1. Carilah bilngan real x yang memenuhi pertidaksamaan
$$\frac{x^2-3}{x^2-1}+\frac{x^2+5}{x^2+3}\geq\frac{x^2-5}{x^2-3}+\frac{x^2+3}{x^2+1}$$
Jawab:
Kita sederhanakan terlebih dahulu sehingga diperoleh
$$1+\frac{-2}{x^2-1}+1+\frac{2}{x^2+3}\geq 1+\frac{-2}{x^2-3}+1+\frac{2}{x^2+1}$$
$$-\frac{2}{x^2-1}+\frac{2}{x^2+3}\geq\frac{-2}{x^2-3}+\frac{2}{x^2+1}$$
$$-\frac{1}{x^2-1}+\frac{1}{x^2+3}\geq\frac{-1}{x^2-3}+\frac{1}{x^2+1}$$
$$-\frac{4}{(x^2-1)(x^2+3)}\geq-\frac{4}{(x^2-3)(x^2+1)}$$
Sehingga diperoleh
$$\frac{1}{(x^2-3)(x^2+1)}-\frac{1}{(x^2-1)(x^2+3)}\geq 0$$
$$\frac{4x^2}{(x^2-3)(x^2-1)(x^2+3)(x^2+1)}\geq 0\ldots(1)$$
Diperoleh titik pemecah $-\sqrt{3},-1,0,1,\sqrt{3}$, dengna $x\neq\pm\sqrt{3}$ dan $x\neq\pm1$
Pembilang nonnegatif, sehingga kita perlu mencari kondisi dimana penyebut juga positif.
Perhatikan bahwa $(x^2+3)(x^2+1)>0$. Sehingga diperoleh syarat $(x^2-3)(x^2-1)>0$ agar persamaan…(1) terpenuhi.
Kasus 1. Jika $x<-\sqrt{3}$ maka diperoleh x^2-3 dan x^2-1 positif. Maka $(x^2-3)(x^2-1)>0$
Kasus 2. Jika $-\sqrt{3}<x<-1$ maka diperoleh $x^2-3<0$ dan $x^2-1>0$. Maka $(x^2-3)(x^2-$ *1<0*
Kasus 3. Jika $-1<x\leq 0$ maka diperoleh $x^2-3<0$ dan $x^2-1<0$. Maka $(x^2-3)(x^2-$ *1>0*
Kasus 4. Jika $0<x<1$ maka diperoleh $x^2-3<0$ dan $x^2-1<0$. Maka $(x^2-3)(x^2-1)>0$
Kasus 5. Jika $1<x<\sqrt{3}$ maka diperoleh $x^2-3<0$ dan $x^2-1>0$. Maka $(x^2-3)(x^2-$ *1<0*
Kasus 6. Jika $x>\sqrt{3}$ maka diperoleh $x^2-3>0$ dan $x^2-1>0$. Maka $(x^2-3)(x^2-1)>0$
Sehingga, solusinya adalah
$$HP=\{x|x<-\sqrt{3}\cup-1<x<1\cup x>\sqrt{3}\}$$

2. Diketahui m adalah bilangan asli empat angka dengan angka satuan dan ribuan sama. Jika m merupakan bilangan kuadrat, tentukan semua nilai m yang mungkin.
Jawab:
Perhatikan bahwa
$$1000\leq m^2\leq 9999$$
maka diperoleh
$$31<m<100$$

Selanjutnya perhatikan bahwa kemungkinan sisa bilangan kuadrat sempurna ketika dibagi 10 adalah 1,4,5,6, dan 9.

Kasus 1. Jika satuannya adalah 1, maka diperoleh bilangan 4 angka 1ab1, dan $31^2 < 1ab1 < 45^2$. Sehingga kemungkinan untuk kasus ini adalah $39^2 = 1521$ dan $41^2 = 1681$.

