

Többváltozós statisztika elméleti alapjai (BMNPS07500M)

Készítette: Soltész-Várhelyi Klára

Statisztikai alapfogalmak

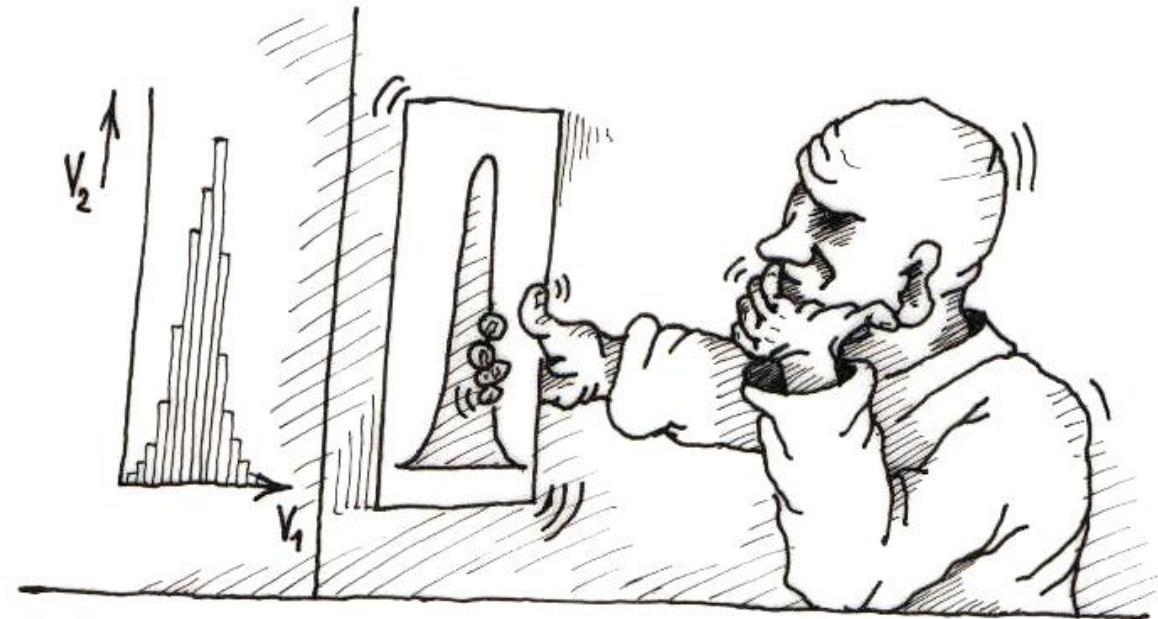
2. Eloszlásgörbék

Leíró és következtető statisztika

- **Leíró statisztika** (descriptive stats)
 - Célja a mért adathalmaz jellemzése, az rendelkezésre álló információ tömörítése
 - A mért mintát írja le, következtetéseket nem tartalmaz
- **Következtető statisztika** (inferential stats)
 - Célja a populációból választott mintából a populációra való (vissza)következtetés
 - Valószínűségekkel dolgozik
 - Fogalmak:
 - Eloszlások, és a hozzájuk tartozó valószínűségek
 - Konfidencia intervallumokról újra
 - Statisztikai modellek
 - Hipotézisvizsgálat, és ami ehhez kell: statisztikai értékek, hipotézis, szignifikancia, (hatásnagyság), elemszámbecslés, hiba becslése, hibák típusai
 - Bayes-i statisztika
- A kettő között nincs éles határ

Gyakoriság eloszlások

Honnan tudjuk egy érték valószínűségét?

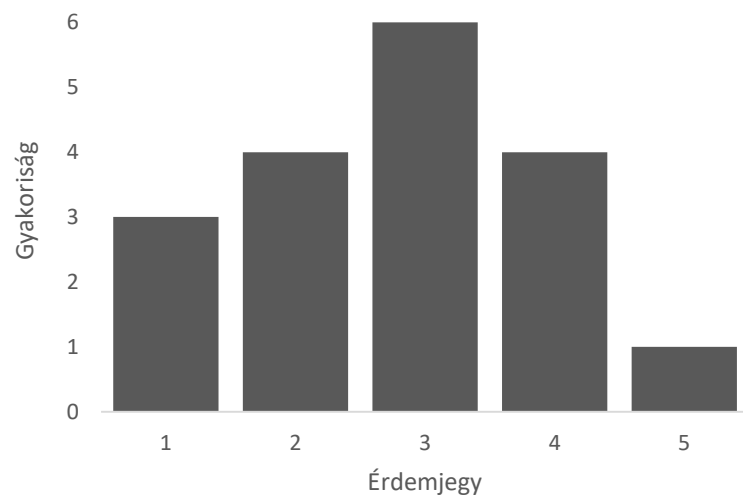


1998 G. Meixner

- Gyakoriság eloszlás, hisztogram

- Diszkrét változó esetében

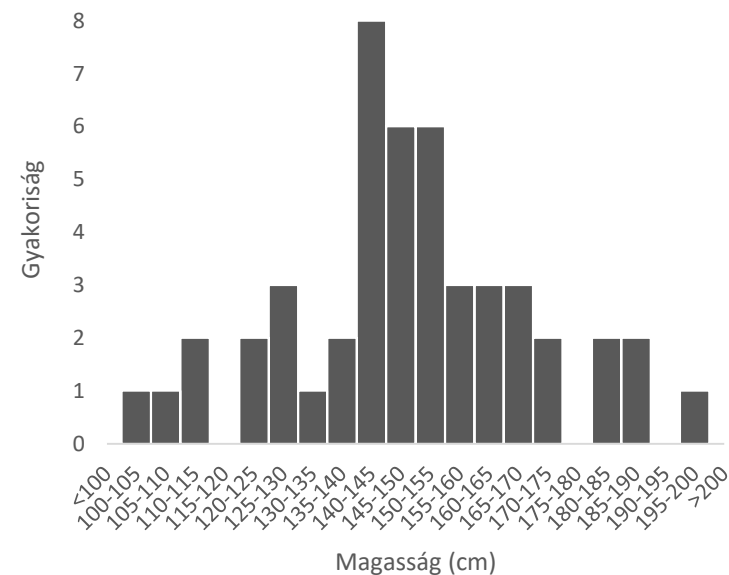
- A skála diszkrét értékeinek gyakorisága
- Az egyes értékek előfordulásának száma
- Például érdemjegyek



Érdemjegy	1	2	3	4	5
Gyakoriság	3	4	6	4	1

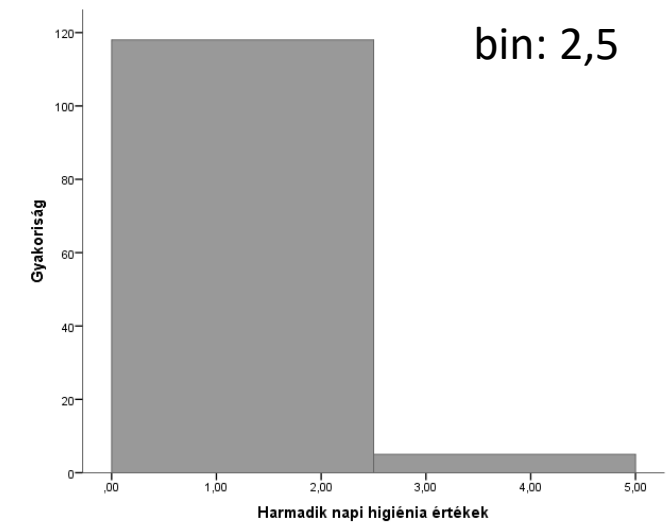
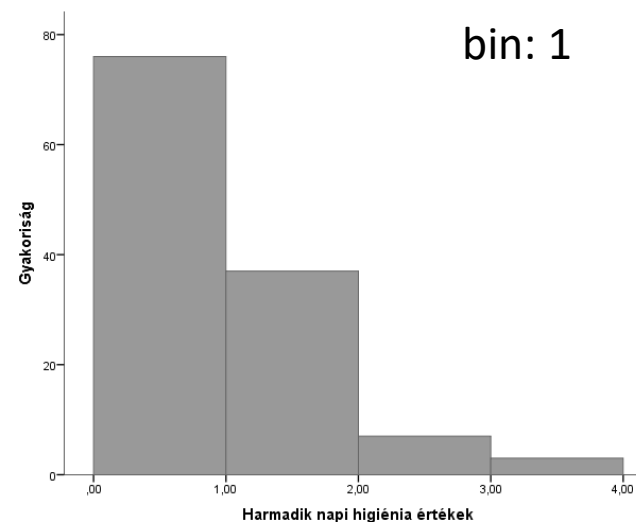
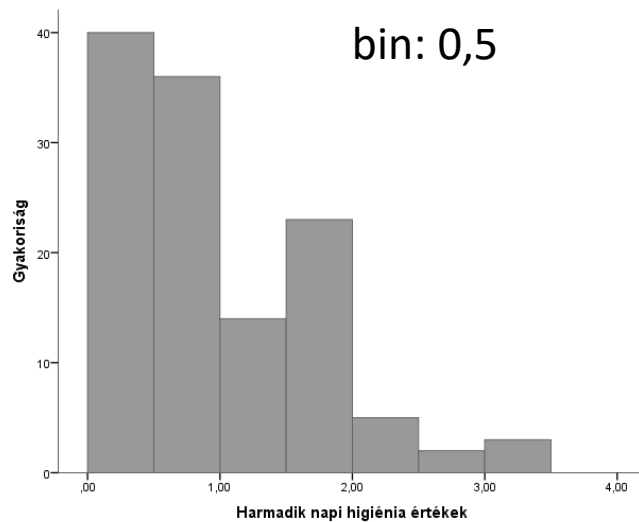
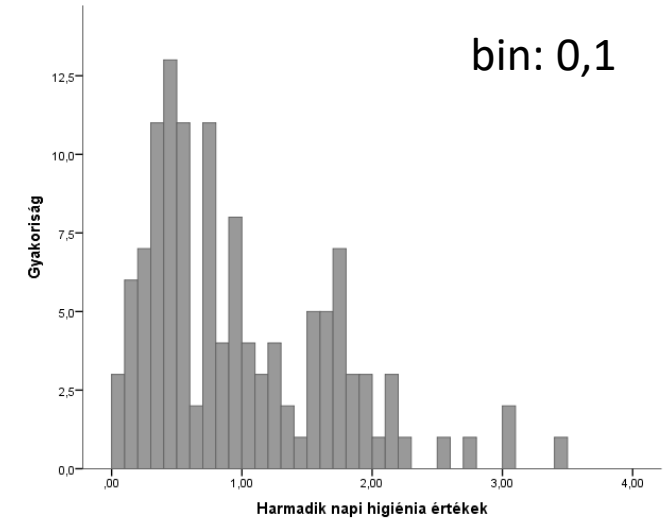
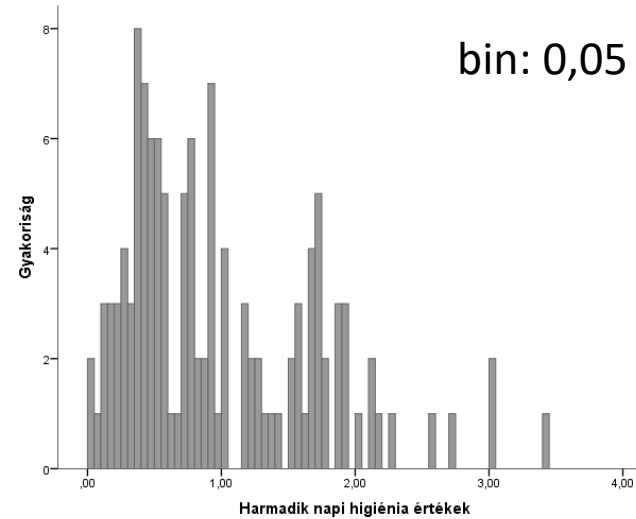
- Folytonos változó esetében

- A skálát egyforma széles intervallumokra bontva egy adott intervallumon belül eső értékek száma



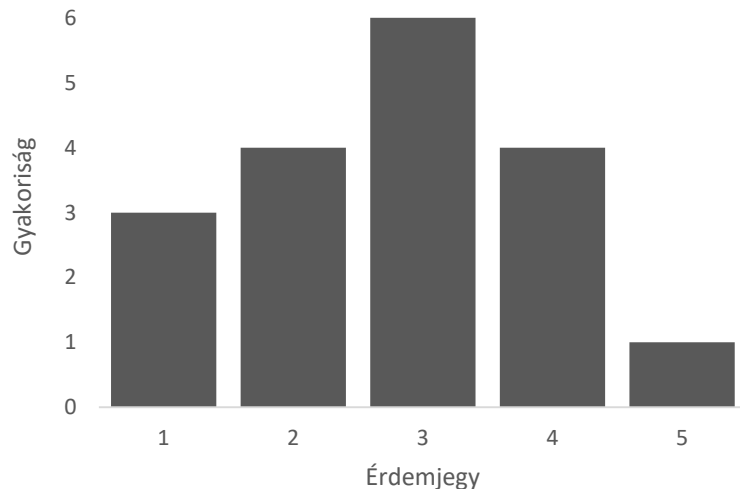
Hisztogram lépésközének jelentősége

A hisztogram ábrázolásánál mindig fontos az optimális lépésköz (részletesség) megtalálása.

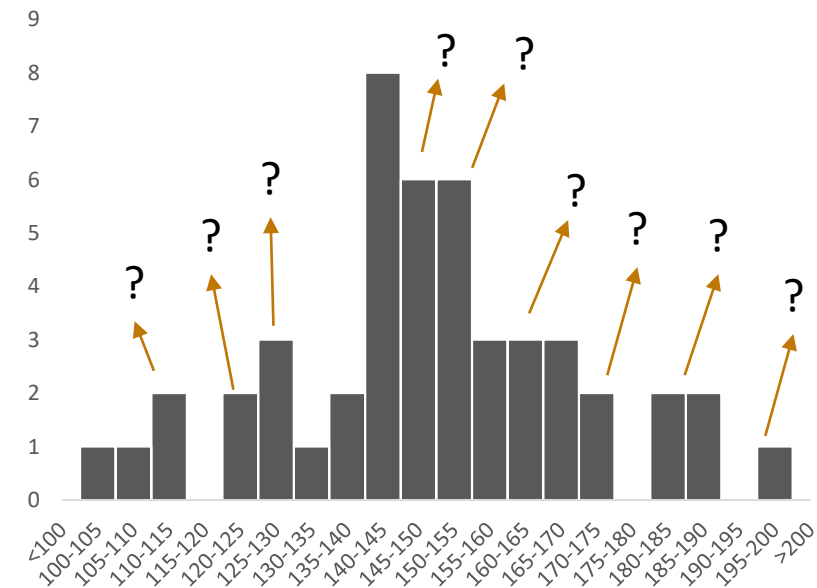


Nevezetes eloszlások és értékeik

- **?**: Az eddigi dolgozatok alapján mennyi a valószínűsége annak, hogy a következő dolgozat, amit kijavítok, négyes lesz?
- **V**: Ez könnyű: Az eddigi 18 emberből 4-nek lett négyese: a diákok 22%-a ír négyest.

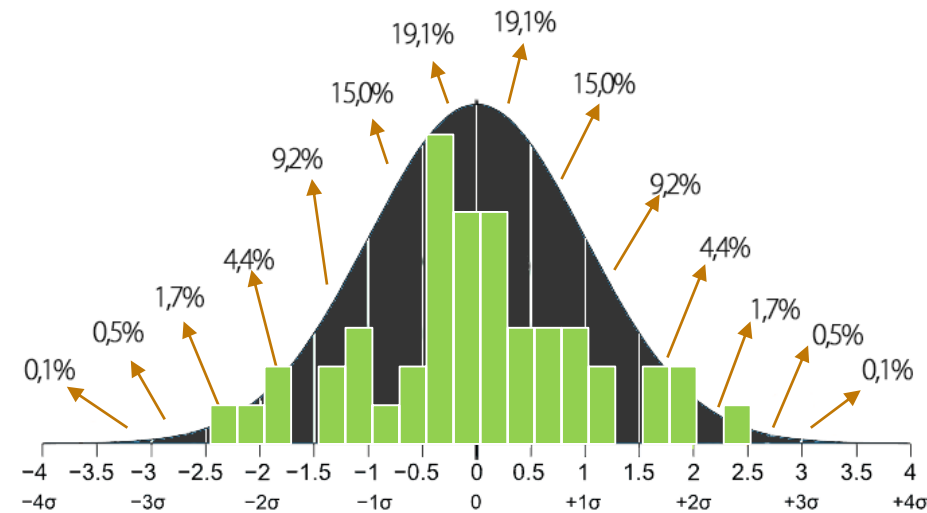
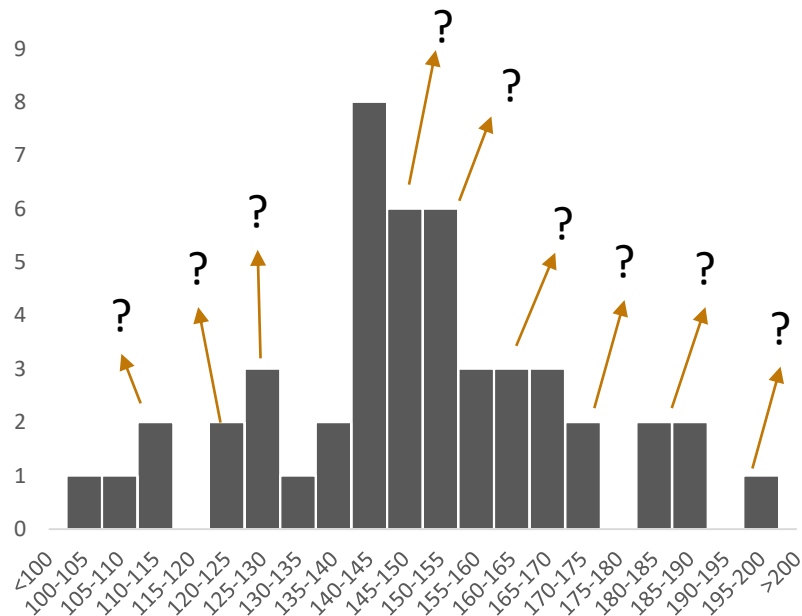


- **?**: Az eddigi magasság adatok alapján mennyi a valószínűsége annak, hogy a következő személy 170-180 cm között lesz?
- **V**: Bonyolultabb esetben (pl. folytonos változóknál), nehéz a valószínűségeket kiszámítani



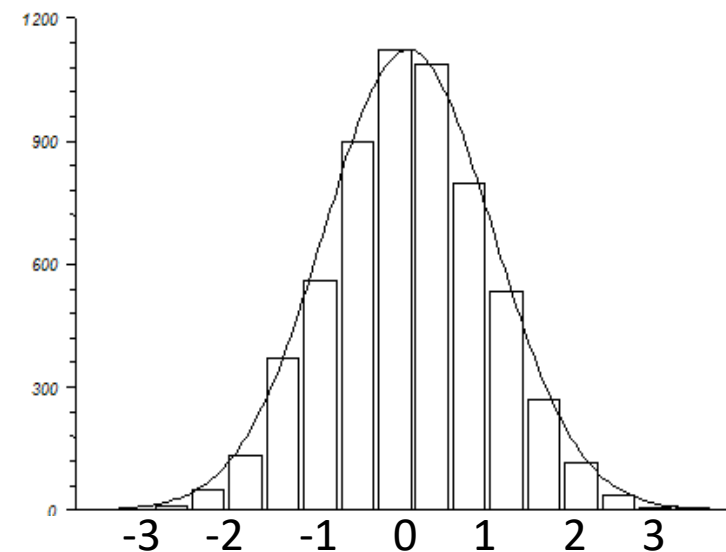
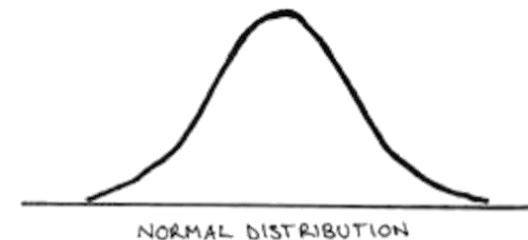
Nevezetes eloszlások és értékeik

- Bonyolultabb esetekre nehéz lenne kiszámolni a valószínűségeket.
 - Léteznek táblázatok nevezetes eloszlásokra, melyek megadják, hogy egy adott statisztikai értékhez (adott paraméterek esetén) milyen valószínűség tartozik.
 - Meg kell feleltetnünk a saját mért adatainkat egy nevezetes eloszlás statisztikai értékeinek, és az adott statisztikai értékhez tartozó valószínűséget fogjuk a mi adatainkhoz is feltételezni.
- Tanult eloszlások: **Normál eloszlás, t-eloszlás, F-eloszlás**



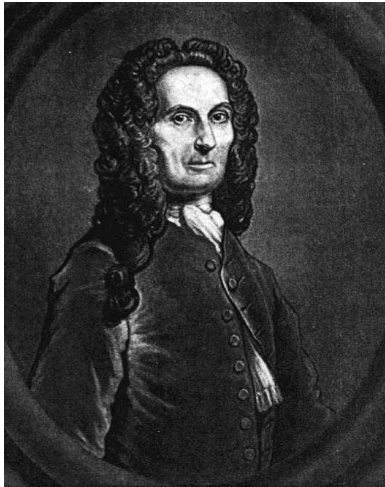
1. Normál eloszlás

- **Normál** vagy **Z** vagy **Gauss-eloszlás**
 - Tulajdonságai
 - **Folytonos** változók eloszlásának leírására alkalmas
 - **Unimodális** (egy csúcsú)
 - **Szimmetrikus** az átlag körül
 - **Haranggörbe alakú** – a legtöbb egyed az átlag körül helyezkedik el, majd ahogy távolodunk a középponttól, egyre kevesebb egyed van, aki az adott értéket felveszi.
 - Bár értéke az egész számegyenesen nézve soha nem csökken nullára, három szórás távolságra gyakorlatilag annak tekintetű
 - Statisztikai értéke a **z-érték**, mely **átlaga 0, szórása 1** (később)



Normál eloszlás

- A normál eloszlás a statisztikában gyakran használt eloszlás típus
 - A természet- és társadalomtudományokban vizsgált tulajdonságok nagy részének eloszlása jól leírható vele főként a central limit theorem miatt (következő dia)
 - A statisztikai próbák nagy része valamilyen szempontból feltételezi a normál eloszlást



Abraham de Moivre először tesz említést a normál eloszlásról és a central limit theoremről (1738)



Carl Friedrich Gauss vezeti be a normál eloszlás fogalmát, és adja meg matematikai jellemzőit (1809)

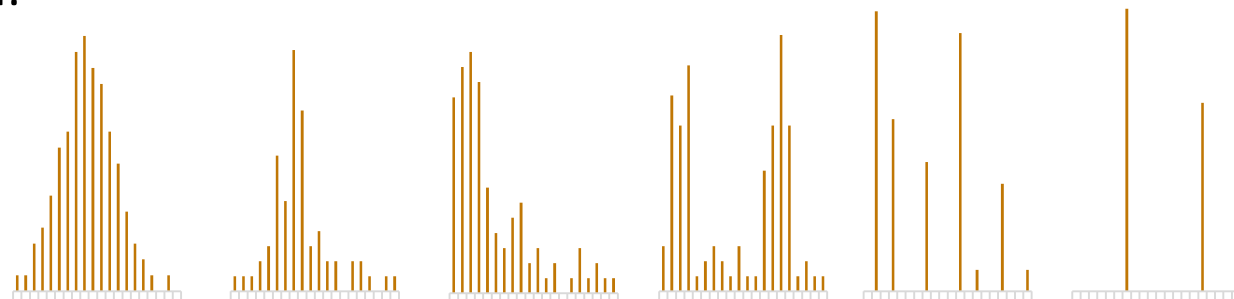


Pierre-Simon Laplace adja meg számítási módját, és bizonyítja a central limit theorem-et (1810)

Normál eloszlás és central limit theorem

- **Central limit theorem** vagy **központi határeloszlás tétel**

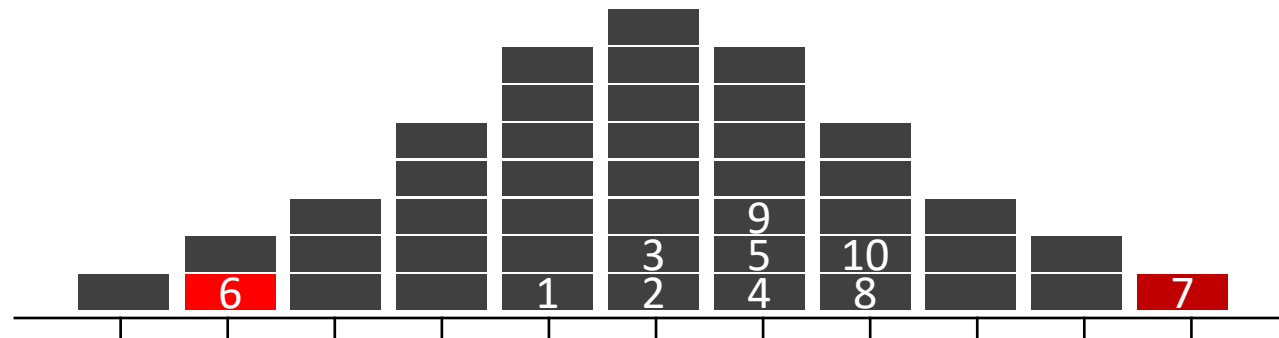
- Adott feltételek teljesülése esetén **kellően nagy számú egymástól független**, meghatározható átlaggal és szórással rendelkező **változó/minta számtani átlaga a populációban normál eloszláshoz közelít, függetlenül a változók eloszlásától.**
- Emberi nyelven: ha sok, elég nagy mintát veszünk egy akármilyen populációból, a mintaátlagok eloszlása normális lesz. (ez fontos a normalitás szempontjából & később visszatérünk rá)
- Másik fontos következmény: az olyan tulajdonságok, melyek sok tényező eredményeként jönnek létre, általában normál eloszlást követnek.
- Például a magasságot sok gén (kb. 60%) és sok környezeti faktor (kb. 40%) együttesen határozza meg. Függetlenül a gének és környezeti faktorok populációbeli előfordulásának eloszlásától, a gének és faktorok közös eredményeként előálló magasság megközelítőleg normál eloszlást fog követni.
- *HMGA2, GDF5-UQCC, PIK3R3, IGF1, IGF2*, protein, C-vitamin, D-vitamin, béta karotin, kalcium, higiénia
- Ezeknek a változóknak lehet nagyon más eloszlása: lehetnek normál eloszlásúak, csúcsosak, ferdek, multimodálisak, diszkrét, dichotómok...



