ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη σελίδα 31
Α2. Θεωρία σελίδα 148
Α3. Θεωρία σελίδα 96
Α4. αΛ, βΣ, γΛ, δΣ, εΣ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Από το ιστόγραμμα αθροιστικών συχνοτήτων και φέροντας το πολύγωνο προκύπτει ότι αυτό τέμνεται από την παράλληλη από το 50% προς τον άξονα των κλάσεων στο 25. Άρα δ = 25.

Β2. Λόγω διαμέσου δ = 25 έχω:
ν = α + 4 +3α + -6 +2α + 8 + α – 2 = 7α + 4
άρα :

$$\frac{\alpha+4}{7\alpha+4}+\frac{3\alpha-6}{7\alpha+4}=0.5 \Leftrightarrow \frac{4\alpha-2}{7\alpha+4}=0.5 \Leftrightarrow 4\alpha-2=3.5\alpha+2 \Leftrightarrow$$
$$0.5\alpha=4 \Leftrightarrow \alpha=8$$

Χρόνοι	xi	vi	fi%	Ni	Fi%	xivi	xi^2vi
[5,15)	10	12	20	12	20	120	1200
[15,25)	20	18	30	30	50	360	7200
[25,35)	30	24	40	54	90	720	21600
[35,45)	40	6	10	60	100	240	9600
Σύνολα	-	60	100	-	-	1440	39600

B3. Συμπληρώνουμε τον πίνακα με τις επιπλέον στήλες :

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{4} x_i v_i}{v} = \frac{1440}{60} = 24$$

$$s^2 = \frac{1}{v}\left\{\sum_{i=1}^{4} x_i^2 v_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^{4} x_i v_i\right)^2}{v}\right\} = \frac{39600}{60} - \left(\frac{1440}{60}\right)^2 = 660 - 576 = 84$$

άρα $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{84} = 9.17$

B4. Θεωρώ την κλάση [35, 45) με πλάτος 10 και f4%=10%.
Θεωρώ την υποκλάση [37, 45) με πλάτος 8 και f4%'=x.
Λόγω ομοιομορφίας των κλάσεων έχω: $\frac{10}{8} = \frac{10}{x} \Leftrightarrow x = 8\%$

ΘΕΜΑ Γ

Ορίζω τα ενδεχόμενα:
A={Μαθαίνει Γαλλικά}
B={μαθαίνει Ισπανικά}
Τότε $P(A) = \frac{3v}{v^2+1}$ $\quad P(B) = \frac{v+2}{v^2+1}$ $\quad P(A \cap B) = \frac{v+1}{v^2+1}$
Επιπλέον έχω:

$$\lim_{x\to -1} \frac{2\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)}{x^2+x} = \lim_{x\to -1} \frac{2(x^2+3-4)}{x(x+1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)} = \lim_{x\to -1} \frac{2(x-1)(x+1)}{x(x+1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)} =$$

$$\lim_{x\to -1} \frac{2(x-1)}{x\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)} = \frac{2(-1-1)}{-1\left(\sqrt{(-1)^2+3}+2\right)} = \frac{-4}{-4} = 1$$

Γ1.

$$P(A \cup B) = \lim_{x\to -1} \frac{2\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)}{x^2+x} = 1$$

Γ2.

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Rightarrow$$
$$1=\frac{3v}{v^2+1}+\frac{v+2}{v^2+1}-\frac{v+1}{v^2+1}\Rightarrow$$
$$1=\frac{3v+1}{v^2+1}\Rightarrow v^2+1=3v+1\Rightarrow v^2-3v=0\Rightarrow v(v-3)=0\Rightarrow$$
$$v=0\ \acute{\eta}\ v=3$$

Δεκτή η τιμή ν = 3.

Γ3.

$$P[(A-B)\cup B-A)]\overset{\substack{A-B,B-A\\ \alpha\sigma\upsilon\mu\beta\acute{\iota}\ \beta\alpha\sigma\tau\alpha}}{=}P(A-B)+P(B-A)=$$
$$\mathrm{P(A)}-P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B)=$$
$$\frac{9}{10}-\frac{4}{10}+\frac{5}{10}-\frac{4}{10}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$$

Γ4.

$$N(A\cap B)=32$$
$$P(A\cap B)=\frac{2}{5}\Leftrightarrow\frac{N(A\cap B)}{N(\Omega)}=\frac{2}{5}\Leftrightarrow 2N(\Omega)=5\cdot 32\Leftrightarrow N(\Omega)=80$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

$$f'(x)=\frac{(1+\ln^2 x)'\mathrm{x}-(1+\ln^2\mathrm{x})(\mathrm{x})'}{x^2}=\frac{2\ln x\frac{1}{x}\cdot x-1-\ln^2 x}{x^2}=$$
$$-\frac{\ln^2 x-2\ln x+1}{x^2}=-\frac{(\ln x-1)^2}{x^2}<0$$

άρα η f γνησίως φθίνουσα στο (0, +∞)

x	0	1	+∞

E'(x)	-	+
E(x)	↘	↗

Δ2. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E(x) = x \cdot f(x) = x \cdot \frac{1+\ln^2 x}{x} = 1 + \ln^2 x \qquad E'(x) = 2\ln x \frac{1}{x}$$

$$E'(x_0) = 0 \Rightarrow 2\ln x_0 \frac{1}{x_0} = 0 \Rightarrow \ln x_0 = 0 \Rightarrow x_0 = 1$$

Άρα η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0 = 1$, το $E(1) = 1 + \ln^2 1 = 1$.
και επιπλέον έχω Κ(1, 0), Λ(0, 1), Μ(1, 1), Ο(0, 0) άρα σχηματίζεται τετράγωνο.

Δ3.

$$f'(1) = -1 \quad f(1) = 1$$
$$\varepsilon_1 : y - f(1) = f'(1)(x-1)$$
$$\varepsilon_1 : y = -x + 2$$

Αφού ε//ε1 έχω λ = 1 άρα ε: y = -x + β.

$$\bar{y} = -\bar{x} + \beta \Leftrightarrow \bar{y} = -10 + \beta$$
$$s_y = |-s_x| \Leftrightarrow s_y = 2$$

Τότε $\Theta\acute{\varepsilon}\lambda\omega\ CV \le 10\% \Leftrightarrow \frac{s_y}{|\bar{y}|} \le \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{2}{|\beta - 10|} \le \frac{1}{10} \Leftrightarrow |\beta - 10| \ge 20 \Leftrightarrow$

$$\beta - 10 \ge 20 \ \acute{\eta}\ \beta - 10 \le -20 \Leftrightarrow \beta \ge 30 \ \acute{\eta}\ \beta \le -10 \Leftrightarrow$$
$$\beta \in (-\infty, -10] \cup [30, +\infty)$$

Δ4. Γνωρίζουμε ότι: $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B \Rightarrow P(A \cap B) \le P(A) \le P(A \cup B)$ και η f γνησίως φθίνουσα . Τότε: $f[P(A \cap B)] \ge f[P(A)] \ge f[P(A \cup B)]$. $T\acute{o}\tau\varepsilon$:

$f[P(A \cap B)] \ge f[P(A \cup B)]$ (1)

$f[P(A)] \ge f[P(A \cup B)]$ (2)

Προσθέτω τις (1) και (2) κατά μέλη οπότε έχω: $f[P(A \cap B)] + f[P(A)] \ge 2f[P(A \cup B)]$

Επιμέλεια

Ντολματζή Γεωργία

Γκαραβέλλας Σπύρος