Kasus 2. Jika satuannya adalah 4, maka diperoleh bilangan 4 angka 4ab4, dan $63^2 < 4ab4 < 70^2$. Sehingga kemungkinan untuk kasus ini adalah $68^2 = 4624$

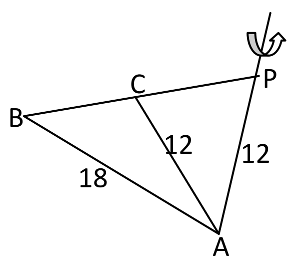
Kasus 3. Jika satuannya adalah 5, maka diperoleh bilangan 4 angka 5ab5, dan $71^2 < 5ab5 < 78^2$. Sehingga kemungkinan untuk kasus ini adalah $75^2 = 5625$.

Kasus 4. Jika satuannya adalah 6, maka diperoleh bilangan 4 angka 6ab6, dan $78^2 < 6ab6 < 84^2$. Tidak ada yang memenuhi.

Kasus 5. Jika satuannya adalah 9, maka diperoleh bilangan 4 angka 9ab9, dan $95^2 < 6ab6 < 100^2$. Sehingga kemungkinan untuk kasus ini adalah $97^2 = 9409$.

Jadi, m yang mungkin adalah $1521, 1681, 4624, 5625 \text{ dan } 9409$.

3. Pada gambar berikut, ΔABP adalah segitiga samakaki. Dengan $AB = BP$ dan titik C pada BP. Hitunglah volume dari benda yang diperoleh dari hasil pemutaran ΔABC mengelilingi garis AP.



Jawab:

ABP sama kaki dengan $AB = BP$

APC sama kaki dengan $AC = AP$.

$\angle APC = \angle APB = \angle PAB = \angle PCA$, sehingga kita peroleh

$$\frac{AB}{BP} = \frac{AP}{PC} \Rightarrow PC = 8$$

Tinggi segitiga APB dengan alas AP yang dinotasikan dengan t_1. Dengan teorema Pythagoras adalah

$$t_1 = \sqrt{18^2 - 6^2} = \sqrt{288}$$

Sehingga volume APB ketika diputar terhadap AP kita notasikan dengan V_1 adalah

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi r^2 t = \frac{1}{3}\pi \times 288 \times 12 = \frac{3456\pi}{3}$$

Selanjutnya, kita cari tinggi segitiga APC terhadap alas AP yang dinotasikan dengan t_2. Dengan **Rumus Heron** diperoleh bahwa $[APC] = \sqrt{16 \times 4 \times 4 \times 8} = 32\sqrt{2}$. Sehingga diperoleh

$$\frac{1}{2}AP \times t_2 = 32\sqrt{2}$$

$$\frac{1}{2} \times 12 \times t_2 = 32\sqrt{2}$$

$$t_2 = \frac{16}{3}\sqrt{2}$$

Sehingga volume APC ketika diputar terhadap AP kita notasikan dengan V_2 adalah

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi r^2 t_1 = \frac{1}{3}\pi \times \frac{512}{9} \times 12 = \frac{2048\pi}{9}$$

Sehingga diperoleh volume ABC diputar terhadap AP, kita notasikan dengna V_3 adalah

$$V_3 = V_2 - V_1 = \frac{3456\pi}{3} - \frac{2048\pi}{9} = \frac{8320\pi}{9}$$

Sehingga volume benda yang diperoleh adalah $\frac{8320}{9}\pi$.

4. Acara perpisahan suatu kelas terdiri dari 10 anak laki-laki dan 12 anak perempuan. Wali kelas dari kelas tersebut menyediakan enam hadiah untuk siswanya dipilih secara acak. Hadiah yang disediakan adalah satu tas sekolah, dua buah novel dan tiga buah kalkulator. Jika total siswa laki-laki mendapatkan hadiah sama banyak dengan total siswa perempuan yang mendapatkan hadiah, ada berapa banyak susunan yang mungkin dari siswa yang mendapatkan hadiah?