Normál eloszlás és central limit theorem

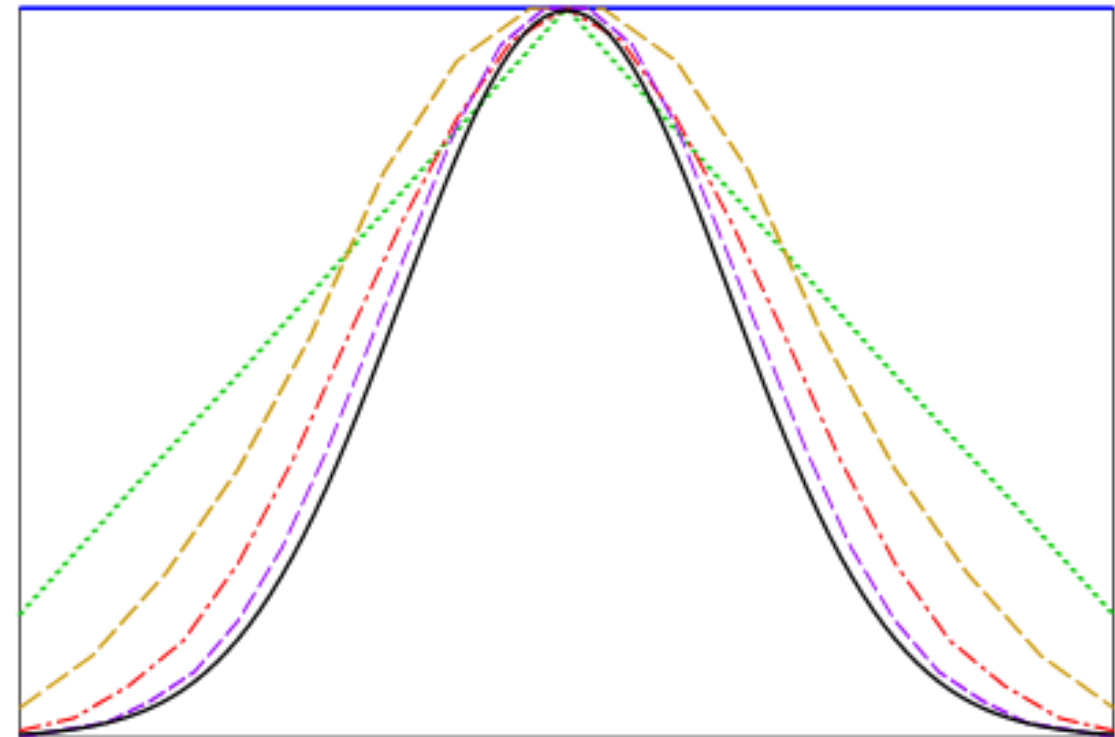
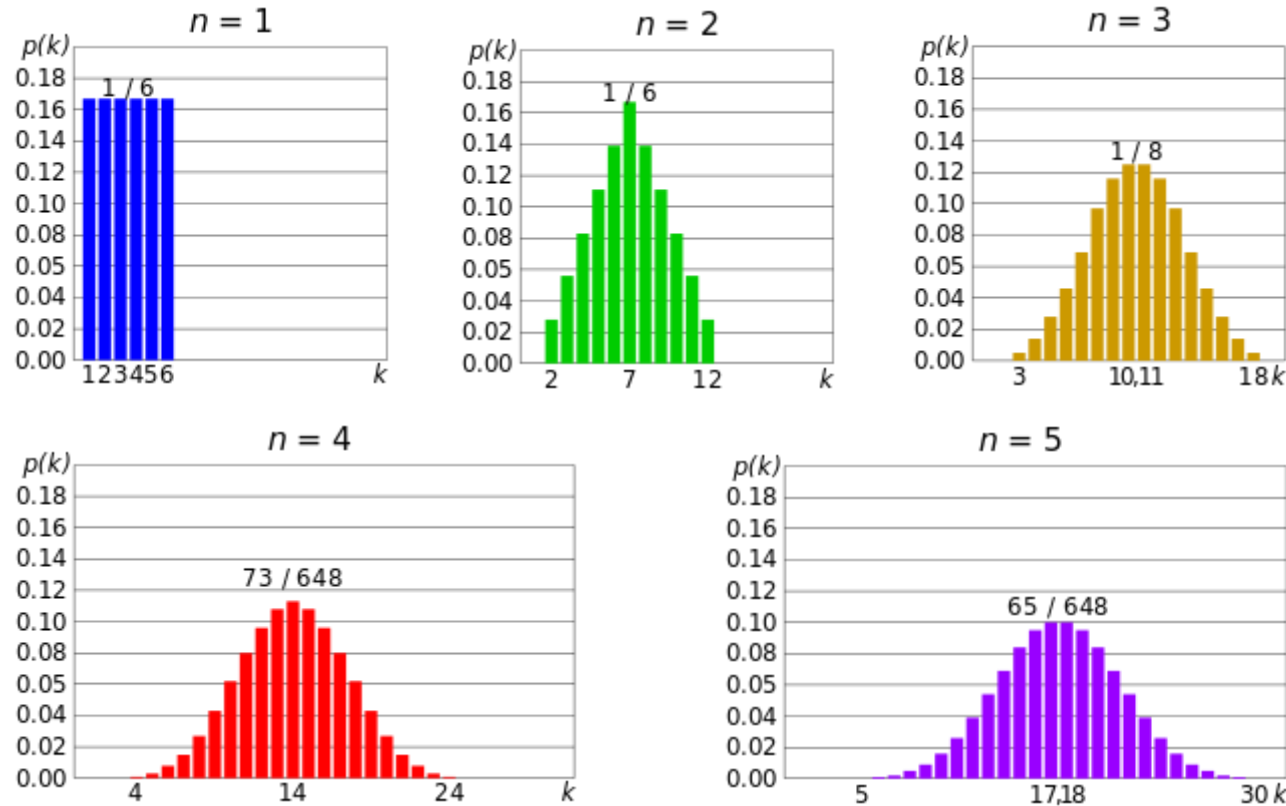
- A példa kedvéért egyszerűsítsünk a dolgokon, tegyük fel, hogy minden tulajdonság dichotóm (csak alacsony és magas variáns létezik belőle)
 - Középtájt elhelyezkedő értékek sokféle kombinációból kialakulhatnak, a szélsőségek nem: nagyon alacsony csak akkor lehet valaki, ha (majdnem) minden értéke alacsony)

	HMGA2	GDF5	PIK3R3	IGF1	IGF2	protein	C-vitamin	D-vitamin	B.-karotin	kalcium	higiénia
1	M	A	M	A	A	M	A	A	A	M	A
2	A	A	M	M	M	A	A	M	M	A	A
3	M	M	M	M	M	A	A	A	A	A	A
4	M	A	A	A	A	A	M	M	M	M	M
5	A	A	M	M	M	M	A	A	A	M	M
6	A	A	A	A	A	M	A	A	A	A	A
7	M	M	M	M	M	M	M	A	M	M	M
8	M	A	M	M	M	A	M	M	M	A	A
9	A	A	A	M	M	M	M	M	M	A	A
10	A	M	M	M	A	M	A	M	A	M	M



Normál eloszlás és central limit theorem

- Minél több elemből áll össze egy minta, annál inkább fog az elemek átlagának eloszlása a normál görbéhez közelíteni (szerencsére a pszichológiában mért dolgok általában soktényezősök)
 - Az alábbi példa 1, 2, 3, 4, 5 db dobókocka összegének eloszlását tartalmazza. Látható, hogy minél több a faktor (itt a dobókockák száma) annál inkább hasonlít az eloszlás a haranggörbe alakra.



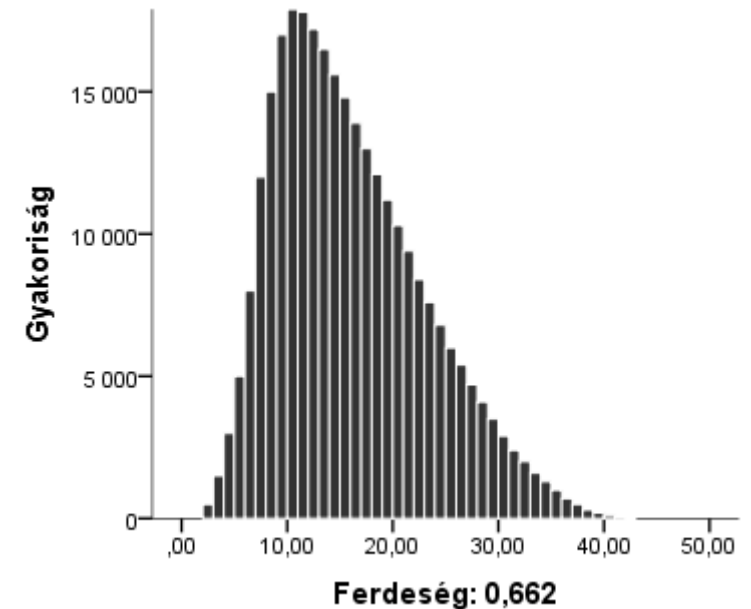
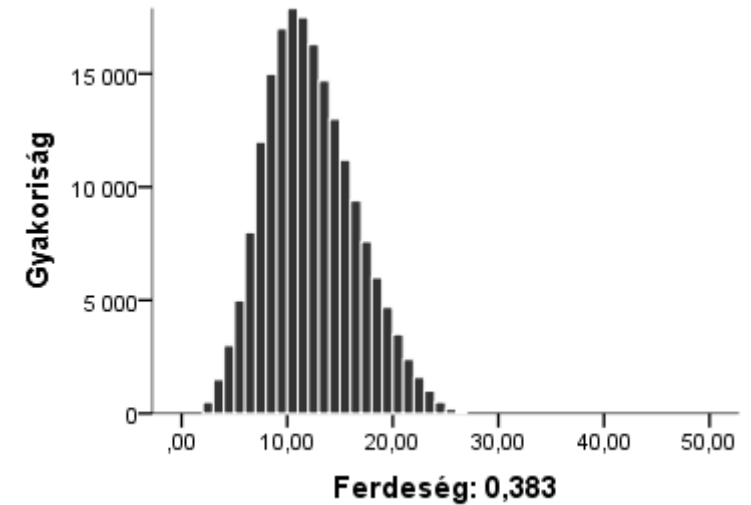
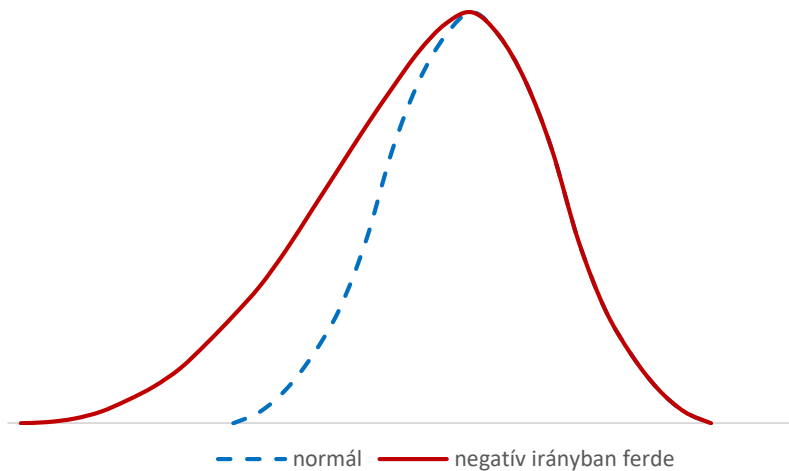
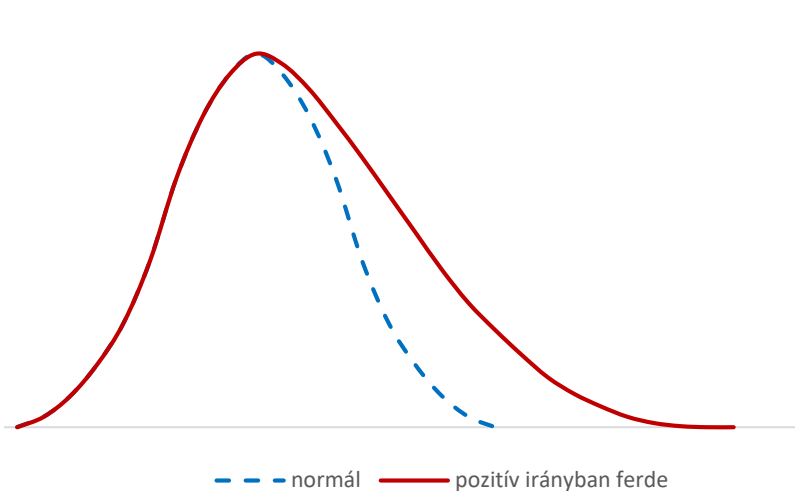
By Cmglee (Own work) CC BY-SA 3.0 via Wikimedia Commons

Normál eloszlás a valóságban



Eltérés a normál eloszlástól

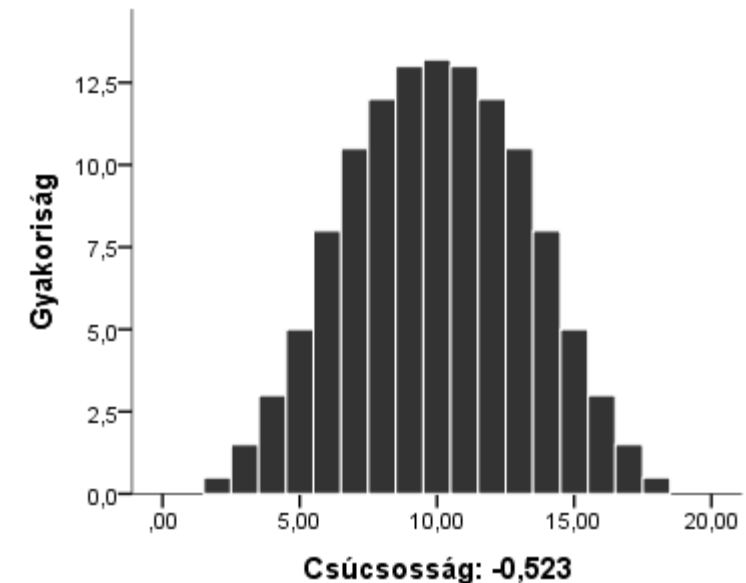
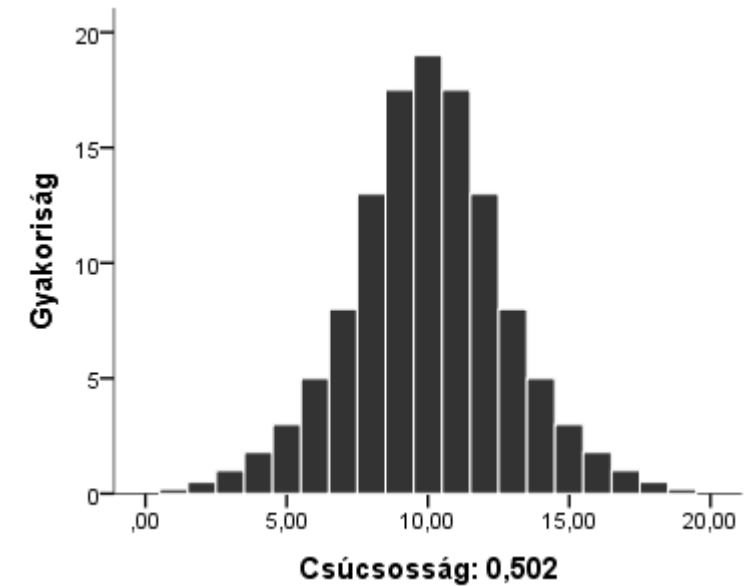
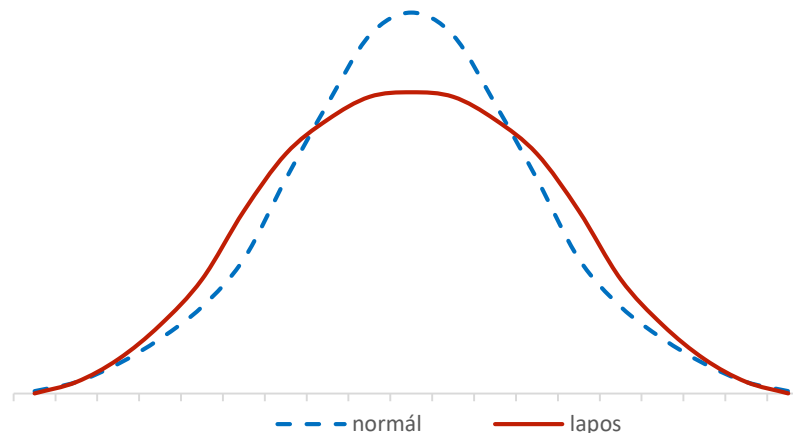
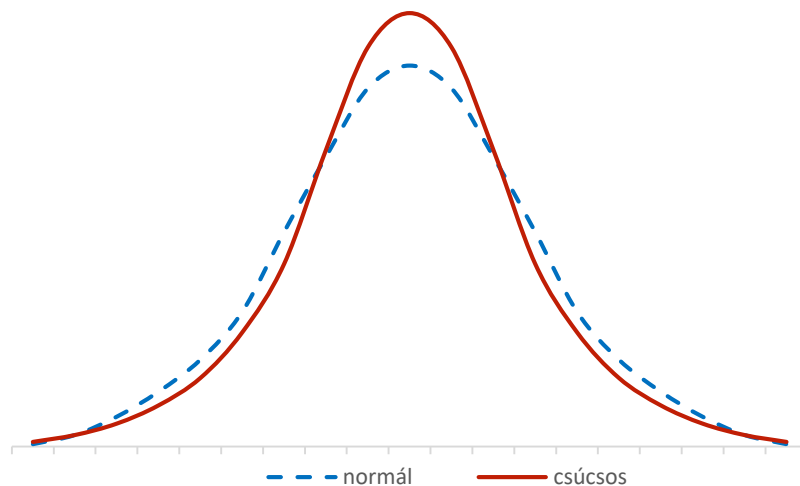
- Két fontos eltérés
 - Ferdeség (skewness) és csúcsosság (kurtosis)
- **Ferdeség:**
 - A normál eloszlás ferdesége 0 (szimmetrikus)
 - Pozitív ferdeség: az az eloszlásgörbe pozitív irányba nyúlik el
 - Negatív ferdeség: az eloszlásgörbe negatív irányba nyúlik el
 - Értéke az egész számegyenesen értelmezett, de ± 3 -at ritkán haladja meg



Eltérés a normál eloszlástól

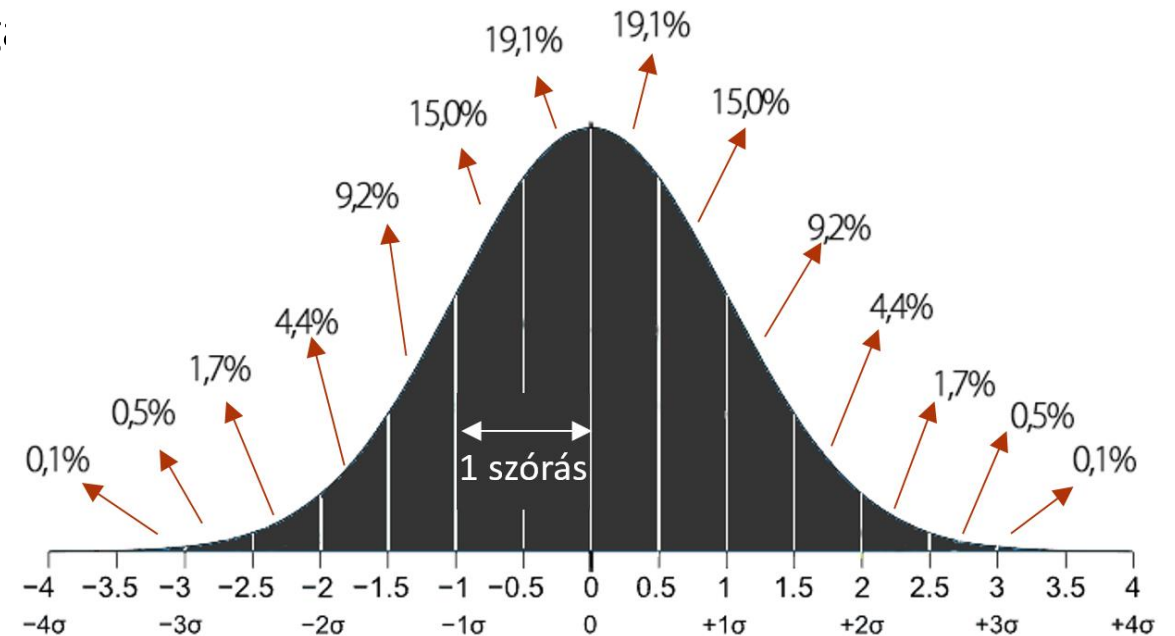
- **Csúcsosság:**

- A normál eloszlás csúcsossága 0
- Pozitív csúcsosság: az az eloszlásgörbe csúcsos
- Negatív csúcsosság: az eloszlásgörbe lapos
- Értéke az egész számegyenesen értelmezett, de ± 3 -at ritkán haladja meg
- Az eloszlásgörbe csúcsossága és a szórás között negatív összefüggés van: minél csúcsosabb az eloszlásgörbe, annál kisebb a minta szórása



Normál eloszlás – z-érték – valószínűségek

- A normál eloszlás egyes pontjaihoz, területeihez hozzá lehet rendelni az adott terület előfordulási valószínűségét, ezeket táblázatba foglalták.
 - Az **általános (standard) normál eloszlás** pontjait (az X-tengely értékeit) Z-értékeknek nevezzük
- **Z-érték, normál érték** vagy **standardizált érték**
 - Egy skálázatlan mérőszám, megadja, hogy a nyers pontszám hány szórásnyira van az átlagtól
 - $Z=0$: az a pont, amely az átlagtól 0 szórásnyira van, középen helyezkedik el (meg egyezik az átlaggal)
 - $Z=1$: az a pont, amely az átlagtól 1 szórásnyi távolságra van pozitív irányban
 - $Z=-1$: az a pont, amely az átlagtól 1 szórásnyi távolságra van negatív irányban
 - $Z=2$: az a pont, amely az átlagtól 2 szórásnyi távolságra van pozitív irányban (stb.)
 - **A Z-értékek átlaga=0 és szórása=1**



