}{4} \le m \le 75 + 1.96\frac{\sigma}{4}$ 와 $77 - 2.58\frac{\sigma}{4} \le m \le 77 + 2.58\frac{\sigma}{4}$

$d - b = 3.86$ 이므로 따라서 $\sigma = 12$

27. 정답 : 8

해설 :

A,B 가 독립이면 $P(A\cap B)=P(A)P(B)$

$A=1,3,5\,,\,P(A)=\dfrac{1}{2}$

$1)\,m=6\,,\,B=\{1,2,3,6\}\quad \dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}$

$2)\,m=2\,,\,B=\{1,2\}\ \dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}$

28. 정답 : 11

해설 :

타원의 정의에 의해 장축의 길이가 14이므로

$\overline{PQ}+\overline{QF}=14-\overline{PF'}$ 이다

따라서 $\overline{PQ}+\overline{QF}$ 가 최대일 때는 $\overline{PF'}$가 최소일 때이고 그 값은 3이다.

29. 정답 : 53

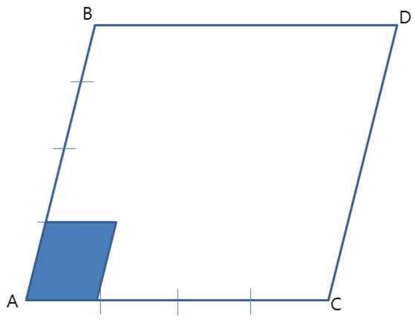
해설 :

$0\le p,\ q,\ t\le 1$인 임의의 실수 p,q,t에 대해

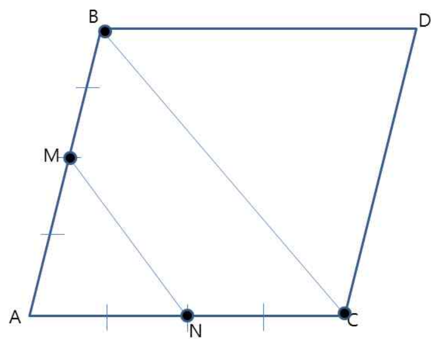
$\overrightarrow{AP}=p\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AR}=q\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AQ}=t\overrightarrow{AB}+(1-t)\overrightarrow{AC}$라고 하자.

(1) $\dfrac{1}{4}(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AR})=p(\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB})+q(\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC})$이므로 그 자취는 아래그림의 평행사변형$ACDB$의 영역의 $\dfrac{1}{16}$이고

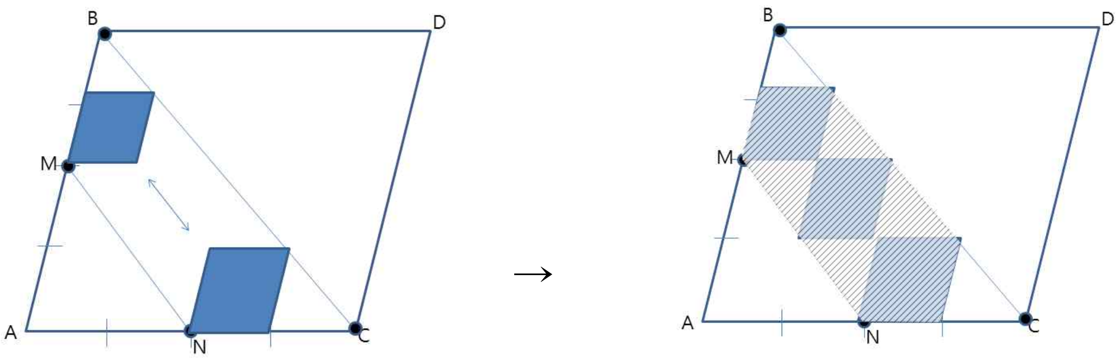
그 넓이는 $\dfrac{1}{16}\times 18=\dfrac{9}{8}$이다.($\because$ 삼각형 ABC의 넓이가 9이다.)



(2) $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AQ}=t(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB})+(1-t)(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC})$이므로 그 자취는 선분$\overline{BC}$의 길이의 절반이다.



(1),(2)에 따라서 $\overrightarrow{AX}$의 자취는 아래 그림의 빗금친 부분의 영역이다.



즉, 넓이는 $9\times\frac{3}{4}-\frac{9}{8}=\frac{45}{8}$이고 정답은 $45+8=53$이다.

30. 정답 : 27

해설 :

$f(x)=6\pi\times h(x)$ h(x):최계수가 1인 삼차함수 둘수 있다.

$g(x)=\frac{1}{2+\sin f(x)}$, $g'(x)=\frac{-\cos f(x)\times f'(x)}{(2+\sin f(x))^2}$

(가) 조건에서 얻을 수 있는 정보는 $f(0)=\frac{\pi}{6}, f'(0)=0$ 이고

(나) 조건에서 얻을 수 있는 정보는 $\sin f(\alpha_5)-\sin f(\alpha_2)=\frac{1}{2}$ 인데,

여기서 α_2 α_5 는 $g'(x)=0$의 근이므로 $g'(x)=\frac{-\cos f(x)\times f'(x)}{(2+\sin f(x))^2}=0$ 에서

분모는 0이 되지 않으므로 분자가 0이 되는 0이상의 값중에서 작은순서대로 2번째와 5번째 수이다. 그러나 여기서 f'(x)는 2차함수 이고 코사인함수는 주기 함수이므로 코사인 함수가 0 이 되는 값들은 π를 주기로 가진다 따라서 α_2 α_5는 둘다 $\cos f(x)$ 값을 0으로 만드지 않는다. (왜냐하면 π간격의 사인값은 차이가 0또는 2이다.)

따라서, $g'(x)=-\cos f(x)\times f'(x)=0$ 의 해인 α_2 α_5 는 $f'(\alpha_2)=0, \cos f(\alpha_5)=0$ 또는

$f'(\alpha_5)=0$, $\cos f(\alpha_2)=0$ 이다. 따라서 (나) 조건으로 인해 $\sin f(\alpha_5)-\sin f(\alpha_2)=\frac{1}{2}$ 을 생각하면

$\sin f(\alpha_5)=1$, $\sin f(\alpha_2)=\frac{1}{2}$ 이 되어야 한다. (왜냐하면 $f(\alpha_2), f(\alpha_5)$중 하나는 반드시 $\frac{2n-1}{2}\pi$ 이다.)

따라서, $f(\alpha_2)=\frac{\pi}{6}\text{or}\ \frac{13\pi}{6}$, $f'(\alpha_2)=0$ 이를 이용해 연립하여 f(x)를 구한다.

$\therefore g'(-\frac{1}{2})=\frac{-\cos f(-\frac{1}{2})f'(-\frac{1}{2})}{2+\sin f(-\frac{1}{2})^2}=3\sqrt{3}\pi$ 이다.

$a=3\sqrt{3}$, $\therefore a^2=27$