Jawab:

Kasus 1. Jika 1 orang anak laki-laki dan 1 orang anak perempuan mendapat hadiah maka

a. Kita hitung banyak kemungkinan laki-laki dan perempuan yang mendapatkan hadiah yaitu sebanyak berturut-turut $C(10,1) = 10$ dan $C(12,1) = 12$.

b. Kemungkinan hadiah yang diterima adalah

   L: T dan P:N sebanyak $10 \times 12 = 120$
   L: T dan P:K sebanyak $10 \times 12 = 120$
   L:N dan P:T sebanyak $10 \times 12 = 120$
   L:N dan P:K sebanyak $10 \times 12 = 120$
   L:K dan P:T sebanyak $10 \times 12 = 120$
   L:K dan P:N sebanyak $10 \times 12 = 120$

Sehingga untuk **kasus 1** ada sebanyak 720 cara

Kasus 2. Jika 2 orang anak laki-laki dan 2 orang anak perempuan mendapat hadiah maka

a. Kita hitung banyak kemungkinan laki-laki dan perempuan yang mendapatkan hadiah yaitu sebanyak berturut-turut $C(10,2) = 45$ dan $C(12,2) = 66$

b. Kemungkinan hadiah yang diterima adalah

   L:TN dan P:NK sebanyak $90 \times 132 = 11880$
   L:TN dan P:KK sebanyak $90 \times 66 = 5940$
   L:TK dan P:NN sebanyak $90 \times 66 = 5940$
   L:TK dan P:NK sebanyak $90 \times 132 = 11880$
   L:TK dan P:KK sebanyak $90 \times 66 = 5940$
   L:NN dan P:TK sebanyak $45 \times 132 = 5940$
   L:NN dan P:KK sebanyak $45 \times 66 = 2970$
   L:NK dan P:TK sebanyak $90 \times 132 = 11880$
   L:NK dan P:NK sebanyak $90 \times 132 = 11880$
   L:NK dan P:KK sebanyak $90 \times 66 = 5940$

L:KK dan P:TK sebanyak $45 \times 132 = 5940$
L:KK dan P:NK sebanyak $45 \times 132 = 5940$
L:KK dan P:NN sebanyak $45 \times 66 = 2970$

Sehingga banyak kemungkinan untuk kasus 2 adalah

$$11880 \times 4 + 5940 \times 7 + 2 \times 2970 = 95040$$

Kasus 3. Jika 3 orang anak laki-laki dan 3 orang anak perempuan mendapat hadiah maka

a. Kita hitung banyak kemungkinan laki-laki dan perempuan yang mendapatkan hadiah yaitu sebanyak berturut-turut $C(10,3) = 120$ dan $C(12,3) = 220$.
b. Distribusi pembagian hadiah laki-laki dan perempuan banyaknya sama, sehingga diperoleh kasus-kasus berikut

i. Jika L:TNK maka P:NKK
Banyak cara laki-laki adalah $120 \times 6 = 720$
Banyak cara perempuan adalah $220 \times 3 = 660$
Sehingga banyak kemungkinannya adalah $720 \times 660 = 475200$

ii. Jika L: TNN maka P:KKK
Banyak cara laki-laki adalah $120 \times 3 = 360$
Banyak cara perempuan adalah $220 \times 1 = 220$
Sehingga banyak kemungkinannya adalah $360 \times 220 = 79200$

iii. Jika L:TKK maka P:NNK
Banyak cara laki-laki adalah $120 \times 3 = 360$
Banyak cara perempuan adalah $220 \times 3 = 660$
Sehingga banyak kemungkinannya adalah $360 \times 660 = 237600$

iv. Jika L:NNK maka P: TKK
Banyak cara laki-laki adalah $120 \times 3 = 360$
Banyak cara perempuan adalah $220 \times 3 = 660$
Sehingga banyak kemungkinannya adalah $360 \times 660 = 237600$

v. Jika L:KKK maka P:TNN
Banyak cara laki-laki adalah $120 \times 1 = 120$
Banyak cara perempuan adalah $220 \times 3 = 660$
Sehingga banyak kemungkinannya adalah $120 \times 660 = 79200$

vi. Jika L: NKK maka P:TNK
Banyak cara laki-laki adalah $120 \times 3 = 360$
Banyak cara perempuan adalah $220 \times 6 = 1320$
Sehingga banyak kemungkinannya adalah $360 \times 1320 = 475200$