Felső sorban Z-értékek, alatta szórások

Negatív tartomány

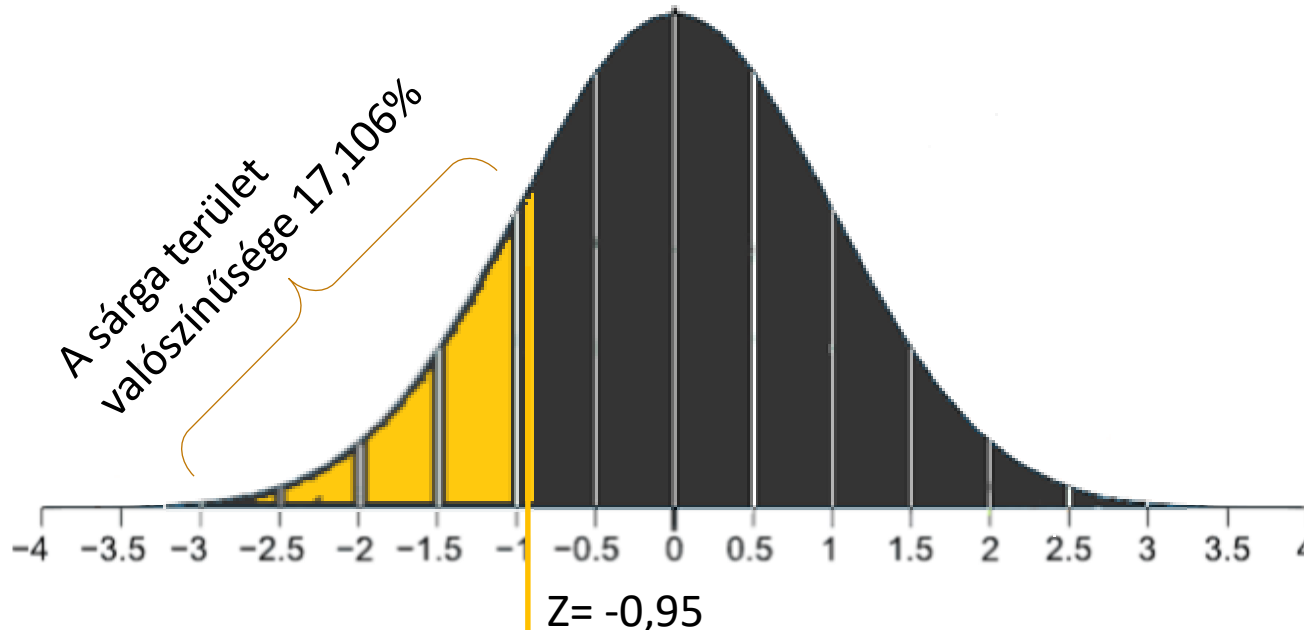
Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
-3.9	.00005	.00005	.00004	.00004	.00004	.00004	.00004	.00004	.00003	.00003
-3.8	.00007	.00007	.00007	.00006	.00006	.00006	.00006	.00005	.00005	.00005
-3.7	.00011	.00010	.00010	.00010	.00009	.00009	.00008	.00008	.00008	.00008
-3.6	.00016	.00015	.00015	.00014	.00014	.00013	.00013	.00012	.00012	.00011
-3.5	.00023	.00022	.00022	.00021	.00020	.00019	.00019	.00018	.00017	.00017
-3.4	.00034	.00032	.00031	.00030	.00029	.00028	.00027	.00026	.00025	.00024
-3.3	.00048	.00047	.00045	.00043	.00042	.00040	.00039	.00038	.00036	.00035
-3.2	.00069	.00066	.00064	.00062	.00060	.00058	.00056	.00054	.00052	.00050
-3.1	.00097	.00094	.00090	.00087	.00084	.00082	.00079	.00076	.00074	.00071
-3.0	.00135	.00131	.00126	.00122	.00118	.00114	.00111	.00107	.00104	.00100
-2.9	.00187	.00181	.00175	.00169	.00164	.00159	.00154	.00149	.00144	.00139
-2.8	.00256	.00248	.00240	.00233	.00226	.00219	.00212	.00205	.00199	.00193
-2.7	.00347	.00336	.00326	.00317	.00307	.00298	.00289	.00280	.00272	.00264
-2.6	.00466	.00453	.00440	.00427	.00415	.00402	.00391	.00379	.00368	.00357
-2.5	.00621	.00604	.00587	.00570	.00554	.00539	.00523	.00508	.00494	.00480
-2.4	.00820	.00798	.00776	.00755	.00734	.00714	.00695	.00676	.00657	.00639
-2.3	.01072	.01044	.01017	.00990	.00964	.00939	.00914	.00889	.00866	.00842
-2.2	.01390	.01355	.01321	.01287	.01255	.01222	.01191	.01160	.01130	.01101
-2.1	.01786	.01743	.01700	.01659	.01618	.01578	.01539	.01500	.01463	.01426
-2.0	.02275	.02222	.02169	.02118	.02068	.02018	.01970	.01923	.01876	.01831
-1.9	.02872	.02807	.02743	.02680	.02619	.02559	.02500	.02442	.02385	.02330
-1.8	.03593	.03515	.03438	.03362	.03288	.03216	.03144	.03074	.03005	.02938
-1.7	.04457	.04363	.04272	.04182	.04093	.04006	.03920	.03836	.03754	.03673
-1.6	.05480	.05370	.05262	.05155	.05050	.04947	.04846	.04746	.04648	.04551
-1.5	.06681	.06552	.06426	.06301	.06178	.06057	.05938	.05821	.05705	.05592
-1.4	.08076	.07927	.07780	.07636	.07493	.07353	.07215	.07078	.06944	.06811
-1.3	.09680	.09510	.09342	.09176	.09012	.08851	.08691	.08534	.08379	.08226
-1.2	.11507	.11314	.11123	.10935	.10749	.10565	.10383	.10204	.10027	.09853
-1.1	.13567	.13350	.13136	.12924	.12714	.12507	.12302	.12100	.11900	.11702
-1.0	.15866	.15625	.15386	.15151	.14917	.14686	.14457	.14231	.14007	.13786
-0.9	.18406	.18141	.17879	.17619	.17361	.17106	.16853	.16602	.16354	.16109
-0.8	.21186	.20897	.20611	.20327	.20045	.19766	.19489	.19215	.18943	.18673
-0.7	.24196	.23885	.23576	.23270	.22965	.22663	.22363	.22065	.21770	.21476
-0.6	.27425	.27093	.26763	.26435	.26109	.25785	.25463	.25143	.24825	.24510
-0.5	.30854	.30503	.30153	.29806	.29460	.29116	.28774	.28434	.28096	.27760
-0.4	.34458	.34090	.33724	.33360	.32997	.32636	.32276	.31918	.31561	.31207
-0.3	.38209	.37828	.37448	.37070	.36693	.36317	.35942	.35569	.35197	.34827
-0.2	.42074	.41683	.41294	.40905	.40517	.40129	.39743	.39358	.38974	.38591
-0.1	.46017	.45620	.45224	.44828	.44433	.44038	.43644	.43251	.42858	.42465
-0.0	.50000	.49601	.49202	.48803	.48405	.48006	.47608	.47210	.46812	.46414

Pozitív tartomány

Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.50000	.50399	.50798	.51197	.51595	.51994	.52392	.52790	.53188	.53586
0.1	.53983	.54380	.54776	.55172	.55567	.55962	.56356	.56749	.57142	.57535
0.2	.57926	.58317	.58706	.59095	.59483	.59871	.60257	.60642	.61026	.61409
0.3	.61791	.62172	.62552	.62930	.63307	.63683	.64058	.64431	.64803	.65173
0.4	.65542	.65910	.66276	.66640	.67003	.67364	.67724	.68082	.68439	.68793
0.5	.69146	.69497	.69847	.70194	.70540	.70884	.71226	.71566	.71904	.72240
0.6	.72575	.72907	.73237	.73565	.73891	.74215	.74537	.74857	.75175	.75490
0.7	.75804	.76115	.76424	.76730	.77035	.77337	.77637	.77935	.78230	.78524
0.8	.78814	.79103	.79389	.79673	.79955	.80234	.80511	.80785	.81057	.81327
0.9	.81594	.81859	.82121	.82381	.82639	.82894	.83147	.83398	.83646	.83891
1.0	.84134	.84375	.84614	.84849	.85083	.85314	.85543	.85769	.85993	.86214
1.1	.86433	.86650	.86864	.87076	.87286	.87493	.87698	.87900	.88100	.88298
1.2	.88493	.88686	.88877	.89065	.89251	.89435	.89617	.89796	.89973	.90147
1.3	.90320	.90490	.90658	.90824	.90988	.91149	.91309	.91466	.91621	.91774
1.4	.91924	.92073	.92220	.92364	.92507	.92647	.92785	.92922	.93056	.93189
1.5	.93319	.93448	.93574	.93699	.93822	.93943	.94062	.94179	.94295	.94408
1.6	.94520	.94630	.94738	.94845	.94950	.95053	.95154	.95254	.95352	.95449
1.7	.95543	.95637	.95728	.95818	.95907	.95994	.96080	.96164	.96246	.96327
1.8	.96407	.96485	.96562	.96638	.96712	.96784	.96856	.96926	.96995	.97062
1.9	.97128	.97193	.97257	.97320	.97381	.97441	.97500	.97558	.97615	.97670
2.0	.97725	.97778	.97831	.97882	.97932	.97982	.98030	.98077	.98124	.98169
2.1	.98214	.98257	.98300	.98341	.98382	.98422	.98461	.98500	.98537	.98574
2.2	.98610	.98645	.98679	.98713	.98745	.98778	.98809	.98840	.98870	.98899
2.3	.98928	.98956	.98983	.99010	.99036	.99061	.99086	.99111	.99134	.99158
2.4	.99180	.99202	.99224	.99245	.99266	.99286	.99305	.99324	.99343	.99361
2.5	.99379	.99396	.99413	.99430	.99446	.99461	.99477	.99492	.99506	.99520
2.6	.99534	.99547	.99560	.99573	.99585	.99598	.99609	.99621	.99632	.99643
2.7	.99653	.99664	.99674	.99683	.99693	.99702	.99711	.99720	.99728	.99736
2.8	.99744	.99752	.99760	.99767	.99774	.99781	.99788	.99795	.99801	.99807
2.9	.99813	.99819	.99825	.99831	.99836	.99841	.99846	.99851	.99856	.99861
3.0	.99865	.99869	.99874	.99878	.99882	.99886	.99889	.99893	.99896	.99900
3.1	.99903	.99906	.99910	.99913	.99916	.99918	.99921	.99924	.99926	.99929
3.2	.99931	.99934	.99936	.99938	.99940	.99942	.99944	.99946	.99948	.99950
3.3	.99952	.99953	.99955	.99957	.99958	.99960	.99961	.99962	.99964	.99965
3.4	.99966	.99968	.99969	.99970	.99971	.99972	.99973	.99974	.99975	.99976
3.5	.99977	.99978	.99978	.99979	.99980	.99981	.99981	.99982	.99983	.99983
3.6	.99984	.99985	.99985	.99986	.99986	.99987	.99987	.99988	.99988	.99989
3.7	.99989	.99990	.99990	.99990	.99991	.99991	.99992	.99992	.99992	.99992
3.8	.99993	.99993	.99993	.99994	.99994	.99994	.99994	.99995	.99995	.99995
3.9	.99995	.99995	.99996	.99996	.99996	.99996	.99996	.99996	.99997	.99997

Normál eloszlás – z-érték – valószínűségek

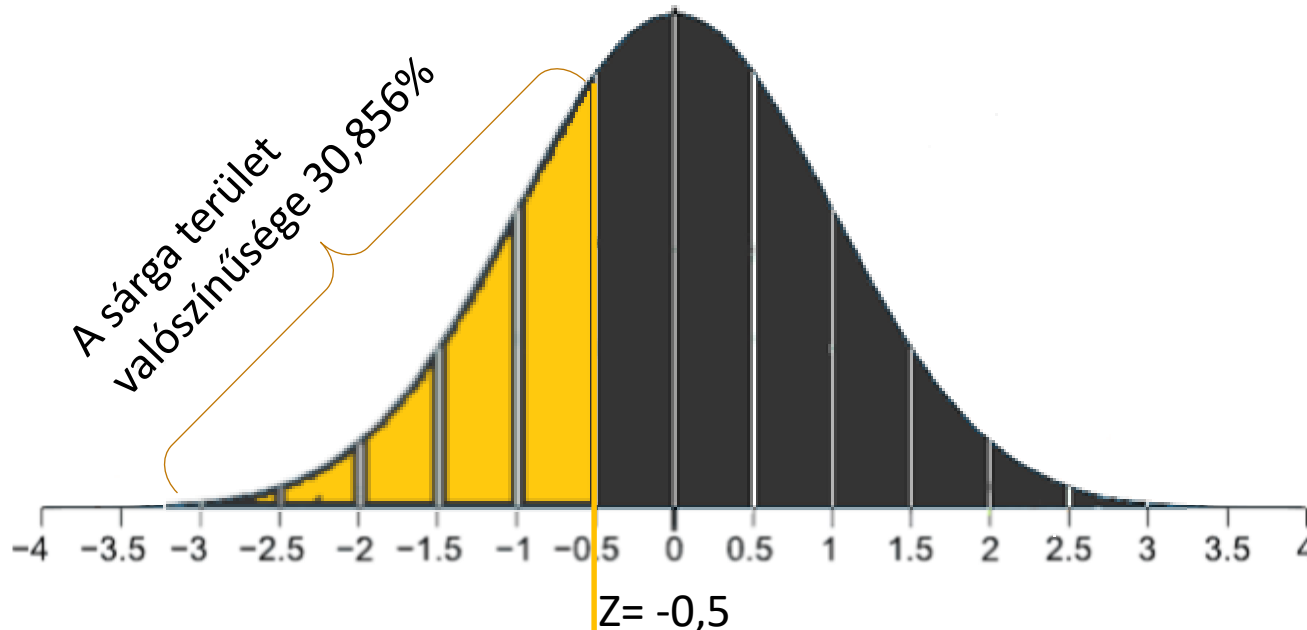
- Többfajta Z-tábla létezik, mi olyat használunk, mely az adott Z-értéktől BALRA lévő rész valószínűségét adja meg.
- A sorból kell kikeresni az első tizedes jegyig, az oszlopból a második tizedes jegyik a z-értéket.
- Pl.: A -0,95-ös z-értékhez 0,17106-ös (17,106%-os) valószínűség tartozik:
17,106%-nak van -0,95-nél alacsonyabb z-értéke



Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
-3.9	.00005	.00005	.00004	.00004	.00004	.00004	.00004	.00004	.00003	.00003
-3.8	.00007	.00007	.00007	.00006	.00006	.00006	.00006	.00005	.00005	.00005
-3.7	.00011	.00010	.00010	.00010	.00009	.00009	.00008	.00008	.00008	.00008
-3.6	.00016	.00015	.00015	.00014	.00014	.00013	.00013	.00012	.00012	.00011
-3.5	.00023	.00022	.00022	.00021	.00020	.00019	.00019	.00018	.00017	.00017
-3.4	.00034	.00032	.00031	.00030	.00029	.00028	.00027	.00026	.00025	.00024
-3.3	.00048	.00047	.00045	.00043	.00042	.00040	.00039	.00038	.00036	.00035
-3.2	.00069	.00066	.00064	.00062	.00060	.00058	.00056	.00054	.00052	.00050
-3.1	.00097	.00094	.00090	.00087	.00084	.00082	.00079	.00076	.00074	.00071
-3.0	.00135	.00131	.00126	.00122	.00118	.00114	.00111	.00107	.00104	.00100
-2.9	.00187	.00181	.00175	.00169	.00164	.00159	.00154	.00149	.00144	.00139
-2.8	.00256	.00248	.00240	.00233	.00226	.00219	.00212	.00205	.00199	.00193
-2.7	.00347	.00336	.00326	.00317	.00307	.00298	.00289	.00280	.00272	.00264
-2.6	.00466	.00453	.00440	.00427	.00415	.00402	.00391	.00379	.00368	.00357
-2.5	.00621	.00604	.00587	.00570	.00554	.00539	.00523	.00508	.00494	.00480
-2.4	.00820	.00798	.00776	.00755	.00734	.00714	.00695	.00676	.00657	.00639
-2.3	.01072	.01044	.01017	.00990	.00964	.00939	.00914	.00889	.00866	.00842
-2.2	.01390	.01355	.01321	.01287	.01255	.01222	.01191	.01160	.01130	.01101
-2.1	.01786	.01743	.01700	.01659	.01618	.01578	.01539	.01500	.01463	.01426
-2.0	.02275	.02222	.02169	.02118	.02068	.02018	.01970	.01923	.01876	.01831
-1.9	.02872	.02807	.02743	.02680	.02619	.02559	.02500	.02442	.02385	.02330
-1.8	.03593	.03515	.03438	.03362	.03288	.03216	.03144	.03074	.03005	.02938
-1.7	.04457	.04363	.04272	.04182	.04093	.04006	.03920	.03836	.03754	.03673
-1.6	.05480	.05370	.05262	.05155	.05050	.04947	.04846	.04746	.04648	.04551
-1.5	.06681	.06552	.06426	.06301	.06178	.06057	.05938	.05821	.05705	.05592
-1.4	.08076	.07927	.07780	.07636	.07493	.07353	.07215	.07078	.06944	.06811
-1.3	.09680	.09510	.09342	.09176	.09012	.08851	.08691	.08534	.08379	.08226
-1.2	.11507	.11314	.11123	.10935	.10749	.10565	.10383	.10204	.10027	.09853
-1.1	.13567	.13350	.13136	.12924	.12714	.12507	.12302	.12100	.11900	.11702
-1.0	.15866	.15625	.15386	.15151	.14917	.14686	.14457	.14231	.14007	.13786
-0.9	.18406	.18141	.17879	.17619	.17361	.17106	.16853	.16602	.16354	.16109
-0.8	.21186	.20897	.20611	.20327	.20045	.19766	.19489	.19215	.18943	.18673
-0.7	.24196	.23885	.23576	.23270	.22965	.22663	.22363	.22065	.21770	.21476
-0.6	.27425	.27093	.26763	.26435	.26109	.25785	.25463	.25143	.24825	.24510
-0.5	.30854	.30503	.30153	.29806	.29460	.29116	.28774	.28434	.28096	.27760
-0.4	.34458	.34090	.33724	.33360	.32997	.32636	.32276	.31918	.31561	.31207
-0.3	.38209	.37828	.37448	.37070	.36693	.36317	.35942	.35569	.35197	.34827
-0.2	.42074	.41683	.41294	.40905	.40517	.40129	.39743	.39358	.38974	.38591
-0.1	.46017	.45620	.45224	.44828	.44433	.44038	.43644	.43251	.42858	.42465
-0.0	.50000	.49601	.49202	.48803	.48405	.48006	.47608	.47210	.46812	.46414

Normál eloszlás – z-érték – valószínűségek

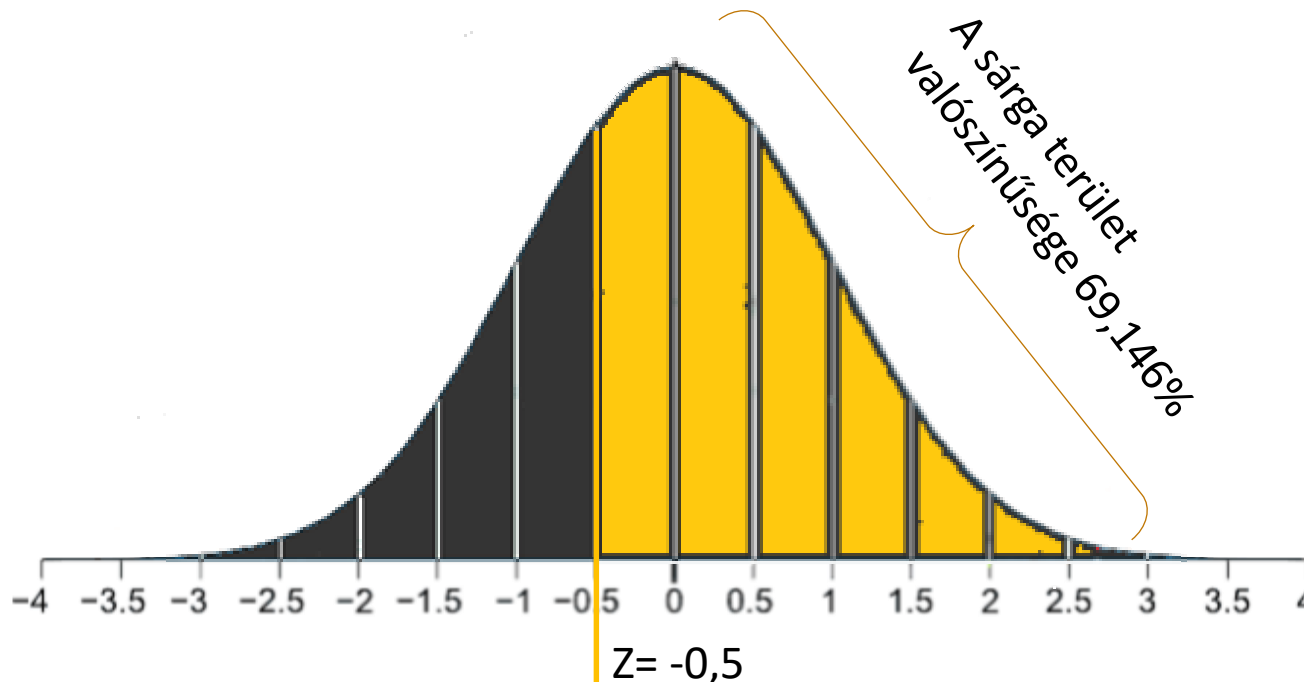
- Mennyi annak a valószínűsége, hogy valaki z-értéke -0,5 alatt van?
- A táblázatból kikeresve a -0,5 alatti rész valószínűsége 0,30854, azaz 30,854%



Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
-3.9	.00005	.00005	.00004	.00004	.00004	.00004	.00004	.00004	.00003	.00003
-3.8	.00007	.00007	.00007	.00006	.00006	.00006	.00006	.00005	.00005	.00005
-3.7	.00011	.00010	.00010	.00010	.00009	.00009	.00008	.00008	.00008	.00008
-3.6	.00016	.00015	.00015	.00014	.00014	.00013	.00013	.00012	.00012	.00011
-3.5	.00023	.00022	.00022	.00021	.00020	.00019	.00019	.00018	.00017	.00017
-3.4	.00034	.00032	.00031	.00030	.00029	.00028	.00027	.00026	.00025	.00024
-3.3	.00048	.00047	.00045	.00043	.00042	.00040	.00039	.00038	.00036	.00035
-3.2	.00069	.00066	.00064	.00062	.00060	.00058	.00056	.00054	.00052	.00050
-3.1	.00097	.00094	.00090	.00087	.00084	.00082	.00079	.00076	.00074	.00071
-3.0	.00135	.00131	.00126	.00122	.00118	.00114	.00111	.00107	.00104	.00100
-2.9	.00187	.00181	.00175	.00169	.00164	.00159	.00154	.00149	.00144	.00139
-2.8	.00256	.00248	.00240	.00233	.00226	.00219	.00212	.00205	.00199	.00193
-2.7	.00347	.00336	.00326	.00317	.00307	.00298	.00289	.00280	.00272	.00264
-2.6	.00466	.00453	.00440	.00427	.00415	.00402	.00391	.00379	.00368	.00357
-2.5	.00621	.00604	.00587	.00570	.00554	.00539	.00523	.00508	.00494	.00480
-2.4	.00820	.00798	.00776	.00755	.00734	.00714	.00695	.00676	.00657	.00639
-2.3	.01072	.01044	.01017	.00990	.00964	.00939	.00914	.00889	.00866	.00842
-2.2	.01390	.01355	.01321	.01287	.01255	.01222	.01191	.01160	.01130	.01101
-2.1	.01786	.01743	.01700	.01659	.01618	.01578	.01539	.01500	.01463	.01426
-2.0	.02275	.02222	.02169	.02118	.02068	.02018	.01970	.01923	.01876	.01831
-1.9	.02872	.02807	.02743	.02680	.02619	.02559	.02500	.02442	.02385	.02330
-1.8	.03593	.03515	.03438	.03362	.03288	.03216	.03144	.03074	.03005	.02938
-1.7	.04457	.04363	.04272	.04182	.04093	.04006	.03920	.03836	.03754	.03673
-1.6	.05480	.05370	.05262	.05155	.05050	.04947	.04846	.04746	.04648	.04551
-1.5	.06681	.06552	.06426	.06301	.06178	.06057	.05938	.05821	.05705	.05592
-1.4	.08076	.07927	.07780	.07636	.07493	.07353	.07215	.07078	.06944	.06811
-1.3	.09680	.09510	.09342	.09176	.09012	.08851	.08691	.08534	.08379	.08226
-1.2	.11507	.11314	.11123	.10935	.10749	.10565	.10383	.10204	.10027	.09853
-1.1	.13567	.13350	.13136	.12924	.12714	.12507	.12302	.12100	.11900	.11702
-1.0	.15866	.15625	.15386	.15151	.14917	.14686	.14457	.14231	.14007	.13786
-0.9	.18406	.18141	.17879	.17619	.17361	.17106	.16853	.16602	.16354	.16109
-0.8	.21186	.20897	.20611	.20327	.20045	.19766	.19489	.19215	.18943	.18673
-0.7	.24196	.23885	.23576	.23270	.22965	.22663	.22363	.22065	.21770	.21476
-0.6	.27425	.27093	.26763	.26435	.26109	.25785	.25463	.25143	.24825	.24510
-0.5	.30854	.30503	.30153	.29806	.29460	.29116	.28774	.28434	.28096	.27760
-0.4	.34458	.34090	.33724	.33360	.32997	.32636	.32276	.31918	.31561	.31207
-0.3	.38209	.37828	.37448	.37070	.36693	.36317	.35942	.35569	.35197	.34827
-0.2	.42074	.41683	.41294	.40905	.40517	.40129	.39743	.39358	.38974	.38591
-0.1	.46017	.45620	.45224	.44828	.44433	.44038	.43644	.43251	.42858	.42465
-0.0	.50000	.49601	.49202	.48803	.48405	.48006	.47608	.47210	.46812	.46414

Normál eloszlás – z-érték – valószínűségek

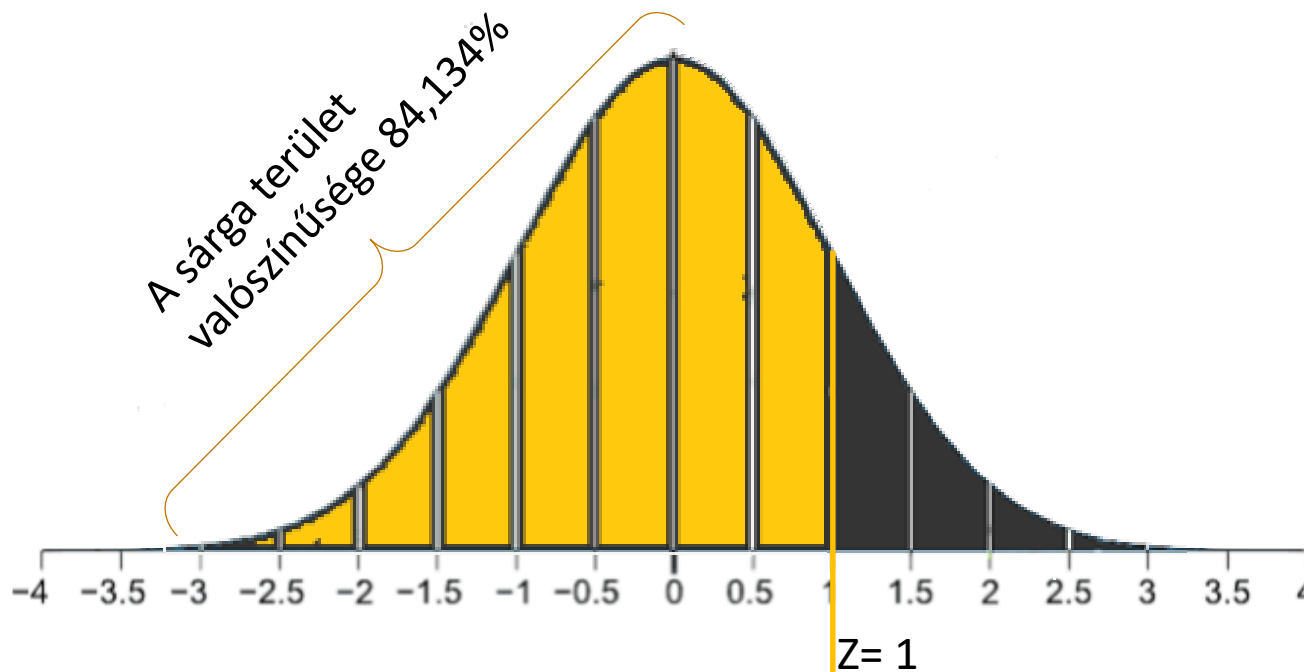
- Mennyi annak a valószínűsége, hogy valaki z-értéke -0,5 fölött van?
- Az előbb már láttuk, hogy a -0,5 alatti rész: 30,854%
- A teljes számegyenes 100%
- Tehát a -0,5 fölötti rész: $100\% - 30,854\% = 69,146\%$



Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
-3.9	.00005	.00005	.00004	.00004	.00004	.00004	.00004	.00004	.00003	.00003
-3.8	.00007	.00007	.00007	.00006	.00006	.00006	.00006	.00005	.00005	.00005
-3.7	.00011	.00010	.00010	.00010	.00009	.00009	.00008	.00008	.00008	.00008
-3.6	.00016	.00015	.00015	.00014	.00014	.00013	.00013	.00012	.00012	.00011
-3.5	.00023	.00022	.00022	.00021	.00020	.00019	.00019	.00018	.00017	.00017
-3.4	.00034	.00032	.00031	.00030	.00029	.00028	.00027	.00026	.00025	.00024
-3.3	.00048	.00047	.00045	.00043	.00042	.00040	.00039	.00038	.00036	.00035
-3.2	.00069	.00066	.00064	.00062	.00060	.00058	.00056	.00054	.00052	.00050
-3.1	.00097	.00094	.00090	.00087	.00084	.00082	.00079	.00076	.00074	.00071
-3.0	.00135	.00131	.00126	.00122	.00118	.00114	.00111	.00107	.00104	.00100
-2.9	.00187	.00181	.00175	.00169	.00164	.00159	.00154	.00149	.00144	.00139
-2.8	.00256	.00248	.00240	.00233	.00226	.00219	.00212	.00205	.00199	.00193
-2.7	.00347	.00336	.00326	.00317	.00307	.00298	.00289	.00280	.00272	.00264
-2.6	.00466	.00453	.00440	.00427	.00415	.00402	.00391	.00379	.00368	.00357
-2.5	.00621	.00604	.00587	.00570	.00554	.00539	.00523	.00508	.00494	.00480
-2.4	.00820	.00798	.00776	.00755	.00734	.00714	.00695	.00676	.00657	.00639
-2.3	.01072	.01044	.01017	.00990	.00964	.00939	.00914	.00889	.00866	.00842
-2.2	.01390	.01355	.01321	.01287	.01255	.01222	.01191	.01160	.01130	.01101
-2.1	.01786	.01743	.01700	.01659	.01618	.01578	.01539	.01500	.01463	.01426
-2.0	.02275	.02222	.02169	.02118	.02068	.02018	.01970	.01923	.01876	.01831
-1.9	.02872	.02807	.02743	.02680	.02619	.02559	.02500	.02442	.02385	.02330
-1.8	.03593	.03515	.03438	.03362	.03288	.03216	.03144	.03074	.03005	.02938
-1.7	.04457	.04363	.04272	.04182	.04093	.04006	.03920	.03836	.03754	.03673
-1.6	.05480	.05370	.05262	.05155	.05050	.04947	.04846	.04746	.04648	.04551
-1.5	.06681	.06552	.06426	.06301	.06178	.06057	.05938	.05821	.05705	.05592
-1.4	.08076	.07927	.07780	.07636	.07493	.07353	.07215	.07078	.06944	.06811
-1.3	.09680	.09510	.09342	.09176	.09012	.08851	.08691	.08534	.08379	.08226
-1.2	.11507	.11314	.11123	.10935	.10749	.10565	.10383	.10204	.10027	.09853
-1.1	.13567	.13350	.13136	.12924	.12714	.12507	.12302	.12100	.11900	.11702
-1.0	.15866	.15625	.15386	.15151	.14917	.14686	.14457	.14231	.14007	.13786
-0.9	.18406	.18141	.17879	.17619	.17361	.17106	.16853	.16602	.16354	.16109
-0.8	.21186	.20897	.20611	.20327	.20045	.19766	.19489	.19215	.18943	.18673
-0.7	.24196	.23885	.23576	.23270	.22965	.22663	.22363	.22065	.21770	.21476
-0.6	.27425	.27093	.26763	.26435	.26109	.25785	.25463	.25143	.24825	.24510
-0.5	.30854	.30503	.30153	.29806	.29460	.29116	.28774	.28434	.28096	.27760
-0.4	.34458	.34090	.33724	.33360	.32997	.32636	.32276	.31918	.31561	.31207
-0.3	.38209	.37828	.37448	.37070	.36693	.36317	.35942	.35569	.35197	.34827
-0.2	.42074	.41683	.41294	.40905	.40517	.40129	.39743	.39358	.38974	.38591
-0.1	.46017	.45620	.45224	.44828	.44433	.44038	.43644	.43251	.42858	.42465
-0.0	.50000	.49601	.49202	.48803	.48405	.48006	.47608	.47210	.46812	.46414

Normál eloszlás – z-érték – valószínűségek

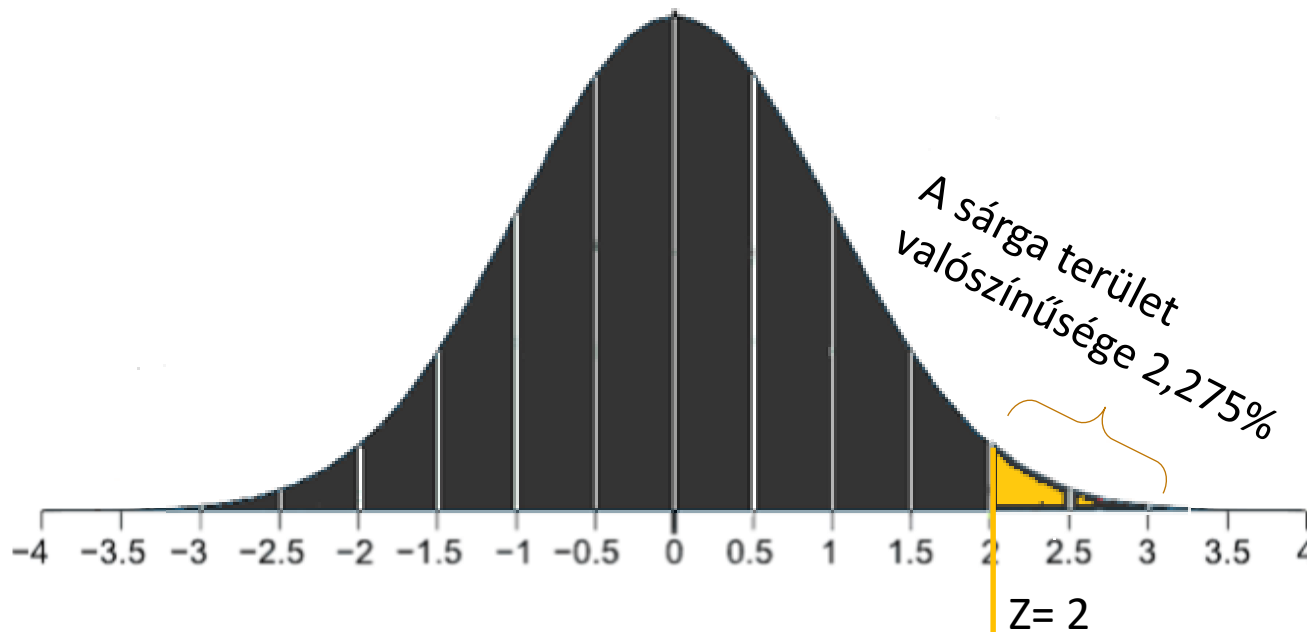
- Mennyi annak a valószínűsége, hogy valaki z-értéke 1 *alatt* van? (vedd észre, hogy kicseréltem a táblát a pozitív értékekhez valóra)
- 1-es Z-érték alatt 84,134% van



Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.50000	.50399	.50798	.51197	.51595	.51994	.52392	.52790	.53188	.53586
0.1	.53983	.54380	.54776	.55172	.55567	.55962	.56356	.56749	.57142	.57535
0.2	.57926	.58317	.58706	.59095	.59483	.59871	.60257	.60642	.61026	.61409
0.3	.61791	.62172	.62552	.62930	.63307	.63683	.64058	.64431	.64803	.65173
0.4	.65542	.65910	.66276	.66640	.67003	.67364	.67724	.68082	.68439	.68793
0.5	.69146	.69497	.69847	.70194	.70540	.70884	.71226	.71566	.71904	.72240
0.6	.72575	.72907	.73237	.73565	.73891	.74215	.74537	.74857	.75175	.75490
0.7	.75804	.76115	.76424	.76730	.77035	.77337	.77637	.77935	.78230	.78524
0.8	.78814	.79103	.79389	.79673	.79955	.80234	.80511	.80785	.81057	.81327
0.9	.81594	.81859	.82121	.82381	.82639	.82894	.83147	.83398	.83646	.83891
1.0	.84134	.84375	.84614	.84849	.85083	.85314	.85543	.85769	.85993	.86214
1.1	.86433	.86650	.86864	.87076	.87286	.87493	.87698	.87900	.88100	.88298
1.2	.88493	.88686	.88877	.89065	.89251	.89435	.89617	.89796	.89973	.90147
1.3	.90320	.90490	.90658	.90824	.90988	.91149	.91309	.91466	.91621	.91774
1.4	.91924	.92073	.92220	.92364	.92507	.92647	.92785	.92922	.93056	.93189
1.5	.93319	.93448	.93574	.93699	.93822	.93943	.94062	.94179	.94295	.94408
1.6	.94520	.94630	.94738	.94845	.94950	.95053	.95154	.95254	.95352	.95449
1.7	.95543	.95637	.95728	.95818	.95907	.95994	.96080	.96164	.96246	.96327
1.8	.96407	.96485	.96562	.96638	.96712	.96784	.96856	.96926	.96995	.97062
1.9	.97128	.97193	.97257	.97320	.97381	.97441	.97500	.97558	.97615	.97670
2.0	.97725	.97778	.97831	.97882	.97932	.97982	.98030	.98077	.98124	.98169
2.1	.98214	.98257	.98300	.98341	.98382	.98422	.98461	.98500	.98537	.98574
2.2	.98610	.98645	.98679	.98713	.98745	.98778	.98809	.98840	.98870	.98899
2.3	.98928	.98956	.98983	.99010	.99036	.99061	.99086	.99111	.99134	.99158
2.4	.99180	.99202	.99224	.99245	.99266	.99286	.99305	.99324	.99343	.99361
2.5	.99379	.99396	.99413	.99430	.99446	.99461	.99477	.99492	.99506	.99520
2.6	.99534	.99547	.99560	.99573	.99585	.99598	.99609	.99621	.99632	.99643
2.7	.99653	.99664	.99674	.99683	.99693	.99702	.99711	.99720	.99728	.99736
2.8	.99744	.99752	.99760	.99767	.99774	.99781	.99788	.99795	.99801	.99807
2.9	.99813	.99819	.99825	.99831	.99836	.99841	.99846	.99851	.99856	.99861
3.0	.99865	.99869	.99874	.99878	.99882	.99886	.99889	.99893	.99896	.99900
3.1	.99903	.99906	.99910	.99913	.99916	.99918	.99921	.99924	.99926	.99929
3.2	.99931	.99934	.99936	.99938	.99940	.99942	.99944	.99946	.99948	.99950
3.3	.99952	.99953	.99955	.99957	.99958	.99960	.99961	.99962	.99964	.99965
3.4	.99966	.99968	.99969	.99970	.99971	.99972	.99973	.99974	.99975	.99976
3.5	.99977	.99978	.99978	.99979	.99980	.99981	.99981	.99982	.99983	.99983
3.6	.99984	.99985	.99985	.99986	.99986	.99987	.99987	.99988	.99988	.99989
3.7	.99989	.99990	.99990	.99990	.99991	.99991	.99992	.99992	.99992	.99992
3.8	.99993	.99993	.99993	.99994	.99994	.99994	.99994	.99995	.99995	.99995
3.9	.99995	.99995	.99996	.99996	.99996	.99996	.99996	.99996	.99997	.99997

Normál eloszlás – z-érték – valószínűségek

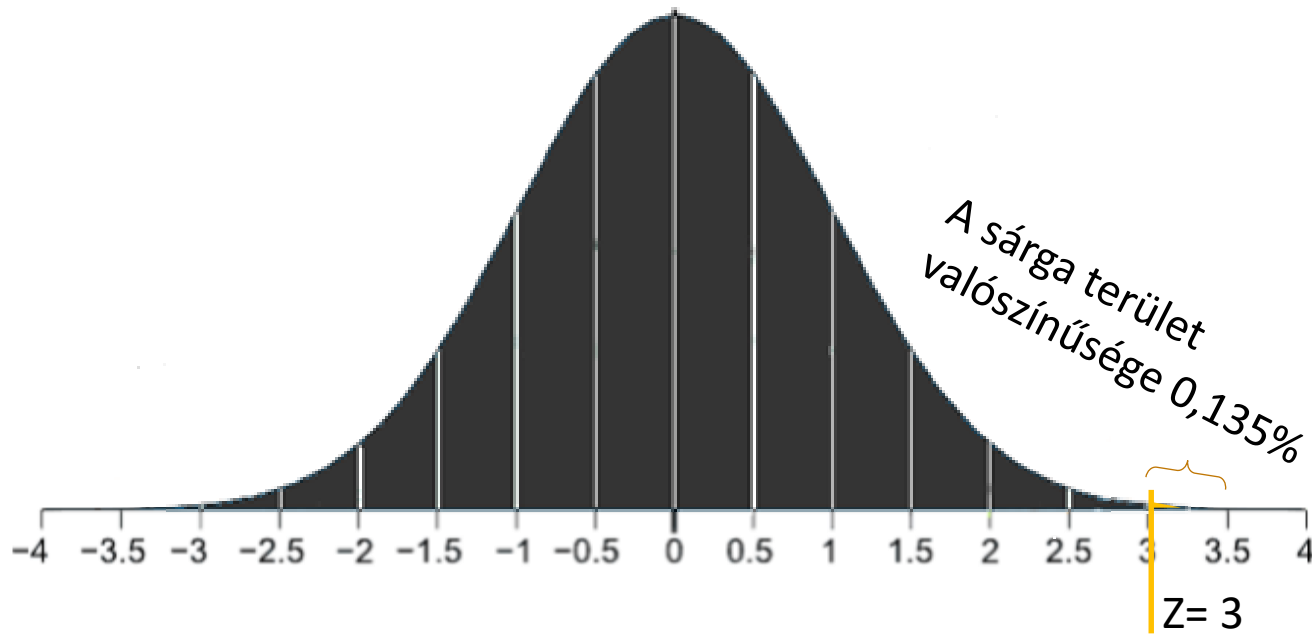
- Mennyi annak a valószínűsége, hogy valaki z-értéke *2 felett* van?
- 2-es Z-érték alatt 97,725% van, tehát 2-es felett $100 - 97,725 = 2,275\%$
- Az egyedek alig több, mint 2%-a van az átlagtól két szórásnyival feljebb



Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.50000	.50399	.50798	.51197	.51595	.51994	.52392	.52790	.53188	.53586
0.1	.53983	.54380	.54776	.55172	.55567	.55962	.56356	.56749	.57142	.57535
0.2	.57926	.58317	.58706	.59095	.59483	.59871	.60257	.60642	.61026	.61409
0.3	.61791	.62172	.62552	.62930	.63307	.63683	.64058	.64431	.64803	.65173
0.4	.65542	.65910	.66276	.66640	.67003	.67364	.67724	.68082	.68439	.68793
0.5	.69146	.69497	.69847	.70194	.70540	.70884	.71226	.71566	.71904	.72240
0.6	.72575	.72907	.73237	.73565	.73891	.74215	.74537	.74857	.75175	.75490
0.7	.75804	.76115	.76424	.76730	.77035	.77337	.77637	.77935	.78230	.78524
0.8	.78814	.79103	.79389	.79673	.79955	.80234	.80511	.80785	.81057	.81327
0.9	.81594	.81859	.82121	.82381	.82639	.82894	.83147	.83398	.83646	.83891
1.0	.84134	.84375	.84614	.84849	.85083	.85314	.85543	.85769	.85993	.86214
1.1	.86433	.86650	.86864	.87076	.87286	.87493	.87698	.87900	.88100	.88298
1.2	.88493	.88686	.88877	.89065	.89251	.89435	.89617	.89796	.89973	.90147
1.3	.90320	.90490	.90658	.90824	.90988	.91149	.91309	.91466	.91621	.91774
1.4	.91924	.92073	.92220	.92364	.92507	.92647	.92785	.92922	.93056	.93189
1.5	.93319	.93448	.93574	.93699	.93822	.93943	.94062	.94179	.94295	.94408
1.6	.94520	.94630	.94738	.94845	.94950	.95053	.95154	.95254	.95352	.95449
1.7	.95543	.95637	.95728	.95818	.95907	.95994	.96080	.96164	.96246	.96327
1.8	.96407	.96485	.96562	.96638	.96712	.96784	.96856	.96926	.96995	.97062
1.9	.97128	.97193	.97257	.97320	.97381	.97441	.97500	.97558	.97615	.97670
2.0	.97725	.97778	.97831	.97882	.97932	.97982	.98030	.98077	.98124	.98169
2.1	.98214	.98257	.98300	.98341	.98382	.98422	.98461	.98500	.98537	.98574
2.2	.98610	.98645	.98679	.98713	.98745	.98778	.98809	.98840	.98870	.98899
2.3	.98928	.98956	.98983	.99010	.99036	.99061	.99086	.99111	.99134	.99158
2.4	.99180	.99202	.99224	.99245	.99266	.99286	.99305	.99324	.99343	.99361
2.5	.99379	.99396	.99413	.99430	.99446	.99461	.99477	.99492	.99506	.99520
2.6	.99534	.99547	.99560	.99573	.99585	.99598	.99609	.99621	.99632	.99643
2.7	.99653	.99664	.99674	.99683	.99693	.99702	.99711	.99720	.99728	.99736
2.8	.99744	.99752	.99760	.99767	.99774	.99781	.99788	.99795	.99801	.99807
2.9	.99813	.99819	.99825	.99831	.99836	.99841	.99846	.99851	.99856	.99861
3.0	.99865	.99869	.99874	.99878	.99882	.99886	.99889	.99893	.99896	.99900
3.1	.99903	.99906	.99910	.99913	.99916	.99918	.99921	.99924	.99926	.99929
3.2	.99931	.99934	.99936	.99938	.99940	.99942	.99944	.99946	.99948	.99950
3.3	.99952	.99953	.99955	.99957	.99958	.99960	.99961	.99962	.99964	.99965
3.4	.99966	.99968	.99969	.99970	.99971	.99972	.99973	.99974	.99975	.99976
3.5	.99977	.99978	.99978	.99979	.99980	.99981	.99981	.99982	.99983	.99983
3.6	.99984	.99985	.99985	.99986	.99986	.99987	.99987	.99988	.99988	.99989
3.7	.99989	.99990	.99990	.99990	.99991	.99991	.99992	.99992	.99992	.99992
3.8	.99993	.99993	.99993	.99994	.99994	.99994	.99994	.99995	.99995	.99995
3.9	.99995	.99995	.99996	.99996	.99996	.99996	.99996	.99996	.99997	.99997