Sehingga kemungkinannya adalah 1584000

Sehingga banyak kemungkinan pembagian hadiah adalah

$$1584000 + 95040 + 720 = 1679760$$

5. Diketahui $S = \{1945, 1946, 1947, \cdots, 2016, 2017\}$. Jika $A = \{a, b, c, d, e\}$ merupakan himpunan bagian dari S dengan $a + b + c + d + e$ habis dibagi 5. Tentukan banyak A yang mungkin.
Jawab:

Karena A merupakan himpunan bagian, maka urutan tidak diperhatikan. Misalkan S_0, S_1, S_2, S_3, S_4 merupakan himpunan bilangan yang bersisa 0,1,2,3,4 secara berturut-turut ketika dibagi 5. Adapun $n(S_0) = 14$, $n(S_1) = 14$, $n(S_2) = 14$, $n(S_3) = 13$, dan $n(S_4) = 13$.

1) 0 + 0 + 0 + 0 + 0

   Banyak kemungkinannya adalah $\binom{14}{5} = 2002$

2) 0 + 0 + 0 + 1 + 4

   Banyak kemungkinannya adalah $\binom{14}{3}\binom{14}{1}\binom{13}{1} = 66248$

3) 0 + 0 + 0 + 2 + 3

   Banyak kemungkinannya adalah $\binom{14}{3}\binom{14}{1}\binom{13}{1} = 66248$

4) 0 + 0 + 1 + 1 + 3

   Banyak kemungkinannya adalah $\binom{14}{2}\binom{14}{2}\binom{13}{1} = 107635$

5) 0 + 0 + 1 + 2 + 2

   Banyak kemungkinannya adalah $\binom{14}{2}\binom{14}{1}\binom{14}{2} = 115934$

6) 0 + 0 + 2 + 4 + 4

   Banyak kemungkinannya adalah $\binom{14}{2}\binom{14}{1}\binom{13}{2} = 99372$

7) 0 + 0 + 3 + 3 + 4

   Banyak kemungkinannya adalah $\binom{14}{2}\binom{13}{2}\binom{13}{1} = 92274$

8) 0 + 1 + 1 + 4 + 4

   Banyak kemungkinannya adalah $\binom{14}{1}\binom{14}{2}\binom{13}{2} = 99372$

9) 0 + 1 + 2 + 3 + 4

   Banyak kemungkinannya adalah $\binom{14}{1}\binom{14}{1}\binom{14}{1}\binom{13}{1}\binom{13}{1} = 463736$