Normál eloszlás – z-érték – valószínűségek

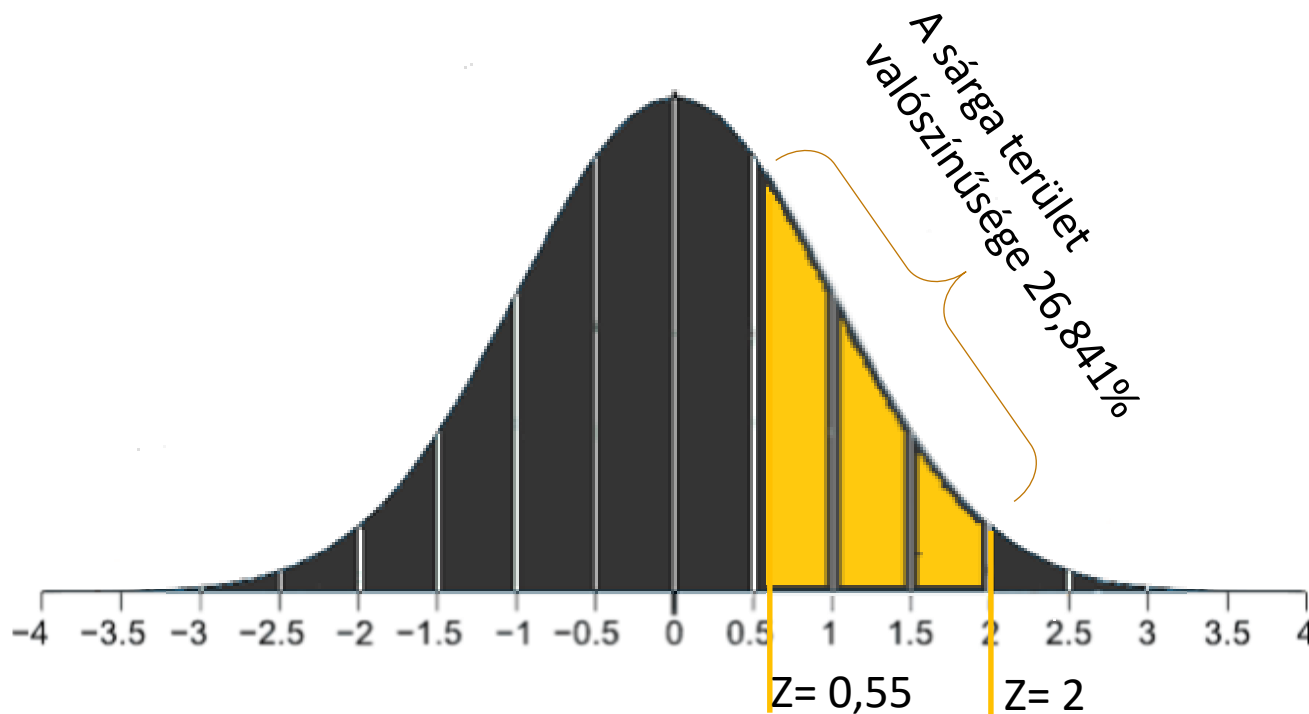
- Mennyi annak a valószínűsége, hogy valaki z-értéke *3 felett* van?
- 3-as Z-érték alatt 99,865% van, tehát 3-as felett $100 - 99,865 = 0,135\%$
- Az átlagtól három szórás távolságra (egy nem kisebb mintában) gyakorlatilag nem várunk egy embert se



Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.50000	.50399	.50798	.51197	.51595	.51994	.52392	.52790	.53188	.53586
0.1	.53983	.54380	.54776	.55172	.55567	.55962	.56356	.56749	.57142	.57535
0.2	.57926	.58317	.58706	.59095	.59483	.59871	.60257	.60642	.61026	.61409
0.3	.61791	.62172	.62552	.62930	.63307	.63683	.64058	.64431	.64803	.65173
0.4	.65542	.65910	.66276	.66640	.67003	.67364	.67724	.68082	.68439	.68793
0.5	.69146	.69497	.69847	.70194	.70540	.70884	.71226	.71566	.71904	.72240
0.6	.72575	.72907	.73237	.73565	.73891	.74215	.74537	.74857	.75175	.75490
0.7	.75804	.76115	.76424	.76730	.77035	.77337	.77637	.77935	.78230	.78524
0.8	.78814	.79103	.79389	.79673	.79955	.80234	.80511	.80785	.81057	.81327
0.9	.81594	.81859	.82121	.82381	.82639	.82894	.83147	.83398	.83646	.83891
1.0	.84134	.84375	.84614	.84849	.85083	.85314	.85543	.85769	.85993	.86214
1.1	.86433	.86650	.86864	.87076	.87286	.87493	.87698	.87900	.88100	.88298
1.2	.88493	.88686	.88877	.89065	.89251	.89435	.89617	.89796	.89973	.90147
1.3	.90320	.90490	.90658	.90824	.90988	.91149	.91309	.91466	.91621	.91774
1.4	.91924	.92073	.92220	.92364	.92507	.92647	.92785	.92922	.93056	.93189
1.5	.93319	.93448	.93574	.93699	.93822	.93943	.94062	.94179	.94295	.94408
1.6	.94520	.94630	.94738	.94845	.94950	.95053	.95154	.95254	.95352	.95449
1.7	.95543	.95637	.95728	.95818	.95907	.95994	.96080	.96164	.96246	.96327
1.8	.96407	.96485	.96562	.96638	.96712	.96784	.96856	.96926	.96995	.97062
1.9	.97128	.97193	.97257	.97320	.97381	.97441	.97500	.97558	.97615	.97670
2.0	.97725	.97778	.97831	.97882	.97932	.97982	.98030	.98077	.98124	.98169
2.1	.98214	.98257	.98300	.98341	.98382	.98422	.98461	.98500	.98537	.98574
2.2	.98610	.98645	.98679	.98713	.98745	.98778	.98809	.98840	.98870	.98899
2.3	.98928	.98956	.98983	.99010	.99036	.99061	.99086	.99111	.99134	.99158
2.4	.99180	.99202	.99224	.99245	.99266	.99286	.99305	.99324	.99343	.99361
2.5	.99379	.99396	.99413	.99430	.99446	.99461	.99477	.99492	.99506	.99520
2.6	.99534	.99547	.99560	.99573	.99585	.99598	.99609	.99621	.99632	.99643
2.7	.99653	.99664	.99674	.99683	.99693	.99702	.99711	.99720	.99728	.99736
2.8	.99744	.99752	.99760	.99767	.99774	.99781	.99788	.99795	.99801	.99807
2.9	.99813	.99819	.99825	.99831	.99836	.99841	.99846	.99851	.99856	.99861
3.0	.99865	.99869	.99874	.99878	.99882	.99886	.99889	.99893	.99896	.99900
3.1	.99903	.99906	.99910	.99913	.99916	.99918	.99921	.99924	.99926	.99929
3.2	.99931	.99934	.99936	.99938	.99940	.99942	.99944	.99946	.99948	.99950
3.3	.99952	.99953	.99955	.99957	.99958	.99960	.99961	.99962	.99964	.99965
3.4	.99966	.99968	.99969	.99970	.99971	.99972	.99973	.99974	.99975	.99976
3.5	.99977	.99978	.99978	.99979	.99980	.99981	.99981	.99982	.99983	.99983
3.6	.99984	.99985	.99985	.99986	.99986	.99987	.99987	.99988	.99988	.99989
3.7	.99989	.99990	.99990	.99990	.99991	.99991	.99992	.99992	.99992	.99992
3.8	.99993	.99993	.99993	.99994	.99994	.99994	.99994	.99995	.99995	.99995
3.9	.99995	.99995	.99996	.99996	.99996	.99996	.99996	.99996	.99997	.99997

Normál eloszlás – z-érték – valószínűségek

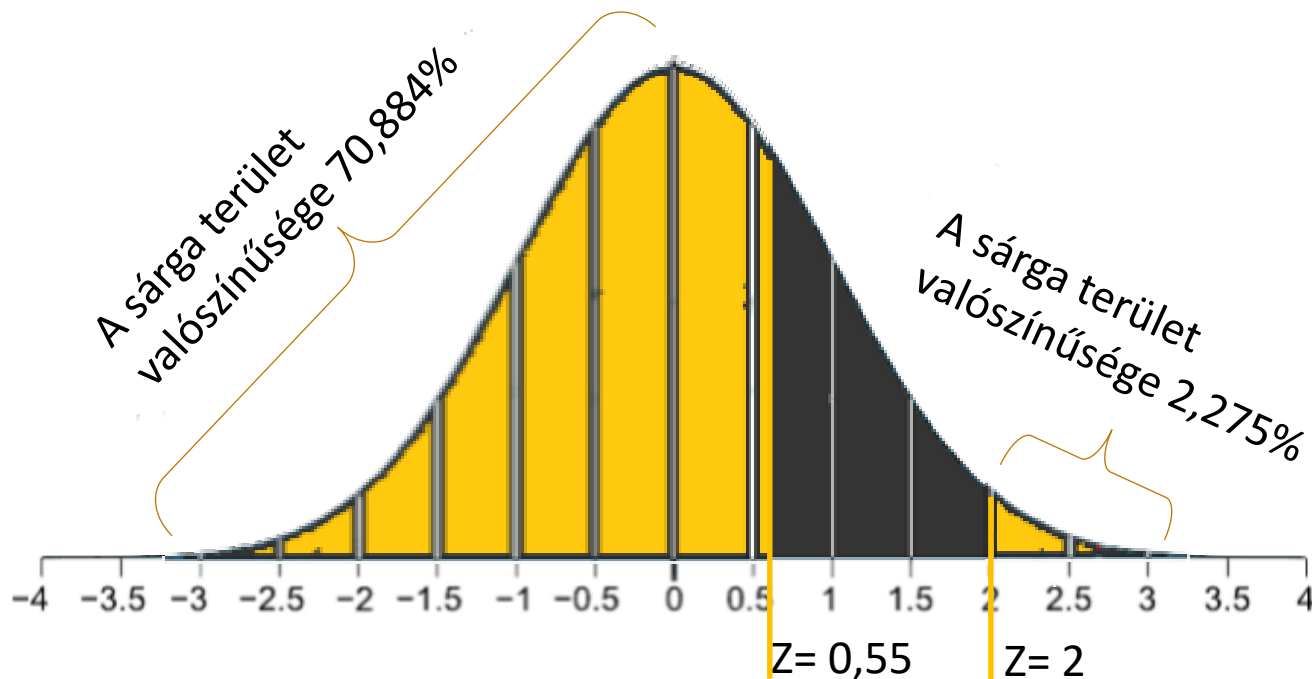
- Mennyi annak a valószínűsége, hogy valaki z-értéke 0,55 és 2 között van?
- 2-es Z-érték alatt 97,725% van, 0,55 alatt 70,884%
- Tehát a kettő között $97,725 - 70,884 = 26,841\%$



Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.50000	.50399	.50798	.51197	.51595	.51994	.52392	.52790	.53188	.53586
0.1	.53983	.54380	.54776	.55172	.55567	.55962	.56356	.56749	.57142	.57535
0.2	.57926	.58317	.58706	.59095	.59483	.59871	.60257	.60642	.61026	.61409
0.3	.61791	.62172	.62552	.62930	.63307	.63683	.64058	.64431	.64803	.65173
0.4	.65542	.65910	.66276	.66640	.67003	.67364	.67724	.68082	.68439	.68793
0.5	.69146	.69497	.69847	.70194	.70540	.70884	.71226	.71566	.71904	.72240
0.6	.72575	.72907	.73237	.73565	.73891	.74215	.74537	.74857	.75175	.75490
0.7	.75804	.76115	.76424	.76730	.77035	.77337	.77637	.77935	.78230	.78524
0.8	.78814	.79103	.79389	.79673	.79955	.80234	.80511	.80785	.81057	.81327
0.9	.81594	.81859	.82121	.82381	.82639	.82894	.83147	.83398	.83646	.83891
1.0	.84134	.84375	.84614	.84849	.85083	.85314	.85543	.85769	.85993	.86214
1.1	.86433	.86650	.86864	.87076	.87286	.87493	.87698	.87900	.88100	.88298
1.2	.88493	.88686	.88877	.89065	.89251	.89435	.89617	.89796	.89973	.90147
1.3	.90320	.90490	.90658	.90824	.90988	.91149	.91309	.91466	.91621	.91774
1.4	.91924	.92073	.92220	.92364	.92507	.92647	.92785	.92922	.93056	.93189
1.5	.93319	.93448	.93574	.93699	.93822	.93943	.94062	.94179	.94295	.94408
1.6	.94520	.94630	.94738	.94845	.94950	.95053	.95154	.95254	.95352	.95449
1.7	.95543	.95637	.95728	.95818	.95907	.95994	.96080	.96164	.96246	.96327
1.8	.96407	.96485	.96562	.96638	.96712	.96784	.96856	.96926	.96995	.97062
1.9	.97128	.97193	.97257	.97320	.97381	.97441	.97500	.97558	.97615	.97670
2.0	.97725	.97778	.97831	.97882	.97932	.97982	.98030	.98077	.98124	.98169
2.1	.98214	.98257	.98300	.98341	.98382	.98422	.98461	.98500	.98537	.98574
2.2	.98610	.98645	.98679	.98713	.98745	.98778	.98809	.98840	.98870	.98899
2.3	.98928	.98956	.98983	.99010	.99036	.99061	.99086	.99111	.99134	.99158
2.4	.99180	.99202	.99224	.99245	.99266	.99286	.99305	.99324	.99343	.99361
2.5	.99379	.99396	.99413	.99430	.99446	.99461	.99477	.99492	.99506	.99520
2.6	.99534	.99547	.99560	.99573	.99585	.99598	.99609	.99621	.99632	.99643
2.7	.99653	.99664	.99674	.99683	.99693	.99702	.99711	.99720	.99728	.99736
2.8	.99744	.99752	.99760	.99767	.99774	.99781	.99788	.99795	.99801	.99807
2.9	.99813	.99819	.99825	.99831	.99836	.99841	.99846	.99851	.99856	.99861
3.0	.99865	.99869	.99874	.99878	.99882	.99886	.99889	.99893	.99896	.99900
3.1	.99903	.99906	.99910	.99913	.99916	.99918	.99921	.99924	.99926	.99929
3.2	.99931	.99934	.99936	.99938	.99940	.99942	.99944	.99946	.99948	.99950
3.3	.99952	.99953	.99955	.99957	.99958	.99960	.99961	.99962	.99964	.99965
3.4	.99966	.99968	.99969	.99970	.99971	.99972	.99973	.99974	.99975	.99976
3.5	.99977	.99978	.99978	.99979	.99980	.99981	.99981	.99982	.99983	.99983
3.6	.99984	.99985	.99985	.99986	.99986	.99987	.99987	.99988	.99988	.99989
3.7	.99989	.99990	.99990	.99990	.99991	.99991	.99992	.99992	.99992	.99992
3.8	.99993	.99993	.99993	.99994	.99994	.99994	.99994	.99995	.99995	.99995
3.9	.99995	.99995	.99996	.99996	.99996	.99996	.99996	.99996	.99997	.99997

Normál eloszlás – z-érték – valószínűségek

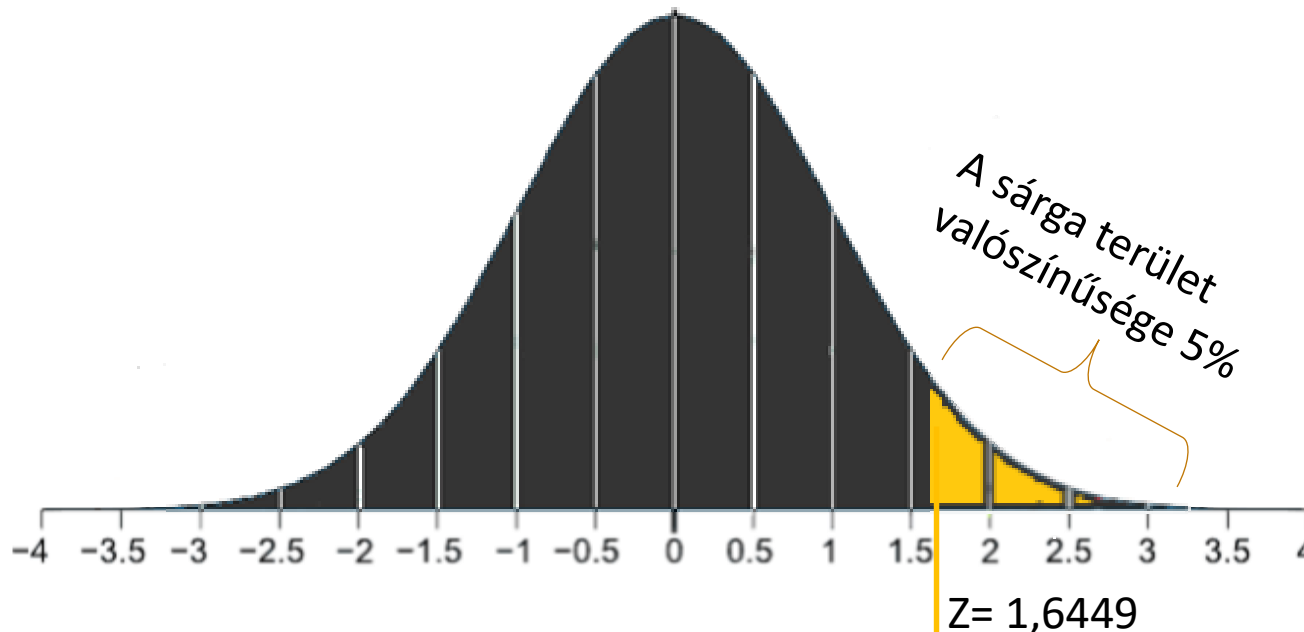
- Mennyi annak a valószínűsége, hogy valaki z-értéke a 0,55 és 2-es területen *kívül* van?
- 0,55 alatt 70,884% van, 2-es felett 2,275%
- Tehát a területen kívül $70,884 + 2,275\% = 73,159\%$



Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.50000	.50399	.50798	.51197	.51595	.51994	.52392	.52790	.53188	.53586
0.1	.53983	.54380	.54776	.55172	.55567	.55962	.56356	.56749	.57142	.57535
0.2	.57926	.58317	.58706	.59095	.59483	.59871	.60257	.60642	.61026	.61409
0.3	.61791	.62172	.62552	.62930	.63307	.63683	.64058	.64431	.64803	.65173
0.4	.65542	.65910	.66276	.66640	.67003	.67364	.67724	.68082	.68439	.68793
0.5	.69146	.69497	.69847	.70194	.70540	.70884	.71226	.71566	.71904	.72240
0.6	.72575	.72907	.73237	.73565	.73891	.74215	.74537	.74857	.75175	.75490
0.7	.75804	.76115	.76424	.76730	.77035	.77337	.77637	.77935	.78230	.78524
0.8	.78814	.79103	.79389	.79673	.79955	.80234	.80511	.80785	.81057	.81327
0.9	.81594	.81859	.82121	.82381	.82639	.82894	.83147	.83398	.83646	.83891
1.0	.84134	.84375	.84614	.84849	.85083	.85314	.85543	.85769	.85993	.86214
1.1	.86433	.86650	.86864	.87076	.87286	.87493	.87698	.87900	.88100	.88298
1.2	.88493	.88686	.88877	.89065	.89251	.89435	.89617	.89796	.89973	.90147
1.3	.90320	.90490	.90658	.90824	.90988	.91149	.91309	.91466	.91621	.91774
1.4	.91924	.92073	.92220	.92364	.92507	.92647	.92785	.92922	.93056	.93189
1.5	.93319	.93448	.93574	.93699	.93822	.93943	.94062	.94179	.94295	.94408
1.6	.94520	.94630	.94738	.94845	.94950	.95053	.95154	.95254	.95352	.95449
1.7	.95543	.95637	.95728	.95818	.95907	.95994	.96080	.96164	.96246	.96327
1.8	.96407	.96485	.96562	.96638	.96712	.96784	.96856	.96926	.96995	.97062
1.9	.97128	.97193	.97257	.97320	.97381	.97441	.97500	.97558	.97615	.97670
2.0	.97725	.97778	.97831	.97882	.97932	.97982	.98030	.98077	.98124	.98169
2.1	.98214	.98257	.98300	.98341	.98382	.98422	.98461	.98500	.98537	.98574
2.2	.98610	.98645	.98679	.98713	.98745	.98778	.98809	.98840	.98870	.98899
2.3	.98928	.98956	.98983	.99010	.99036	.99061	.99086	.99111	.99134	.99158
2.4	.99180	.99202	.99224	.99245	.99266	.99286	.99305	.99324	.99343	.99361
2.5	.99379	.99396	.99413	.99430	.99446	.99461	.99477	.99492	.99506	.99520
2.6	.99534	.99547	.99560	.99573	.99585	.99598	.99609	.99621	.99632	.99643
2.7	.99653	.99664	.99674	.99683	.99693	.99702	.99711	.99720	.99728	.99736
2.8	.99744	.99752	.99760	.99767	.99774	.99781	.99788	.99795	.99801	.99807
2.9	.99813	.99819	.99825	.99831	.99836	.99841	.99846	.99851	.99856	.99861
3.0	.99865	.99869	.99874	.99878	.99882	.99886	.99889	.99893	.99896	.99900
3.1	.99903	.99906	.99910	.99913	.99916	.99918	.99921	.99924	.99926	.99929
3.2	.99931	.99934	.99936	.99938	.99940	.99942	.99944	.99946	.99948	.99950
3.3	.99952	.99953	.99955	.99957	.99958	.99960	.99961	.99962	.99964	.99965
3.4	.99966	.99968	.99969	.99970	.99971	.99972	.99973	.99974	.99975	.99976
3.5	.99977	.99978	.99978	.99979	.99980	.99981	.99981	.99982	.99983	.99983
3.6	.99984	.99985	.99985	.99986	.99986	.99987	.99987	.99988	.99988	.99989
3.7	.99989	.99990	.99990	.99990	.99991	.99991	.99992	.99992	.99992	.99992
3.8	.99993	.99993	.99993	.99994	.99994	.99994	.99994	.99995	.99995	.99995
3.9	.99995	.99995	.99996	.99996	.99996	.99996	.99996	.99996	.99997	.99997

Normál eloszlás – z-érték – valószínűségek

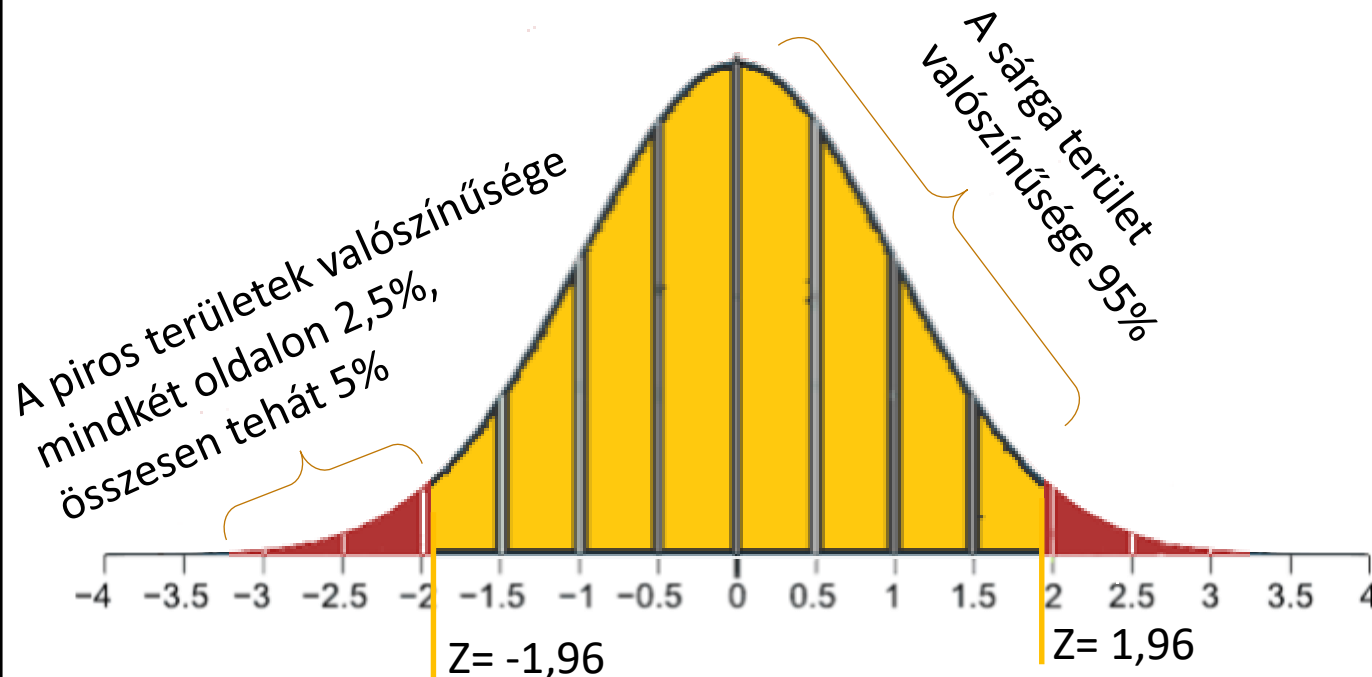
- Melyik Z-értékre igaz, hogy felette az emberek 5%-a várható?
- 5% van felette, tehát 95% van alatta.
- A táblázat nem elég pontos: a pontos Z-érték 1,6449
- Ez lesz a hipotézis teszteléshez használt 5%-os szignifikancia



Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.50000	.50399	.50798	.51197	.51595	.51994	.52392	.52790	.53188	.53586
0.1	.53983	.54380	.54776	.55172	.55567	.55962	.56356	.56749	.57142	.57535
0.2	.57926	.58317	.58706	.59095	.59483	.59871	.60257	.60642	.61026	.61409
0.3	.61791	.62172	.62552	.62930	.63307	.63683	.64058	.64431	.64803	.65173
0.4	.65542	.65910	.66276	.66640	.67003	.67364	.67724	.68082	.68439	.68793
0.5	.69146	.69497	.69847	.70194	.70540	.70884	.71226	.71566	.71904	.72240
0.6	.72575	.72907	.73237	.73565	.73891	.74215	.74537	.74857	.75175	.75490
0.7	.75804	.76115	.76424	.76730	.77035	.77337	.77637	.77935	.78230	.78524
0.8	.78814	.79103	.79389	.79673	.79955	.80234	.80511	.80785	.81057	.81327
0.9	.81594	.81859	.82121	.82381	.82639	.82894	.83147	.83398	.83646	.83891
1.0	.84134	.84375	.84614	.84849	.85083	.85314	.85543	.85769	.85993	.86214
1.1	.86433	.86650	.86864	.87076	.87286	.87493	.87698	.87900	.88100	.88298
1.2	.88493	.88686	.88877	.89065	.89251	.89435	.89617	.89796	.89973	.90147
1.3	.90320	.90490	.90658	.90824	.90988	.91149	.91309	.91466	.91621	.91774
1.4	.91924	.92073	.92220	.92364	.92507	.92647	.92785	.92922	.93056	.93189
1.5	.93319	.93448	.93574	.93699	.93822	.93943	.94062	.94179	.94295	.94408
1.6	.94520	.94630	.94738	.94845	.94950	.95053	.95154	.95254	.95352	.95449
1.7	.95543	.95637	.95728	.95818	.95907	.95994	.96080	.96164	.96246	.96327
1.8	.96407	.96485	.96562	.96638	.96712	.96784	.96856	.96926	.96995	.97062
1.9	.97128	.97193	.97257	.97320	.97381	.97441	.97500	.97558	.97615	.97670
2.0	.97725	.97778	.97831	.97882	.97932	.97982	.98030	.98077	.98124	.98169
2.1	.98214	.98257	.98300	.98341	.98382	.98422	.98461	.98500	.98537	.98574
2.2	.98610	.98645	.98679	.98713	.98745	.98778	.98809	.98840	.98870	.98899
2.3	.98928	.98956	.98983	.99010	.99036	.99061	.99086	.99111	.99134	.99158
2.4	.99180	.99202	.99224	.99245	.99266	.99286	.99305	.99324	.99343	.99361
2.5	.99379	.99396	.99413	.99430	.99446	.99461	.99477	.99492	.99506	.99520
2.6	.99534	.99547	.99560	.99573	.99585	.99598	.99609	.99621	.99632	.99643
2.7	.99653	.99664	.99674	.99683	.99693	.99702	.99711	.99720	.99728	.99736
2.8	.99744	.99752	.99760	.99767	.99774	.99781	.99788	.99795	.99801	.99807
2.9	.99813	.99819	.99825	.99831	.99836	.99841	.99846	.99851	.99856	.99861
3.0	.99865	.99869	.99874	.99878	.99882	.99886	.99889	.99893	.99896	.99900
3.1	.99903	.99906	.99910	.99913	.99916	.99918	.99921	.99924	.99926	.99929
3.2	.99931	.99934	.99936	.99938	.99940	.99942	.99944	.99946	.99948	.99950
3.3	.99952	.99953	.99955	.99957	.99958	.99960	.99961	.99962	.99964	.99965
3.4	.99966	.99968	.99969	.99970	.99971	.99972	.99973	.99974	.99975	.99976
3.5	.99977	.99978	.99978	.99979	.99980	.99981	.99981	.99982	.99983	.99983
3.6	.99984	.99985	.99985	.99986	.99986	.99987	.99987	.99988	.99988	.99989
3.7	.99989	.99990	.99990	.99990	.99991	.99991	.99992	.99992	.99992	.99992
3.8	.99993	.99993	.99993	.99994	.99994	.99994	.99994	.99995	.99995	.99995
3.9	.99995	.99995	.99996	.99996	.99996	.99996	.99996	.99996	.99997	.99997

Normál eloszlás – z-érték – valószínűségek

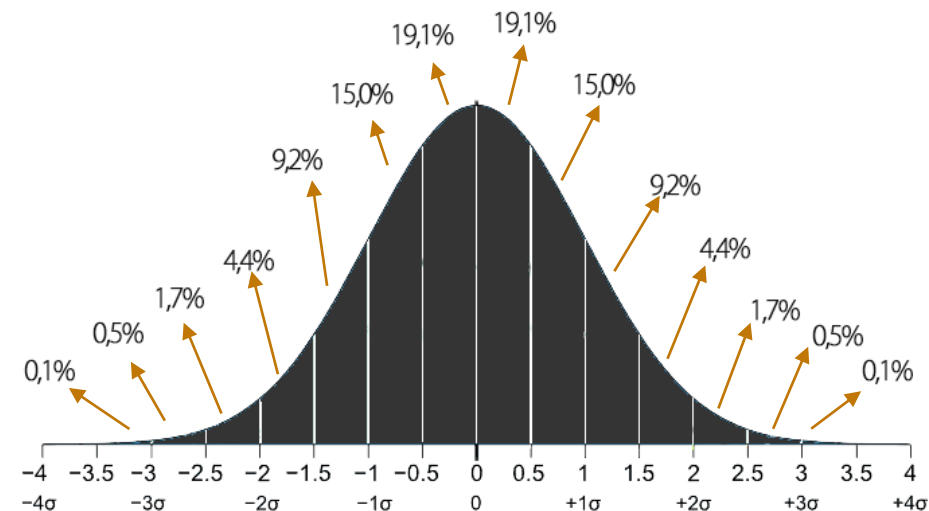
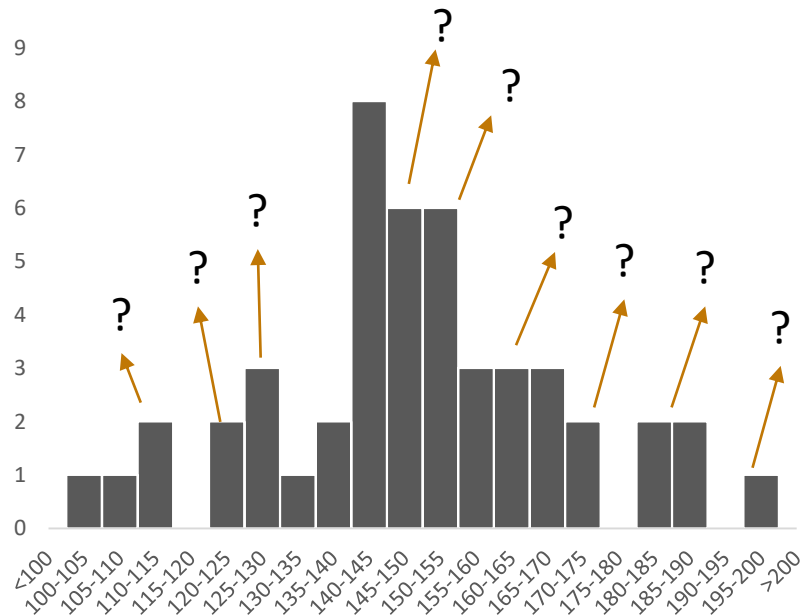
- Mely Z-értékek között található az emberek 95%-a úgy, hogy 2,5% van felette, 2,5% van alatta?
- A megfelelő értékeket kikeresgetve, a határ a $Z = \pm 1,96$ -os érték lesz
- Jelentősége: e két értéken belül van az emberek 95%-a, és ezen kívül 5%



Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
-3.9	.00005	.00005	.00004	.00004	.00004	.00004	.00004	.00004	.00003	.00003
-3.8	.00007	.00007	.00007	.00006	.00006	.00006	.00006	.00005	.00005	.00005
-3.7	.00011	.00010	.00010	.00010	.00009	.00009	.00008	.00008	.00008	.00008
-3.6	.00016	.00015	.00015	.00014	.00014	.00013	.00013	.00012	.00012	.00011
-3.5	.00023	.00022	.00022	.00021	.00020	.00019	.00019	.00018	.00017	.00017
-3.4	.00034	.00032	.00031	.00030	.00029	.00028	.00027	.00026	.00025	.00024
-3.3	.00048	.00047	.00045	.00043	.00042	.00040	.00039	.00038	.00036	.00035
-3.2	.00069	.00066	.00064	.00062	.00060	.00058	.00056	.00054	.00052	.00050
-3.1	.00097	.00094	.00090	.00087	.00084	.00082	.00079	.00076	.00074	.00071
-3.0	.00135	.00131	.00126	.00122	.00118	.00114	.00111	.00107	.00104	.00100
-2.9	.00187	.00181	.00175	.00169	.00164	.00159	.00154	.00149	.00144	.00139
-2.8	.00256	.00248	.00240	.00233	.00226	.00219	.00212	.00205	.00199	.00193
-2.7	.00347	.00336	.00326	.00317	.00307	.00298	.00289	.00280	.00272	.00264
-2.6	.00466	.00453	.00440	.00427	.00415	.00402	.00391	.00379	.00368	.00357
-2.5	.00621	.00604	.00587	.00570	.00554	.00539	.00523	.00508	.00494	.00480
-2.4	.00820	.00798	.00776	.00755	.00734	.00714	.00695	.00676	.00657	.00639
-2.3	.01072	.01044	.01017	.00990	.00964	.00939	.00914	.00889	.00866	.00842
-2.2	.01390	.01355	.01321	.01287	.01255	.01222	.01191	.01160	.01130	.01101
-2.1	.01786	.01743	.01700	.01659	.01618	.01578	.01539	.01500	.01463	.01426
-2.0	.02275	.02222	.02169	.02118	.02068	.02018	.01970	.01923	.01876	.01831
-1.9	.02872	.02807	.02743	.02680	.02619	.02559	.02500	.02442	.02385	.02330
-1.8	.03593	.03515	.03438	.03362	.03288	.03216	.03144	.03074	.03005	.02938
-1.7	.04457	.04363	.04272	.04182	.04093	.04006	.03920	.03836	.03754	.03673
-1.6	.05480	.05370	.05262	.05155	.05050	.04947	.04846	.04746	.04648	.04551
-1.5	.06681	.06552	.06426	.06301	.06178	.06057	.05938	.05821	.05705	.05592
-1.4	.08076	.07927	.07780	.07636	.07493	.07353	.07215	.07078	.06944	.06811
-1.3	.09680	.09510	.09342	.09176	.09012	.08851	.08691	.08534	.08379	.08226
-1.2	.11507	.11314	.11123	.10935	.10749	.10565	.10383	.10204	.10027	.09853
-1.1	.13567	.13350	.13136	.12924	.12714	.12507	.12302	.12100	.11900	.11702
-1.0	.15866	.15625	.15386	.15151	.14917	.14686	.14457	.14231	.14007	.13786
-0.9	.18406	.18141	.17879	.17619	.17361	.17106	.16853	.16602	.16354	.16109
-0.8	.21186	.20897	.20611	.20327	.20045	.19766	.19489	.19215	.18943	.18673
-0.7	.24196	.23885	.23576	.23270	.22965	.22663	.22363	.22065	.21770	.21476
-0.6	.27425	.27093	.26763	.26435	.26109	.25785	.25463	.25143	.24825	.24510
-0.5	.30854	.30503	.30153	.29806	.29460	.29116	.28774	.28434	.28096	.27760
-0.4	.34458	.34090	.33724	.33360	.32997	.32636	.32276	.31918	.31561	.31207
-0.3	.38209	.37828	.37448	.37070	.36693	.36317	.35942	.35569	.35197	.34827
-0.2	.42074	.41683	.41294	.40905	.40517	.40129	.39743	.39358	.38974	.38591
-0.1	.46017	.45620	.45224	.44828	.44433	.44038	.43644	.43251	.42858	.42465
-0.0	.50000	.49601	.49202	.48803	.48405	.48006	.47608	.47210	.46812	.46414

Normál eloszlás – z-érték

- A normál eloszlás Z-értékeihez tartozó valószínűségeket táblázatba foglalták.
- Ahhoz, hogy a mi mintánkra is használható legyen ez a táblázat, a mintánk pontjait meg kell feleltetni a normál görbe Z-értékeinek.
 - A kettő nagyon különbözik: a **normálgörbe átlaga=0 és szórása=1**, a mi mintánk átlaga=149,06 és szórása=21,02.... Hogyan lesz ez összehasonlítható?
 - **Lineáris transzformációkkal** alakítsuk át a mintánk úgy, hogy az ő átlaga is 0 és szórása 1 legyen!

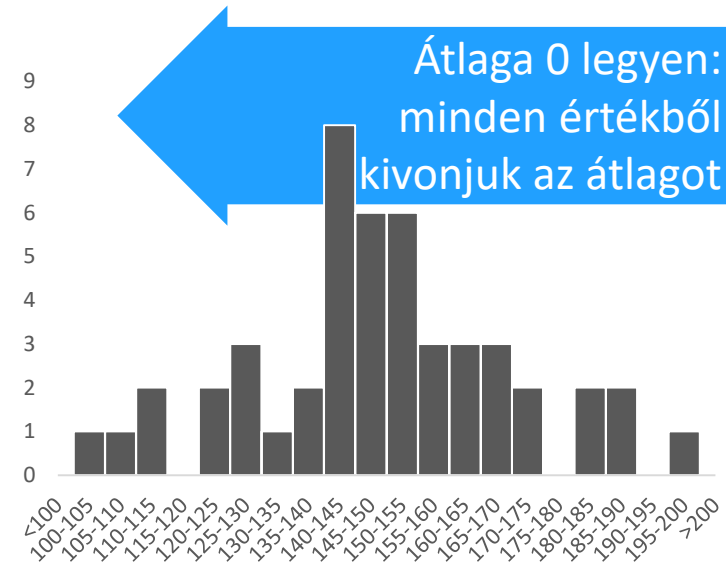


Normál eloszlás – z-érték

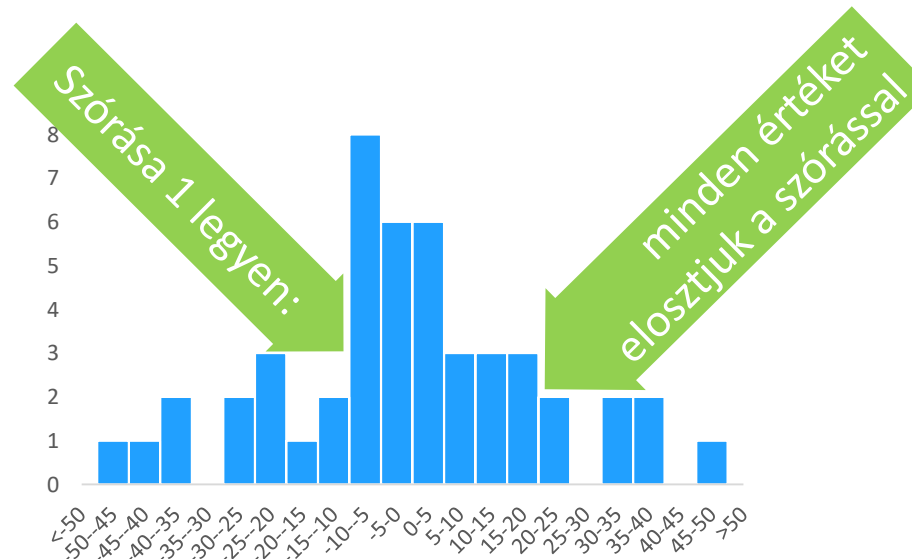
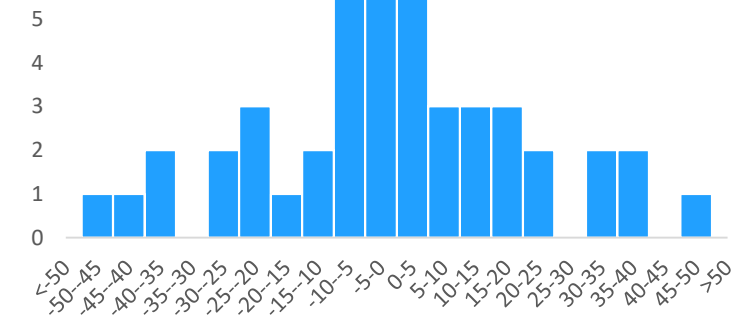
- **Standardizálás / z-érték:**

- $$z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{s}$$

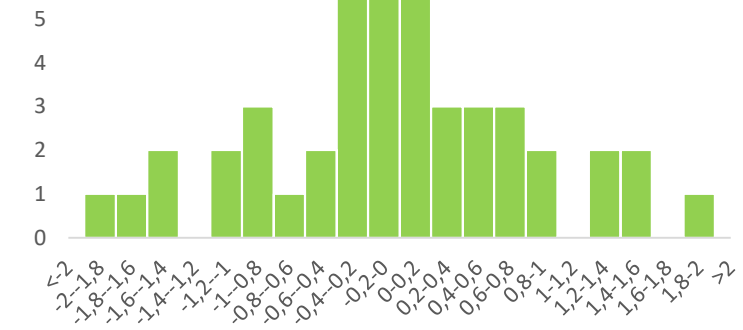
- A minta értékeiből kivonva a mintaátlagot, az új minta átlaga 0 lesz
- A minta értékeit elosztva szórással, az új minta szórása 1 lesz
- Az így kapott új értékeket z-értékeknek nevezzük



Ezzel csak annyi történt, hogy a görbét eltoltuk az x-tengelyen.

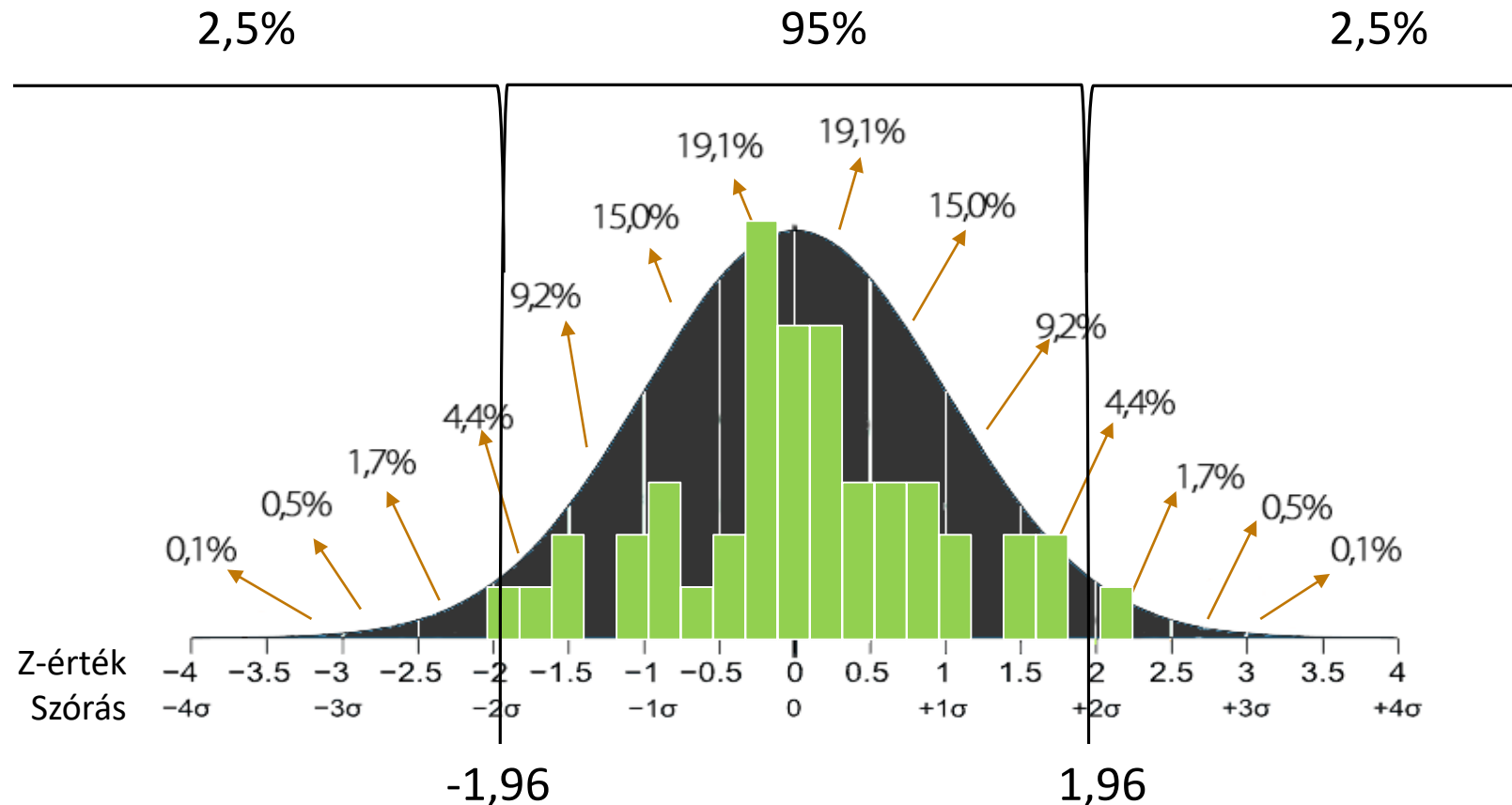


Ezzel csak átskáláztuk az eloszlásgörbét („lekicsinyítettük / felnagyítottuk”)



Normál eloszlás – z-érték

- Az így kapott z-értékek eloszlása már összevethető a standard normál eloszlással.



- Még egyszer a legfontosabb z-érték: ± 1.96** , ez az eloszlás felső és alsó 2,5% vágja le (összesen a szélső 5%-ot), tehát az adatok 95%-a a ± 1.96 -os z-érték közé fog esni

Normál eloszlás – z-érték – valószínűségek

- Lássuk még egyszer a minta és z-értékek összefüggését:

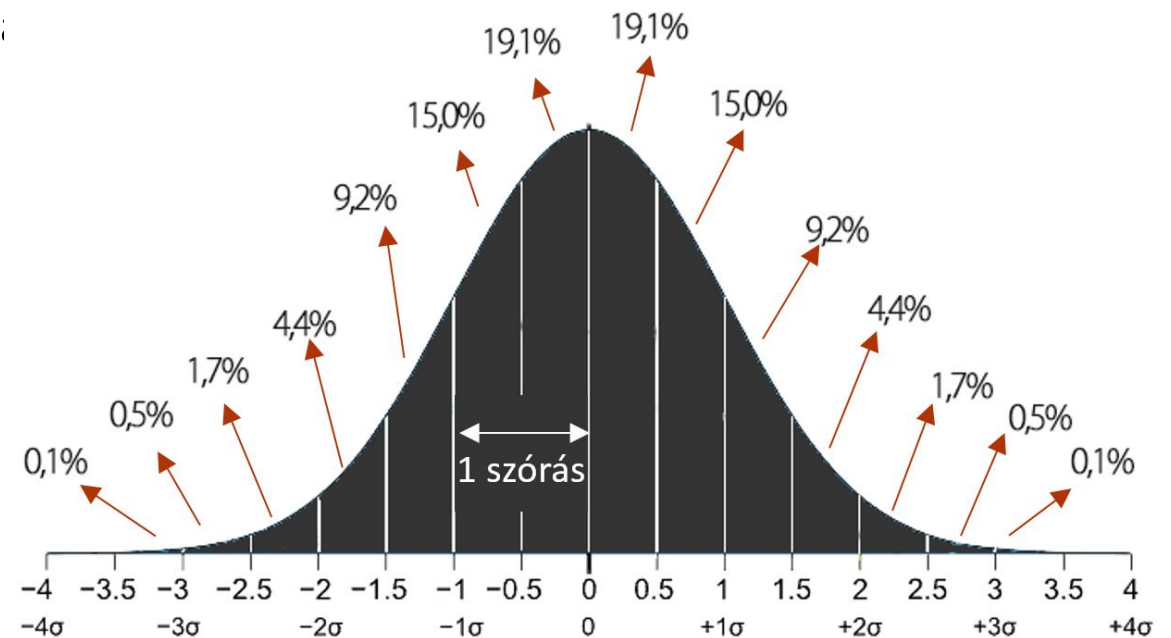
$$z = \frac{\bar{x} + s - \bar{x}}{s}$$

- **Z-érték, normál érték** vagy **standardizált érték**

- Egy skálázatlan mérőszám, megadja, hogy a nyers pontszám hány szórásnyira van az átlagtól

- Z=0: az a pont, amely az átlagtól 0 szórásnyira van, középen helyezkedik el (megegyezik az átlaggal)
- Z=1: az a pont, amely az átlagtól 1 szórásnyi távolságra van pozitív irányban
- Z=-1: az a pont, amely az átlagtól 1 szórásnyi távolságra van negatív irányban
- Z=2: az a pont, amely az átlagtól 2 szórásnyi távolságra van pozitív irányban (stb.)

- **A Z-értékek átlaga=0 és szórása=1**



Felső sorban Z-értékek, alatta szórások

Normál eloszlás – z-érték

- Egy kis gyakorlás:

- Van egy tinédzserekből álló mintánk. A magasság átlaga=149,06 és szórása=21,02
- Mennyi a valószínűsége, hogy egy tini 180cm-nél magasabb legyen?

- Alakítsuk át a 180cm-t Z-értékké:

$$Z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{s} = \frac{180 - 149,06}{21,02} = 1,47$$

- A táblázatból kikeresve a Z=1,47-es érték feletti részhez 7,215% tartozik.
 - Annak valószínűsége, hogy egy tini 180cm-nél magasabb lesz, 7,215%, **feltételezve, hogy a magasság a populációban normál eloszlást követ, és a mintánk jól reprezentálja a populációt.**
- Többek között ezért fontos a normalitás feltétele a legtöbb próbánál, és ezért fontos, hogy a minta jól reprezentálja a populációt.

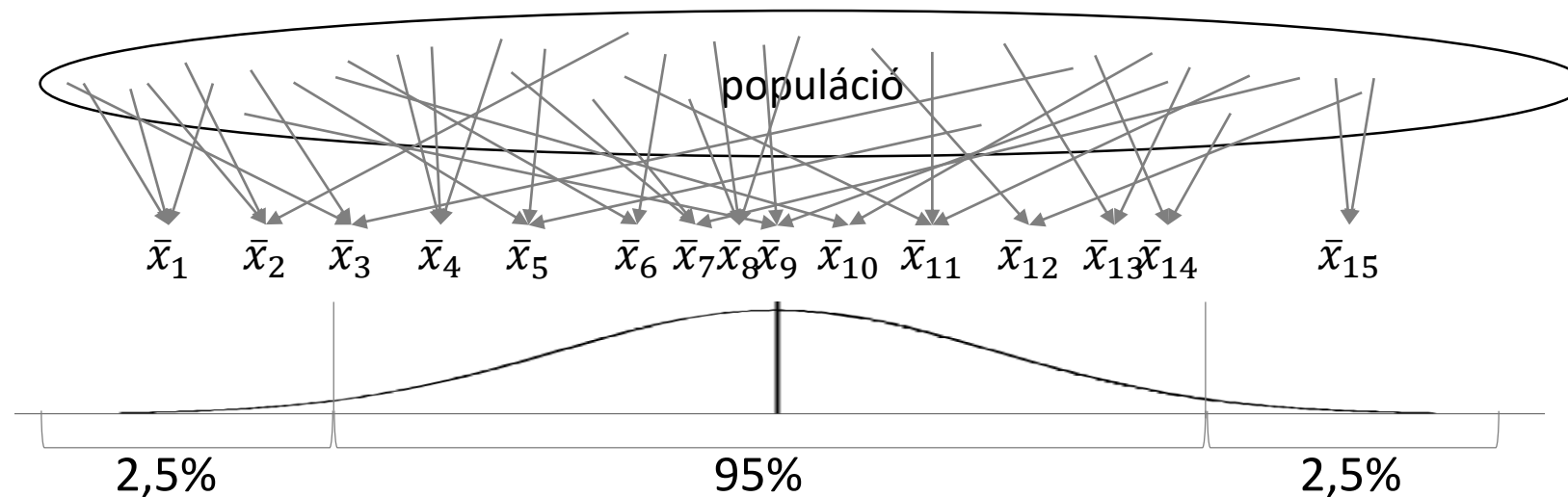
Egy kis kétérő: a konfidencia intervallumról újra

Most már tudunk mindent, térjünk vissza az előző előadáson félbehagyott konfidencia intervallumhoz!!

Kellene egy olyan határ, amibe nagy (pl. 90% vagy 95%-os) valószínűséggel beleesik a populációátlag

1. Vegyünk a populációból sok mintát, és számoljuk ki az átlagaikat! Azt látjuk, hogy a *mintaátlagok* normál eloszlást követnek a central limit theoremnek megfelelően.

2. Határozzuk meg egy határértéket, amibe a *mintaátlagok* 95%-a beleesik, így feltételezhetjük, hogy a populáció átlag is 95%-os valószínűséggel benne lesz!



Hol lesz ez a határérték?

Z-értéknél kiemeltem a **± 1.96** -os z-értéket, melyről tudjuk, hogy a z-értékek 95%-a e kettő érték között van. Tehát, ha kiszámolnánk a *mintaátlagok* z-értékeit, akkor az a két mintaátlag között, melyhez a + és – 1.96-os z-érték tartozik, lesz a mintaátlagok 95%-a.

Szóródási mutatók: Konfidencia intervallum / megbízhatóság

Hogyan számoljuk ki egyetlen mért minta esetén?

Lássuk a z-értékek képletét még egyszer: $z = \frac{x_i - \bar{x}}{s}$

Ebből egyenletrendezéssel:

Az átlag átlaga az átlag marad, tehát ez nem változik

± 1.96 (95%-os bizonyosság esetén)

A határérték, amit keresünk

$$X_i = \bar{X} + z * s$$

Minket a *mintaátlagok szórása* érdekel, ezért szórás helyett a mintaátlagok szórásával, tehát *standard error*val kell számolnunk

SE

Az így kialakult képlet: $CI_{határ} = \bar{X} + z * SE$

A 95%-os konfidencia intervallum felső határa: átlag + 1.96 * SE

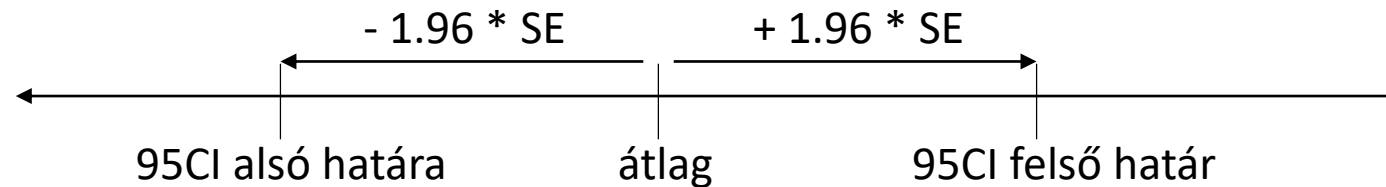
A 95%-os konfidencia intervallum alsó határa: átlag + (- 1.96) * SE

Szóródási mutatók: Konfidencia intervallum / megbízhatóság

Mit mond el nekünk a konfidencia intervallum a minta és populáció kapcsolatáról? Mi befolyásolja, milyen magabiztosan következtethetünk a mintából a populációra?

A konfidencia intervallum határainak képlete (felbontva a standard error):

$$CI_{határ} = \bar{X} + z * \frac{s}{\sqrt{N}}$$

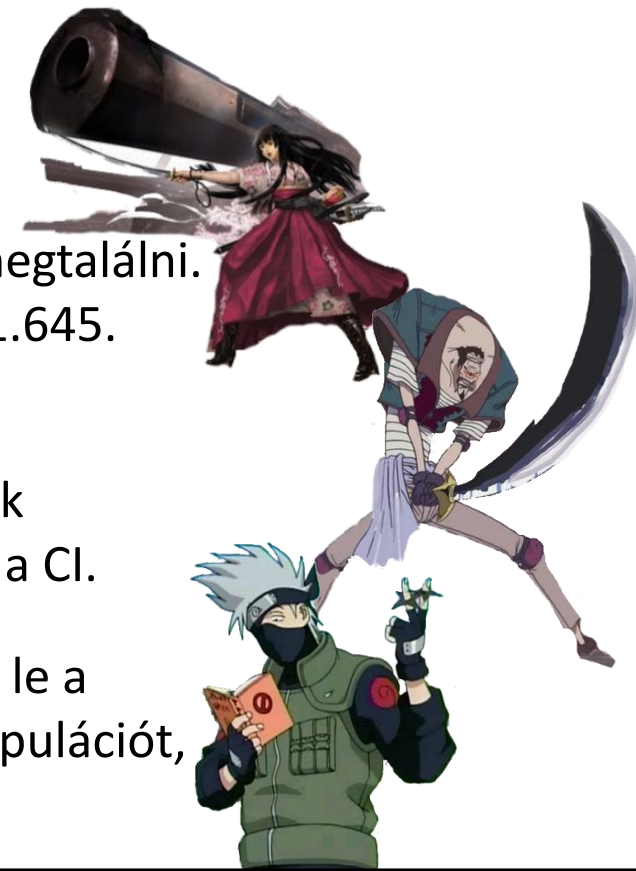


Átlag: csak az offsetet adja meg, a CI szélességét nem befolyásolja

Z érték: ezzel szabályozhatjuk, mekkora valószínűséggel akarjuk a populációátlagot megtalálni. 95%-os valószínűséghez ± 1.96 -os z-érték tartozik. 99%-hoz ± 2.576 . 90%-hoz csak ± 1.645 . Láthatjuk, hogy minél „biztosabbra akarunk menni”, annál szélesebb CI kell.

Szórás: a számlálóban szerepel, tehát minél nagyobb a szórás, annál kevésbé lehetünk biztosak abban, hogy a mintaátlag jó reprezentálja a populációt, annál szélesebb lesz a CI.

Elemsszám: nevezőben szerepel. Minél nagyobb a minta, annál nagyobb részét fedtük le a populációnak, annál biztosabbak lehetünk abban, hogy a minta jól reprezentálja a populációt, annál keskenyebb lesz a CI.



- **Gyakorlás:** Egy országos felmérésen Zuckermann Sensation Seeking skálán a következő adatokat kapták.
 - Számold ki, mekkorák lennének a konfidencia intervallumok, ha csak 25, 100 vagy 1000 fő adataival dolgoznál!
 - Hogyan befolyásolja az elemszám a megbízhatósági intervallumot?
 - Számold ki a 90%, 95% és 99% konfidencia intervallumot is!
 - Ha biztosabbak akarunk lenni, hogy a populációátlag az intervallumon belül van, az növeli vagy csökkenti az intervallum nagyságát?
 - A konfidencia szintje kis vagy nagy minták esetén számít igazán?
 - Láthatod, hogy a női mintákban egy kicsit kisebbek a szórások, mint a férfi mintában.
 - Ez csökkenti vagy növeli a megbízhatóságot?
 - A szórás kis vagy nagy minták esetén számít inkább?

		M	SD	90%CI	95%CI	99%CI
N=25	Férfi	18,55	5,98	1,967	2,344	3,081
	Nő	17,2	4,71	1,550	1,846	2,427
N=100	Férfi	19,32	5,9	0,971	1,156	1,520
	Nő	17,38	4,65	0,765	0,911	1,198
N=1000	Férfi	19,21	5,91	0,307	0,366	0,481
	Nő	17,4	4,64	0,241	0,288	0,378

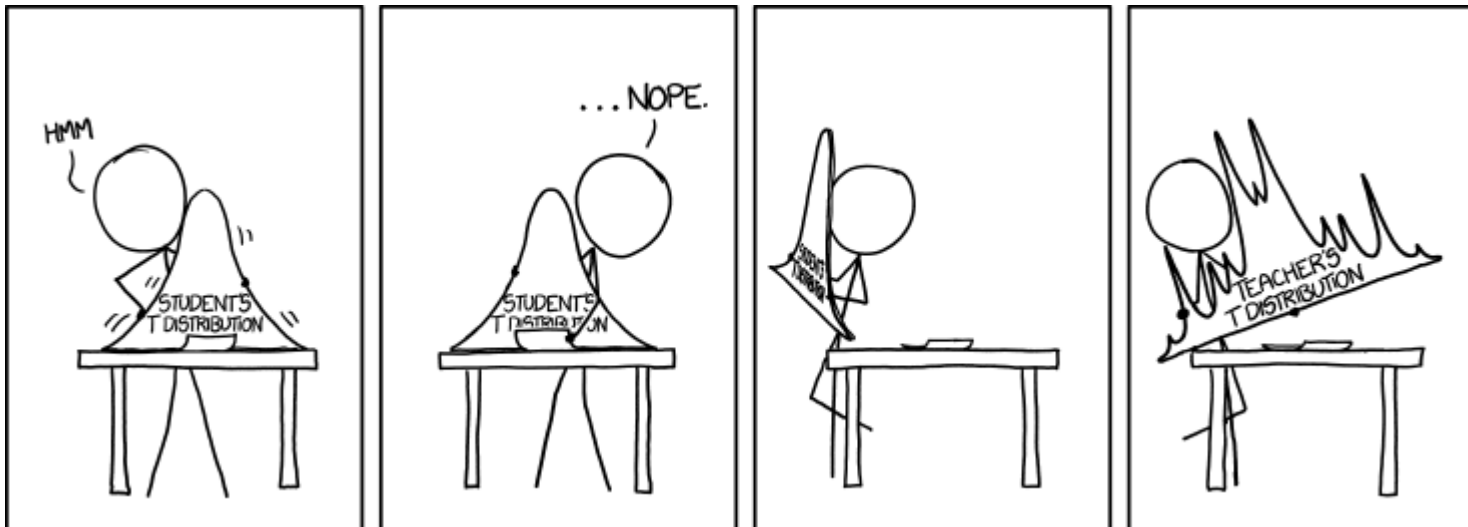
$$CI_{határ} = \bar{X} + z * SE$$



2. t-eloszlás

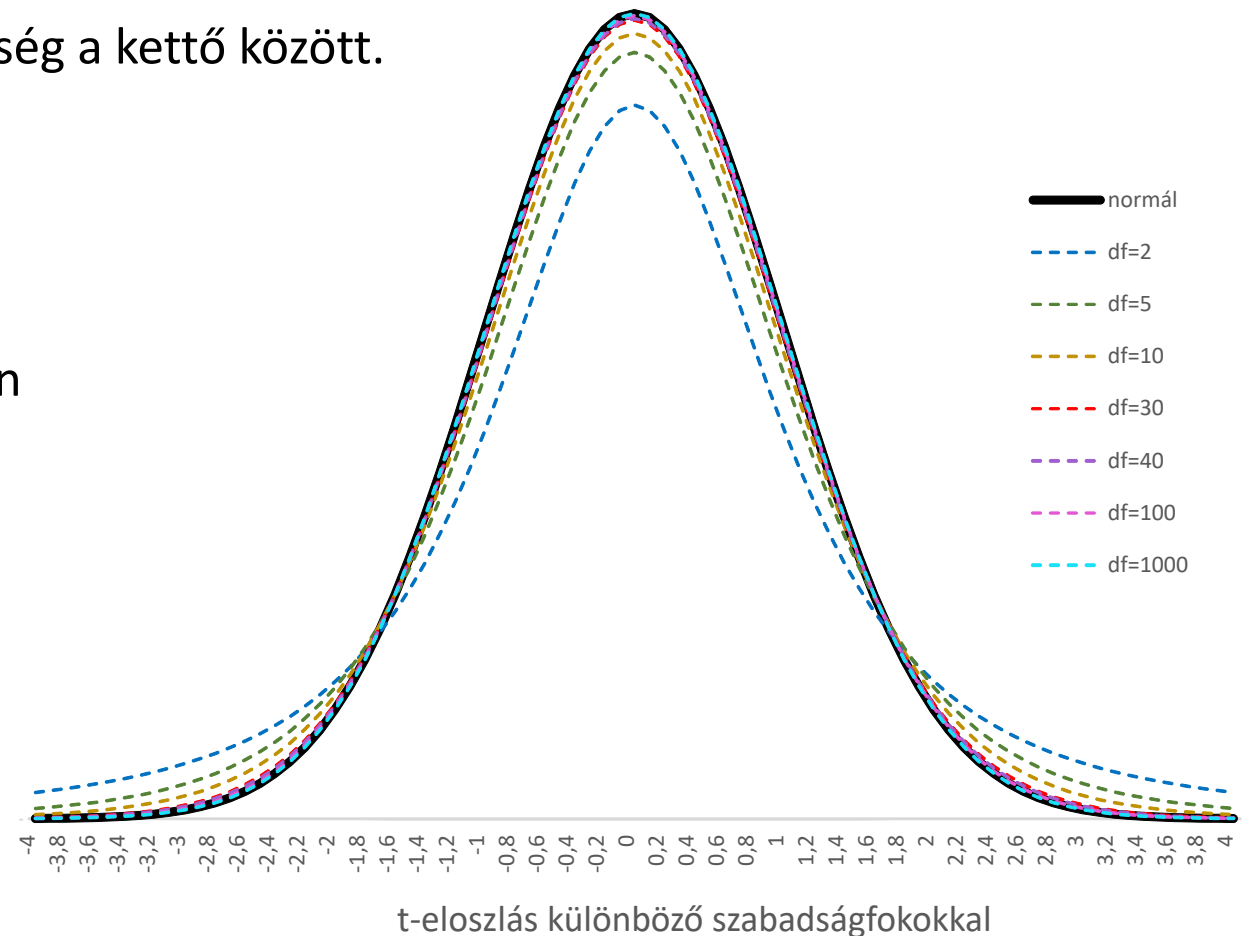
- **Student-féle t-eloszlás**

- Egy normáeloszlást követő populációból vett minta eloszlását írja le, abban az esetben, ha a minta kicsi, és a populáció szórása nem ismert
- William Sealy Gosset írta le Student álnéven
- Használata:
 - BA alatt tanult: két minta különbségének vizsgálata (t-próbák)
 - MA alatt tanult: lineáris regresszió b-értékeinek vizsgálata



t-eloszlás és elemszám (szabadságfok)

- Hasonlít a normál eloszlásra, de vastagabb farokrészel – a mérés bizonytalansága miatt.
- A (szabadságfok) növelésével alakja egyre inkább hasonlít a normál-eloszlás alakjához.
 - Végtelen szabadságfok esetén megegyezik a normál eloszlással.
 - 30-40 fő felett már nincs jelentős különbség a kettő között.
- Ebből adódik (többek között):
 - a normalitás feltételének tesztelésekor a central limit theorem 40 fős kritériuma
 - az az ökölszabály is, hogy egy vizsgálatban kb. 30 főre van szükség csoportonként



t-értékek (a szignifikancia szempontjából érdekes területen kétszázad pontossággal, egyébként egy tized pontossággal)

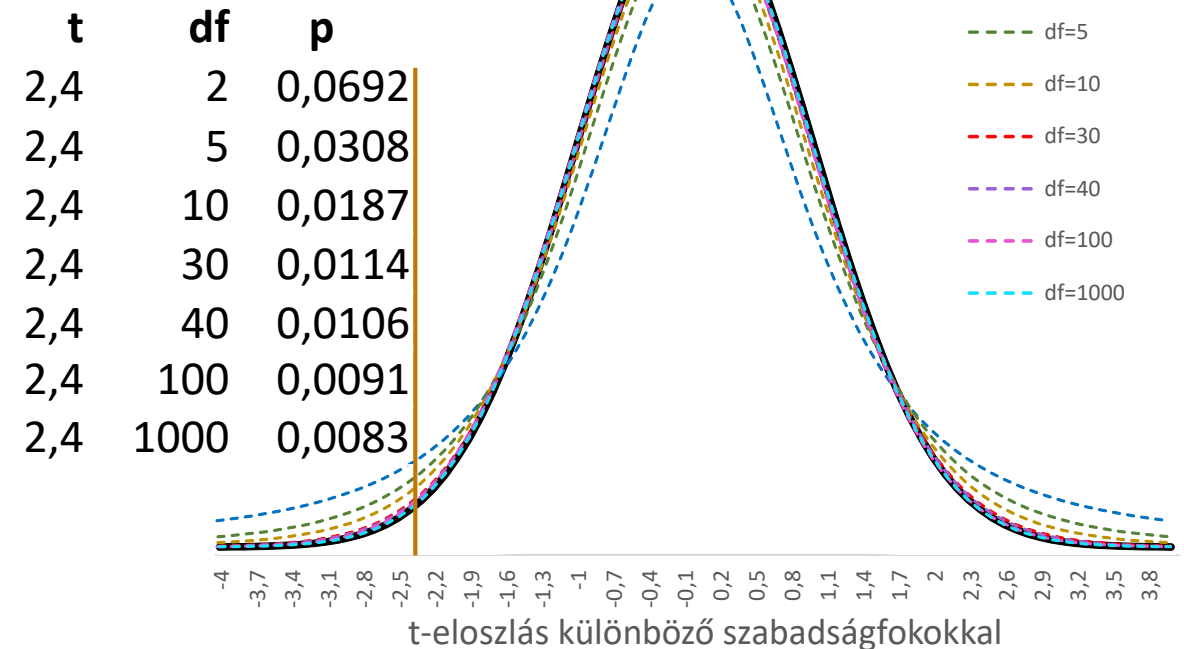
szabadságfok									
5	10	15	20	25	30	40	50	100	1000
0,0150	0,0067	0,0045	0,0035	0,0030	0,0027	0,0023	0,0021	0,0017	0,0014
0,0169	0,0079	0,0055	0,0044	0,0038	0,0035	0,0030	0,0028	0,0023	0,0019
0,0190	0,0094	0,0067	0,0055	0,0049	0,0044	0,0039	0,0036	0,0031	0,0026
0,0214	0,0112	0,0082	0,0069	0,0061	0,0056	0,0051	0,0047	0,0041	0,0035
0,0241	0,0132	0,0100	0,0086	0,0077	0,0072	0,0065	0,0061	0,0054	0,0047
0,0272	0,0157	0,0123	0,0106	0,0097	0,0091	0,0083	0,0079	0,0070	0,0063
0,0308	0,0187	0,0149	0,0131	0,0121	0,0114	0,0106	0,0101	0,0091	0,0083
0,0349	0,0221	0,0181	0,0162	0,0150	0,0143	0,0134	0,0128	0,0118	0,0108
0,0395	0,0262	0,0219	0,0199	0,0186	0,0178	0,0168	0,0162	0,0151	0,0140
0,0449	0,0310	0,0265	0,0243	0,0230	0,0221	0,0210	0,0204	0,0191	0,0180
0,0510	0,0367	0,0320	0,0296	0,0282	0,0273	0,0262	0,0255	0,0241	0,0229
0,0523	0,0379	0,0332	0,0308	0,0294	0,0285	0,0273	0,0266	0,0252	0,0240
0,0536	0,0392	0,0344	0,0320	0,0306	0,0297	0,0285	0,0278	0,0264	0,0251
0,0550	0,0405	0,0357	0,0333	0,0319	0,0309	0,0297	0,0290	0,0276	0,0263
0,0565	0,0419	0,0370	0,0346	0,0332	0,0322	0,0310	0,0303	0,0289	0,0276
0,0579	0,0433	0,0384	0,0360	0,0345	0,0335	0,0323	0,0316	0,0302	0,0289
0,0594	0,0448	0,0398	0,0374	0,0359	0,0349	0,0337	0,0330	0,0315	0,0302
0,0610	0,0463	0,0413	0,0388	0,0373	0,0364	0,0351	0,0344	0,0329	0,0316
0,0626	0,0478	0,0428	0,0403	0,0388	0,0378	0,0366	0,0359	0,0344	0,0330
0,0642	0,0494	0,0444	0,0419	0,0404	0,0394	0,0381	0,0374	0,0359	0,0345
0,0659	0,0510	0,0460	0,0435	0,0420	0,0410	0,0397	0,0389	0,0374	0,0361
0,0676	0,0527	0,0477	0,0451	0,0436	0,0426	0,0413	0,0406	0,0391	0,0377
0,0694	0,0545	0,0494	0,0468	0,0453	0,0443	0,0430	0,0423	0,0407	0,0394
0,0712	0,0562	0,0512	0,0486	0,0471	0,0461	0,0448	0,0440	0,0425	0,0411
0,0730	0,0581	0,0530	0,0504	0,0489	0,0479	0,0466	0,0458	0,0443	0,0429
0,0749	0,0600	0,0549	0,0523	0,0508	0,0497	0,0484	0,0477	0,0461	0,0447
0,0769	0,0619	0,0568	0,0543	0,0527	0,0517	0,0504	0,0496	0,0480	0,0466
0,0789	0,0640	0,0588	0,0563	0,0547	0,0537	0,0524	0,0516	0,0500	0,0486
0,0810	0,0660	0,0609	0,0583	0,0568	0,0557	0,0544	0,0536	0,0521	0,0507
0,0831	0,0682	0,0630	0,0604	0,0589	0,0578	0,0565	0,0558	0,0542	0,0528
0,0852	0,0703	0,0652	0,0626	0,0611	0,0600	0,0587	0,0579	0,0564	0,0550
0,0875	0,0726	0,0675	0,0649	0,0633	0,0623	0,0610	0,0602	0,0586	0,0572
0,0898	0,0749	0,0698	0,0672	0,0657	0,0646	0,0633	0,0625	0,0610	0,0595
0,0921	0,0773	0,0722	0,0696	0,0681	0,0670	0,0657	0,0649	0,0634	0,0619
0,0945	0,0797	0,0747	0,0721	0,0705	0,0695	0,0682	0,0674	0,0658	0,0644
0,0970	0,0823	0,0772	0,0746	0,0731	0,0720	0,0707	0,0700	0,0684	0,0670
0,1102	0,0959	0,0909	0,0884	0,0869	0,0859	0,0846	0,0838	0,0823	0,0809
0,1252	0,1114	0,1066	0,1042	0,1027	0,1018	0,1005	0,0998	0,0983	0,0970
0,1419	0,1289	0,1244	0,1221	0,1207	0,1198	0,1186	0,1179	0,1165	0,1152
0,1607	0,1486	0,1443	0,1422	0,1409	0,1400	0,1390	0,1383	0,1370	0,1358
0,1816	0,1704	0,1666	0,1646	0,1634	0,1627	0,1617	0,1611	0,1599	0,1588
0,2047	0,1946	0,1912	0,1894	0,1884	0,1876	0,1868	0,1862	0,1851	0,1842
0,2300	0,2212	0,2181	0,2166	0,2156	0,2150	0,2142	0,2137	0,2128	0,2120
0,2576	0,2499	0,2473	0,2460	0,2452	0,2447	0,2440	0,2436	0,2428	0,2420
0,2873	0,2809	0,2787	0,2776	0,2770	0,2765	0,2759	0,2756	0,2749	0,2743
0,3191	0,3139	0,3122	0,3113	0,3107	0,3104	0,3099	0,3096	0,3091	0,3086
0,3528	0,3488	0,3474	0,3467	0,3463	0,3460	0,3456	0,3454	0,3450	0,3446
0,3881	0,3852	0,3841	0,3836	0,3833	0,3831	0,3829	0,3827	0,3824	0,3821
0,4247	0,4227	0,4221	0,4218	0,4215	0,4214	0,4212	0,4211	0,4209	0,4208
0,4621	0,4612	0,4608	0,4607	0,4606	0,4605	0,4604	0,4604	0,4603	0,4602
0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000