10) 0 + 1 + 3 + 3 + 3

   Banyak kemungkinannya adalah $\binom{14}{1}\binom{14}{1}\binom{13}{3} = 56056$

11) 0 + 2 + 2 + 3 + 3

   Banyak kemungkinannya adalah $\binom{14}{1}\binom{14}{2}\binom{13}{2} = 99372$

12) 0 + 3 + 4 + 4 + 4

   Banyak kemungkinannya adalah $\binom{14}{1}\binom{13}{1}\binom{13}{3} = 52052$

13) 1 + 1 + 1 + 1 + 1

   Banyak kemungkinannya adalah $\binom{14}{5} = 2002$

14) 1 + 1 + 1 + 3 + 4

   Banyak kemungkinannya adalah $\binom{14}{3}\binom{13}{1}\binom{13}{1} = 61516$

15) 1 + 1 + 2 + 3 + 3

   Banyak kemungkinannya adalah $\binom{14}{2}\binom{14}{1}\binom{13}{2} = 99372$

16) 1 + 2 + 2 + 2 + 3

Banyak kemungkinannya adalah $\binom{14}{1}\binom{14}{3}\binom{13}{1} = 66248$

17) 1 + 2 + 4 + 4 + 4

Banyak kemungkinannya adalah $\binom{14}{1}\binom{14}{1}\binom{13}{3} = 56056$

18) 2 + 2 + 2 + 2 + 2

Banyak kemungkinannya adalah $\binom{14}{5} = 2002$

19) 2 + 2 + 3 + 4 + 4

Banyak kemungkinannya adalah $\binom{14}{2}\binom{13}{1}\binom{13}{2} = 92274$

20) 2 + 3 + 3 + 3 + 4

Banyak kemungkinannya adalah $\binom{14}{1}\binom{13}{3}\binom{13}{1} = 52052$

21) 3 + 3 + 3 + 3 + 3

Banyak kemungkinannya adalah $\binom{13}{5} = 1287$

22) 4 + 4 + 4 + 4 + 4

Banyak kemungkinannya adalah $\binom{13}{5} = 1287$

Sehingga banyak kemungkinannya adalah

$$3 \times 2002 + 2 \times 1287 + 3 \times 66248 + 107635 + 115934 + 4 \times 99372 + 2 \times 52052 + 61516 + 2 \times 92274 + 2 \times 56056 + 463736 = 1754397$$

6. Parabola $y = ax^2 + bx, a < 0$ memiliki puncak di titik C dan memotong sumbu x di titik A dan B yang berbeda. Garis $y = ax$ memotong parabola tersebut di titik berbeda A dan D. Jika luas segitiga ABC sama dengan $|ab|$ kali luas segitiga ABD, tentukan nilai b sebagai fungsi dari a tanpa menggunakan nilai mutlak.

Catatan: $|x|$ disebut nilai mutlak x dengan

$$|x| = \begin{cases} x, jika\ x \geq 0 \\ -x, jika\ x < 0 \end{cases}$$

Jawab:

Kasus 1. Jika $b < 0$, maka diperoleh $|ab| = ab$

Koordinat titik $C\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2}{4a}\right)$

Koordinat titik $A(0,0)$

Koordinat ttitik $B\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$

Koordinat titik D dicari dengan langkah sebagai berikut

$ax = ax^2 + bx$, sehiingga diperoleh absis koordinat titik D adalah $\frac{a-b}{a}$, dan ordinatnya adalah $a - b$

Karena koordinat D dan A berbeda maka $a - b \neq 0$

Pandang segitiga ABC dan ABD dengan alas AB, dan tinggi berturut-turut t_1 dan t_2. Perhatikan subkasus berikut

Subkasus 1. Jika $a - b > 0$, maka diperoleh

$$[ABC] = ab[ABD]$$
$$\frac{1}{2} \times AB \times t_1 = ab\frac{1}{2} \times AB \times t_2$$
$$t_1 = abt_2$$
$$-\frac{b^2}{4a} = ab(a - b)$$
$$-b = 4a^3 - 4a^2b$$
$$4a^2b - b = 4a^3$$
$$b = \frac{4a^3}{4a^2 - 1}$$

Pada subkasus ini $a \neq -\frac{1}{2}$.

Subkasus 1. Jika $b - a > 0$, maka diperoleh

$$t_1 = abt_2$$
$$-\frac{b^2}{4a} = ab(b - a)$$
$$-b = 4a^2b - 4a^3$$
$$4a^2b + b = 4a^3$$
$$b = \frac{4a^3}{4a^2 + 1}$$

Kasus 2. Jika $b > 0$, maka diperoleh $|ab| = -ab$, dan $b - a > 0$

$$t_1 = abt_2$$
$$-\frac{b^2}{4a} = ab(b - a)$$
$$-b = 4a^2b - 4a^3$$
$$4a^2b + b = 4a^3$$
$$b = \frac{4a^3}{4a^2 + 1}$$

7. Diketahui a bilangan prima dan k adalah bilangan bulat positif. Jika $\sqrt{k^2 - ak}$ adalah bilangan bulat positif, tentukan nilai k sebagai fungsi a.

Jawab:

Misalkan $k^2 - ak = m^2$, maka diperoleh $k^2 - ak - m^2 = 0$.

Karena k bilangan bulat maka diskriminan dari persamaan kuadrat merupakan bilangan kuadrat

$$a^2 + 4m^2 = c^2$$

dengan $c > 0$

Sehingga diperoleh

$$a^2 = c^2 - 4m^2$$
$$a^2 = (c - 2m)(c + 2m)$$

Karena $c - 2m < c + 2m$, maka diperoleh faktor yang mungkin adalah $c - 2m = 1$ dan $c + 2m = a^2$. Sehingga untuk a bilangan genap tidak mungkin terjadi, karena $m = \frac{a^2+1}{4}$
Selanjutnya, untuk a ganjil diperoleh

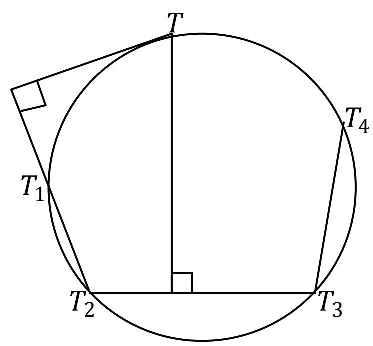
$$k^2 - ak = \left(\frac{a^2+1}{4}\right)^2$$

$$\left(k - \left(\frac{a+1}{2}\right)^2\right)\left(k + \left(\frac{a-1}{2}\right)^2\right) = 0$$

Sehingga
$k = \left(\frac{a+1}{2}\right)^2$, dan $k = -\left(\frac{a-1}{2}\right)^2$ (Tidak memenuhi)
Sehingga,
$f(a) = k = \left(\frac{a+1}{2}\right)^2$

8. Terdapat 5 titik yang berbeda, T_1, T_2, T_3, T_4 dan T pada sebuah lingkaran L. Misalkan t_{ij} adalah jarak titik T ke garis T_iT_j atau perpanjangannya. Buktikan bahwa

$$\frac{t_{ij}}{t_{jk}} = \frac{TT_i}{TT_k} \text{ dan } \frac{t_{12}}{t_{24}} = \frac{t_{13}}{t_{34}}$$



Jawab:

Misalkan tinggi ΔTT_iT_j pada alas T_iT_j adalah TO_{ij} dan misalkan tinggi ΔTT_jT_k pada alas T_jT_k adalah TO_{jk}. Perhatikan bahwa ΔTT_iO_{ij} dan ΔTT_kO_{jk} merupakan segitiga sebangun, karena $\angle TT_iO_{ij} = \angle TT_kO_{jk}$. Dalam hal ini ada dua kasus yang terjadi yaitu $\angle TT_iO_{ij}$ merupakan sudut yang menghadap busur yang sama dengan $\angle TT_kO_{jk}$, dan $\angle TT_iO_{ij}$ merupakan sudut pelurus dari sudut didepan sudut $\angle TT_kO_{jk}$. Selanjutnya $\angle TO_{ij}T_i = \angle TO_{jk}T_k$. Karena sebangun maka diperoleh

$$\frac{TT_i}{TT_k} = \frac{TO_{ij}}{TO_{jk}} = \frac{t_{ij}}{t_{jk}} \dots (1)$$

Terbukti.