t-értékek (a szignifikancia szempontjából érdekes területen kétszázad pontossággal, egyébként egy tized pontossággal)

szabadságfok										
	5	10	15	20	25	30	40	50	100	1000
0	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000
0,1	0,5379	0,5388	0,5392	0,5393	0,5394	0,5395	0,5396	0,5396	0,5397	0,5398
0,2	0,5753	0,5773	0,5779	0,5782	0,5785	0,5786	0,5788	0,5789	0,5791	0,5792
0,3	0,6119	0,6148	0,6159	0,6164	0,6167	0,6169	0,6171	0,6173	0,6176	0,6179
0,4	0,6472	0,6512	0,6526	0,6533	0,6537	0,6540	0,6544	0,6546	0,6550	0,6554
0,5	0,6809	0,6861	0,6878	0,6887	0,6893	0,6896	0,6901	0,6904	0,6909	0,6914
0,6	0,7127	0,7191	0,7213	0,7224	0,7230	0,7235	0,7241	0,7244	0,7251	0,7257
0,7	0,7424	0,7501	0,7527	0,7540	0,7548	0,7553	0,7560	0,7564	0,7572	0,7580
0,8	0,7700	0,7788	0,7819	0,7834	0,7844	0,7850	0,7858	0,7863	0,7872	0,7880
0,9	0,7953	0,8054	0,8088	0,8106	0,8116	0,8124	0,8132	0,8138	0,8149	0,8158
1	0,8184	0,8296	0,8334	0,8354	0,8366	0,8373	0,8383	0,8389	0,8401	0,8412
1,1	0,8393	0,8514	0,8557	0,8578	0,8591	0,8600	0,8610	0,8617	0,8630	0,8642
1,2	0,8581	0,8711	0,8756	0,8779	0,8793	0,8802	0,8814	0,8821	0,8835	0,8848
1,3	0,8748	0,8886	0,8934	0,8958	0,8973	0,8982	0,8995	0,9002	0,9017	0,9030
1,4	0,8898	0,9041	0,9091	0,9116	0,9131	0,9141	0,9154	0,9162	0,9177	0,9191
1,5	0,9030	0,9177	0,9228	0,9254	0,9269	0,9280	0,9293	0,9300	0,9316	0,9330
1,52	0,9055	0,9203	0,9253	0,9279	0,9295	0,9305	0,9318	0,9326	0,9342	0,9356
1,54	0,9079	0,9227	0,9278	0,9304	0,9319	0,9330	0,9343	0,9351	0,9366	0,9381
1,56	0,9102	0,9251	0,9302	0,9328	0,9343	0,9354	0,9367	0,9375	0,9390	0,9405
1,58	0,9125	0,9274	0,9325	0,9351	0,9367	0,9377	0,9390	0,9398	0,9414	0,9428
1,6	0,9148	0,9297	0,9348	0,9374	0,9389	0,9400	0,9413	0,9421	0,9436	0,9450
1,62	0,9169	0,9318	0,9370	0,9396	0,9411	0,9422	0,9435	0,9442	0,9458	0,9472
1,64	0,9190	0,9340	0,9391	0,9417	0,9432	0,9443	0,9456	0,9464	0,9479	0,9493
1,66	0,9211	0,9360	0,9412	0,9437	0,9453	0,9463	0,9476	0,9484	0,9500	0,9514
1,68	0,9231	0,9381	0,9432	0,9457	0,9473	0,9483	0,9496	0,9504	0,9520	0,9534
1,7	0,9251	0,9400	0,9451	0,9477	0,9492	0,9503	0,9516	0,9523	0,9539	0,9553
1,72	0,9270	0,9419	0,9470	0,9496	0,9511	0,9521	0,9534	0,9542	0,9557	0,9571
1,74	0,9288	0,9438	0,9488	0,9514	0,9529	0,9539	0,9552	0,9560	0,9575	0,9589
1,76	0,9306	0,9455	0,9506	0,9532	0,9547	0,9557	0,9570	0,9577	0,9593	0,9606
1,78	0,9324	0,9473	0,9523	0,9549	0,9564	0,9574	0,9587	0,9594	0,9609	0,9623
1,8	0,9341	0,9490	0,9540	0,9565	0,9580	0,9590	0,9603	0,9611	0,9626	0,9639
1,82	0,9358	0,9506	0,9556	0,9581	0,9596	0,9606	0,9619	0,9626	0,9641	0,9655
1,84	0,9374	0,9522	0,9572	0,9597	0,9612	0,9622	0,9634	0,9641	0,9656	0,9670
1,86	0,9390	0,9537	0,9587	0,9612	0,9627	0,9636	0,9649	0,9656	0,9671	0,9684
1,88	0,9406	0,9552	0,9602	0,9626	0,9641	0,9651	0,9663	0,9670	0,9685	0,9698
1,9	0,9421	0,9567	0,9616	0,9640	0,9655	0,9665	0,9677	0,9684	0,9698	0,9711
1,92	0,9435	0,9581	0,9630	0,9654	0,9668	0,9678	0,9690	0,9697	0,9711	0,9724
1,94	0,9450	0,9595	0,9643	0,9667	0,9681	0,9691	0,9703	0,9710	0,9724	0,9737
1,96	0,9464	0,9608	0,9656	0,9680	0,9694	0,9703	0,9715	0,9722	0,9736	0,9749
1,98	0,9477	0,9621	0,9668	0,9692	0,9706	0,9715	0,9727	0,9734	0,9748	0,9760
2	0,9490	0,9633	0,9680	0,9704	0,9718	0,9727	0,9738	0,9745	0,9759	0,9771
2,1	0,9551	0,9690	0,9735	0,9757	0,9770	0,9779	0,9790	0,9796	0,9809	0,9820
2,2	0,9605	0,9738	0,9781	0,9801	0,9814	0,9822	0,9832	0,9838	0,9849	0,9860
2,3	0,9651	0,9779	0,9819	0,9838	0,9850	0,9857	0,9866	0,9872	0,9882	0,9892
2,4	0,9692	0,9813	0,9851	0,9869	0,9879	0,9886	0,9894	0,9899	0,9909	0,9917
2,5	0,9728	0,9843	0,9877	0,9894	0,9903	0,9909	0,9917	0,9921	0,9930	0,9937
2,6	0,9759	0,9868	0,9900	0,9914	0,9923	0,9928	0,9935	0,9939	0,9946	0,9953
2,7	0,9786	0,9888	0,9918	0,9931	0,9939	0,9944	0,9949	0,9953	0,9959	0,9965
2,8	0,9810	0,9906	0,9933	0,9945	0,9951	0,9956	0,9961	0,9964	0,9969	0,9974
2,9	0,9831	0,9921	0,9945	0,9956	0,9962	0,9965	0,9970	0,9972	0,9977	0,9981
3	0,9850	0,9933	0,9955	0,9965	0,9970	0,9973	0,9977	0,9979	0,9983	0,9986

t-eloszlás szabadságfoka és a szignifikancia

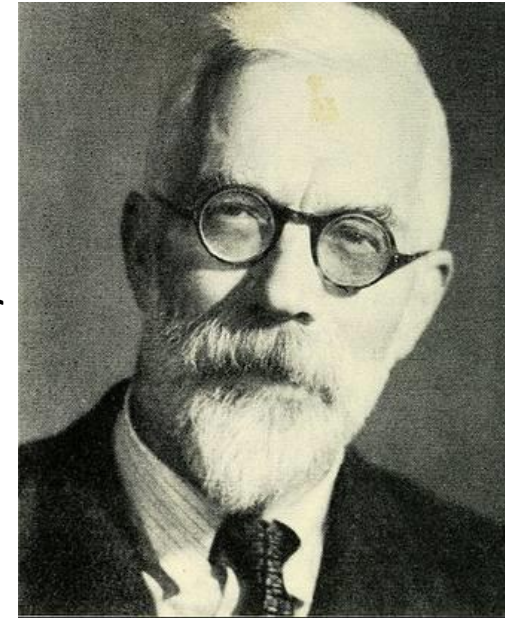
- Hasonlít a normál eloszlásra, de vastagabb farokrészel – a mérés bizonytalansága miatt.
- A szabadságfok növelésével alakja egyre „karcsúbb” lesz, míg végleten szabadság fok esetén eléri a normál-eloszlás alakjához.
- Ebből adódóan minél nagyobb az elemszám (a szabadságfok), ugyanahhoz a t-értékhez annál kisebb valószínűség (p-érték) fog tartozni *az eloszlásgörbe szélein*.
- Ugyan egyre csökkenő mértékben, de az elemszám növelésével ugyanakkora hatás (t-érték) egyre szignifikánsabb lesz.
 - Gyakorlatban is értelmezhető: a nagyobb minta valószínűleg jobban reprezentálja a populációt, mint egy kisebb. Ezért a nagyobb mintán kapott hatást „inkább hisszük el” a populációban is létezőnek.
- Ez a összefüggés más statisztikai próbákra is igaz.



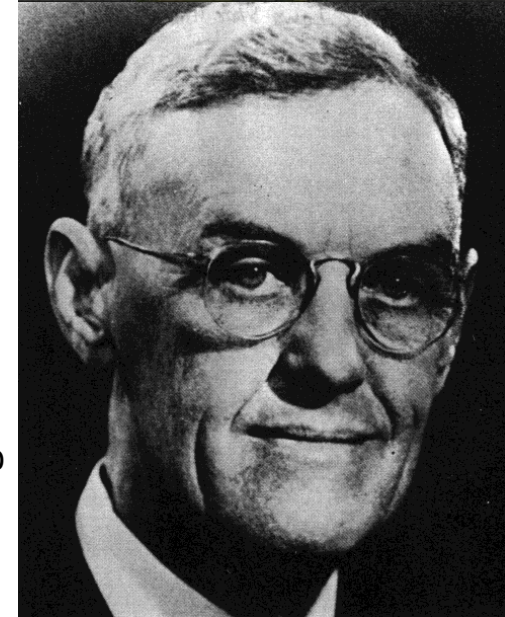
3. F-eloszlás

- **F-eloszlás** vagy **Fisher-Snedecor eloszlás**
 - **Varianciák arányainak** számításakor használt eloszlástípus
 - **ANOVA** és **lineáris regresszió** során részletesen beszélünk majd róla, most csak egy példával szemléltetem:
 - Feladat: Emberek súlyát szeretnénk magyarázni magasságukkal.
 - *Megmagyarázott variancia*: A súly varianciájának egy részét meg lehet magyarázni a magassággal (a magasabb emberek általában nehezebbek)
 - *Meg nem magyarázott variancia*: A súly varianciájának másik részét nem lehet megmagyarázni a magassággal (ugyanolyan magas emberek között is van nehezebb és könnyebb)
 - Az F érték a megmagyarázott és meg nem magyarázott variancia aránya
 - Mivel varianciák arányáról van szó, ezért **értéke csak pozitív lehet**.
 - A mi példánkban $F=0$ jelentése, a magassággal semmit nem lehet a súly varianciájából megmagyarázni, $F=\infty$ jelentése, mindent meg lehet a magassággal a súly varianciájából magyarázni.
 - **Nem szimmetrikus** eloszlás

Sir Ronald Aylmer Fisher



George Waddel Snedecor



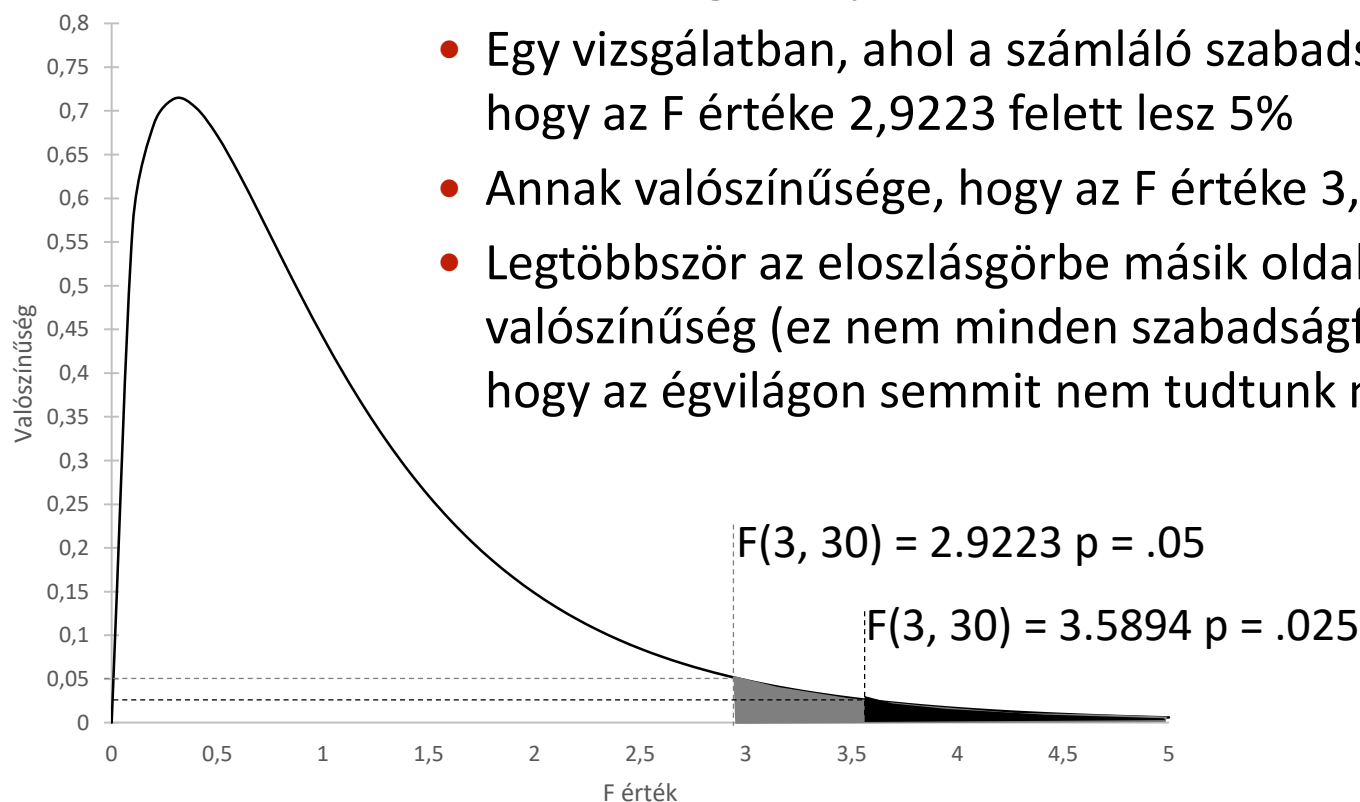
F-eloszlás szabadságfokai

- **Az F-eloszlás két szabadságfokkal rendelkezik**

- df_M : A számlálóhoz tartozó szabadságfokot a modell bonyolultsága határozza meg (pl. a súlyt nem csak magassággal, hanem a nemmel is próbáljuk magyarázni).
- df_R : A nevezőhöz tartozó szabadságfok a vizsgálat elemszámából számolható ki.

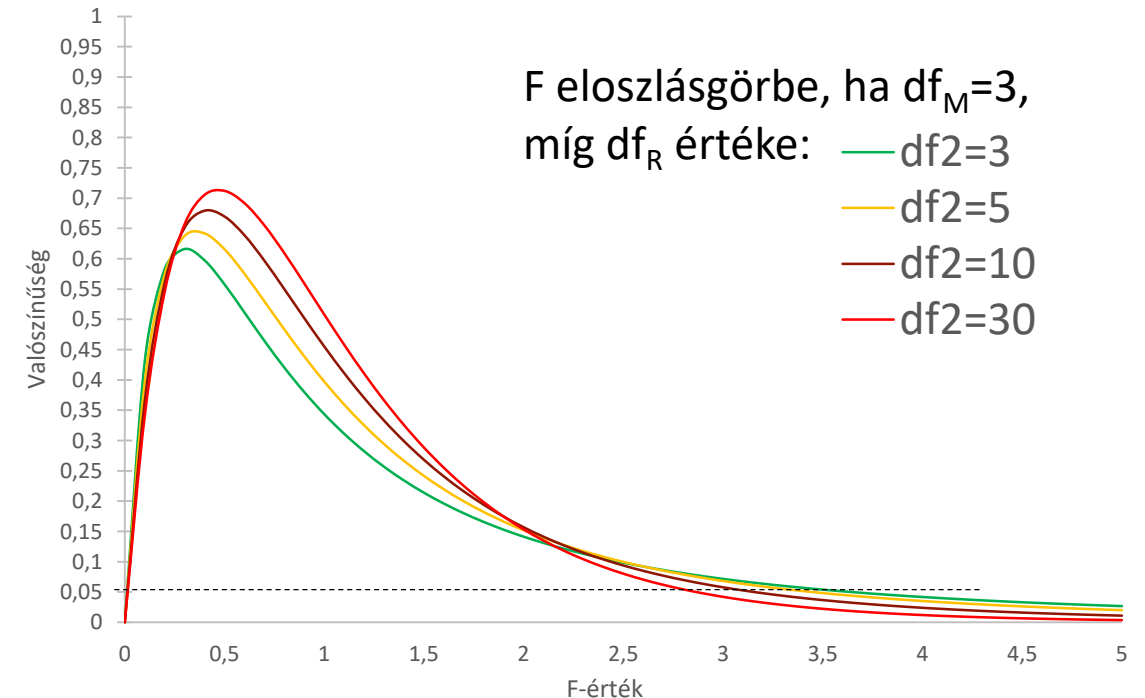
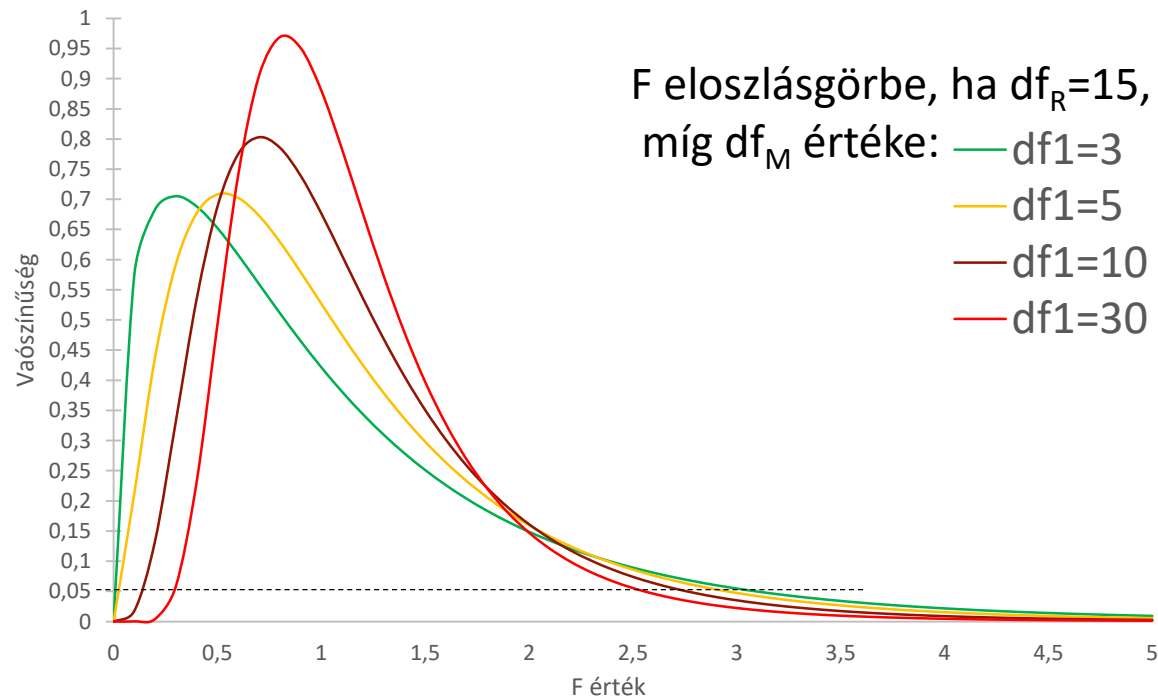
- Valószínűségekre példa:

- Egy vizsgálatban, ahol a számláló szabadságfoka 3, a nevezőé 30, annak valószínűsége, hogy az F értéke 2,9223 felett lesz 5%
- Annak valószínűsége, hogy az F értéke 3,5894 felett lesz 2,5%.
- Legtöbbször az eloszlásgörbe másik oldalához is tartozik egy 5 vagy 2,5%-os valószínűség (ez nem minden szabadságfok esetén igaz), de annak valószínűsége, hogy az égvilágon semmit nem tudtunk megmagyarázni nem igazán érdekel minket.



F-eloszlás alakja

- **df_M** (vagy df_1): A számlálóhoz tartozó szabadságfokot a modell bonyolultsága határozza meg
 - Minél bonyolultabb a modell (ezáltal nagyobb a df_M értéke), annál kisebb a valószínűsége a nagyon alacsony vagy magas F értéknek
- **df_R** (vagy df_2): A nevezőhöz tartozó szabadságfokot a vizsgálat elemszáma határozza meg
 - Minél nagyobb az elemszám (így a df_R értéke is), annál kisebb a valószínűsége a nagyon alacsony vagy magas F értéknek.
- A szabadságfokok növelésével egyre kisebb hatások is szignifikánssá válnak



Összefüggés t és F eloszlás között

- A k szabadságfokú t -eloszlás négyzete megegyezik azzal az F eloszlással, melynek modellhez tartozó szabadságfoka 1, a hibához tartozó szabadságfoka pedig k .

$$t(k)^2 \sim F(1, k)$$

- A t -próba a legegyszerűbb ANOVA (illetve a legegyszerűbb lineáris regressziós vizsgálat).
 - A modell egyetlen prediktor változót tartalmaz (a csoportosító változót) – ezért a modell szabadságfoka egy lesz.
 - Amennyivel férfiak és nők magassága különbözik egymástól, annyit tudunk a nemmel a magasságból megmagyarázni.
 - Amekkora a csoportokon belüli variancia, annyit nem tudunk a nemmel magyarázni.
- A két érték átszámolható egymásba (ha $df_M=1$):
 - A t -érték négyzete megegyezik az F -értékkel
 - Az elemzésekhez tartozó szignifikancia pedig azonos lesz mindhárom elemzésben.