Dengan menggunakan …(1) pilih $i = 1, j = 2, k = 4$ sehingga diperoleh

$$\frac{TT_1}{TT_4} = \frac{t_{12}}{t_{24}} \dots (2)$$

Dengan menggunakan …(1) pilih $i = 1, j = 3, k = 4$ sehingga diperoleh

$$\frac{TT_1}{TT_4} = \frac{t_{13}}{t_{34}} \dots (3)$$

Maka diperoleh

$$\frac{t_{12}}{t_{24}} = \frac{t_{13}}{t_{34}}$$

Terbukti.

9. Diketahui barisan bilangan bulat positif 7-angka $a_1, a_2, \cdots, a_{2017}$ dengan $a_1 < a_2, \cdots < a_{2017}$. Setiap suku barisan bilangan tersebut memiliki angka-angka penyusun tak naik. Diketahui $a_1 = 1000000$, dan a_{n+1} adalah bilangan terkecil yang mungkin lebih besar dari a_n. Sebagai contoh diperoleh $a_2 = 1100000$ dan $a_3 = 1110000$. Tentukan a_{2017}

Jawab:

Didefinisikan ka^n banyaknya bilangan yang memenuhi syarat di atas dengan n digit dengan satuan adalah k.

Perhatikan bahwa secara induktif diperoleh

Untuk bilangan 1 digit agar angka penyusun tidak ada yang naik bilangan-bilangan yang memenuhi adalah 1,2,3,…,9.

Untuk bilangan 2 digit agar angka penyusun tidak ada yang naik

$1a^2 = 1a^1 + 1 = 2$

$2a^2 = 1a^1 + 2a^1 + 1 = 3$

Apabila dilanjutkan kita peroleh sebanyak 4,5,6,7,8,9,10

Untuk bilangan 3 digit agar angka penyusun tidak ada yang naik

$1a^3 = 1a^2 + 1 = 3$

$2a^3 = 1a^2 + 2a^2 + 1 = 2 + 3 + 1 = 6$

Apabila kita lanjutkan diperoleh 10,15,21,28,36,45,55

Dengan cara yang sama

Untuk bilangan 4 digit agar angka penyusun tidak ada yang naik diperoleh

4,10,20,35,56,84,120,165,220

Untuk bilangan 5 digit agar angka penyusun tidak ada yang naik diperoleh

5,15,35,70,126,210,330,495,715

Untuk bilangan 6 digit agar angka penyusun tidak ada yang naik diperoleh

6,21,56,126,252,462,792,1287,2002

Untuk bilangan 7 digit agar angka penyusun tidak ada yang naik diperoleh

7,28,84,210,462,924, …

Banyaknya bilangan yang dimulai dari angka 1-6 ada sebanyak $7 + 28 + 84 + 210 + 462 + 924 = 1715$.
Sehingga kemungkinan a_{2017} dimulai dengan angka 7 yaitu suku ke $2017 - 1715 = 302$ bilangan yang dimulai dengan 7. Selanjutnya, bilangan yang dimulai dari
70 ada sebanyak 1 buah
71 ada sebanyak 6 buah
72 ada sebanyak 21 buah
73 ada sebanyak 56 buah
74 ada sebanyak 126 buah
Sehingga banyak kemungkinannya adalah $1 + 6 + 21 + 56 + 126 = 210$.
Sehingga a_{2017} dimulai dari angka 75 yaitu suku ke $2017 - 1715 - 210 = 92$.
Selanjutnya, Dengan cara yang sama diperoleh
750 ada sebanyak 1 buah
751 ada sebanyak 5 buah
752 ada sebanyak 15 buah
753 ada sebanyak 35 buah
Totalnya adalah 56
Sehingga a_{2017} dimulai dari 754 yaitu suku ke $2017 - 1715 - 210 - 56 = 36$.
Selanjutnya dengan cara yang sama diperoleh
7540 ada sebanyak 1 buah
7541 ada sebanyak 4 buah
7542 ada sebanyak 10 buah
7543 ada sebanyak 20 buah
Totalnya adalah 35
Sehingga a_{2017} dimulai dari 7544 yaitu suku ke $2017 - 1715 - 210 - 56 - 35 = 1$.
Sehingga $a_{2017} = 7544000$

10. Pada kilang minyak di daerah Duri, tersedia pompa-1 dan pompa-2. Kedua pompa tersebut digunakan untuk mengisi tangki penampungan dengan volume V. Tangki tersebut dapat diisi penuh menggunakan pompa-1 saja dalam waktu 4 jam, atau menggunakan pompa-2 saja dalam waktu 6 jam. Mula-mula kedua pompa digunakan secara bersama-sama dalam waktu a jam, kemudian dilanjutkan hanya menggunakan pompa-1 selama b jam dan dilanjutkan dengan pompa-2 selama c jam. Jika biaya operasional pompa-1 adalah $15(a+b)$ ribu per jam dan biaya operasional pompa-2 adalah $4(a+c)$ ribu per jam, tentukan b dan c agar biaya operasional seluruh pompa adalah minimum (nyatakan b dan c sebagai fungsi a). Tentukan juga nilai a yang mungkin.

Jawab:

Kecepatan pompa-1 adalah $\frac{V}{4}$ satuan volume setiap jam

Kecepatan pompa-2 adalah $\frac{V}{6}$ satuan volume setiap jam

Kecepatan pompa-1 dan pompa-2 adalah $\frac{V}{4}+\frac{V}{6}=\frac{5V}{12}$ satuan volume setiap jam

Kita memiliki persamaan

$$\frac{5aV}{12}+\frac{bV}{4}+\frac{cV}{6}=V$$

atau setara dengan

$$5a+3b+2c=12 \ldots (1)$$

Pompa-1 dan pompa-2 digunakan a jam sehingga dikenakan biaya

$$19a^2+15ba+4ca$$

Pompa-1 digunakan selama b jam sehingga dikenakan biaya

$$15ab+15b^2$$

Pompa-2 digunakan selama c jam sehingga dikenakan biaya

$$4ac+4c^2$$

Sehingga diperoleh total biaya

$$19a^2+15b^2+4c^2+30ab+8ac$$
$$15(a+b)^2+4(a+c)^2 \ldots (2)$$

Dari persamaan…(1) diperoleh

$$c=\frac{12-5a-3b}{2}$$

Sehingga diperoleh

$$15(a+b)^2+4\left(a+\frac{12-5a-3b}{2}\right)^2=15(a+b)^2+9(a+b-4)^2$$

Misalkan $a+b=p$, maka diperoleh

$$f(p)=15p^2+9p^2-72p+144$$
$$f(p)=24p^2-72p+144$$

Sehingga, biaya minimalnya terjadi pada saat

$$p=\frac{72}{48}=\frac{3}{2}$$

$$a + b = \frac{3}{2}$$

Dengan biaya minimal adalah $f\left(\frac{3}{2}\right) = 24\left(\frac{9}{4}\right) - 72\left(\frac{3}{2}\right) + 24 = 54 - 108 + 144 = 90.$ Sehingga, diperoleh minimumnya adalah

$$15(a + b)^2 + 4(a + c)^2 = 90$$

$$15\left(\frac{9}{4}\right) + 4(a + c)^2 = 90$$

$$4(a + c)^2 = 90 - \frac{135}{4}$$

$$(a + c)^2 = \frac{225}{16}$$

$$a + c = \frac{15}{4}$$

Sehingga diperoleh

$$b = \frac{3}{2} - a \text{ dan } c = \frac{15}{4} - a$$

Karena $b \geq 0$ dan $c \geq 0$, maka diperoleh

$$0 \leq a \leq \frac{3}{2} \cap 0 \leq a \leq \frac{15}{4} = 0 \leq a \leq \frac{3}{2}$$

Sehingga, nilai a yang memenuhi agar biaya minimal adalah $0 \leq a \leq \frac{3}{2}$