2020학년도 9월 4일(수) 교육과정 평가원 해설지 대동학원 제공

수학 과목 (나형)

1. 정답 : ③

해설 : $27 \div 9 = 3$

2. 정답 : ⑤

해설 : $A = \{2, 3, 4\},\ B = \{1, a\}$

$n(A \cap B) = 1$일 때, $a = 2, 3, 4\ \ \therefore 2+3+4=9$

3. 정답 : ③

해설 : $f(1) = 4$

$g(f(1)) = 3$

4. 정답 : ⑤

해설 : $p : |x-a| \le 1,\ q : x < 10$

충분조건 $P \subset Q$ 이므로 $a-1 \le x \le a+1\ \subset\ x < 10$

$a+1 < 10\ \ \therefore a < 9$ 최댓값은 8이다.

5. 정답 : ②

해설 : 두자리의 자연수중 2의배수, 십의 자리가 6의 배수이면

일의자리수는 0,2,4,6,8 이고 십의 자리수는 1,2,3,6이다

$\therefore 4 \times 5 = 20$

6. 정답 : ①

해설 : $\displaystyle\int_0^2 (3x^2+6x)dx = \left[x^3+3x^2\right]_0^2 = 20$

7. 정답 : ②

해설 : 등차수열 a_n 이므로

$a_1 = a_3 + 8$

$a_1 = a + 2d + 8$

$d = -4$

$2a_4 - 3a_6 = 3$

$2(a_1+3d) - 3(a_1+5d) = 3$

$\therefore a_1 = 33$

$33 + (k-1)(-4) < 0$

$4k > 37$

k의 최솟값은 10이다.

8. 정답 : ④

해설 : $P(A)=\frac{7}{10}$, $P(A\cup B)=\frac{9}{10}$

$$P(B^c/A^c)=\frac{P(A^c\cap B^c)}{P(A^c)}=\frac{P(A\cup B)^c}{P(A^c)}=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{3}{10}}=\frac{1}{3}$$

9. 정답 : ①

해설 : $x>a$이고 $y=\sqrt{2x-2a}-a^2+4$

오직 하나의 사분면을 지나기 위해서는 $a\geq 0$, $-a^2+4\geq 0$ 즉 $-2\leq a\leq 2$

이다. 공통범위를 찾으면 $0\leq a\leq 2$ ∴ 최댓값 2

10. 정답 : ④

해설 : $\sqrt{9n^2+4}<\sqrt{na_n}<3n+2$에서 양변을 제곱하면

$9n^2+4<na_n<9n^2+12n+4$이고 양변을 n^2으로 나누면

$\frac{9n^2+4}{n^2}<\frac{a_n}{n}<\frac{9n^2+12n+4}{n^2}$이다.

샌드위치 정리에 의해서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=9$$

11. 정답 : ④

해설 : $y=\frac{k}{x-1}+5$에서의 점근선의 교점은 $(1,\ 5)=(1,\ 2a+1)$

따라서 $a=2$

$y=\frac{k}{x-1}+5$가 $(5,\ 3a)$을 지나므로

$6=\frac{k}{5-1}+5$

$\therefore\ k=4$

12. 정답 : ⑤

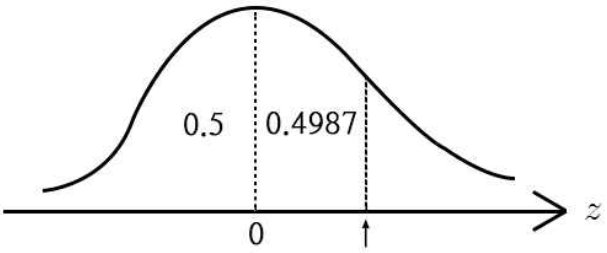
해설 : $\sum_{k=1}^{9}(k+1)^2-\sum_{k=1}^{10}(k-1)^2=\sum_{k=1}^{9}(k+1)^2-\sum_{k=1}^{9}(k-1)^2-(10-1)^2$

$=\sum_{k=1}^{9}4k-81=4\frac{9\times 10}{2}-81=99$

13. 정답 : ④

해설 : $N\left(m, \left(\frac{m}{3}\right)^2\right)$

$$P\left(X \leq \frac{9}{2}\right) = P\left(z \leq \frac{\frac{9}{2}-m}{\frac{m}{3}}\right) = 0.9987$$

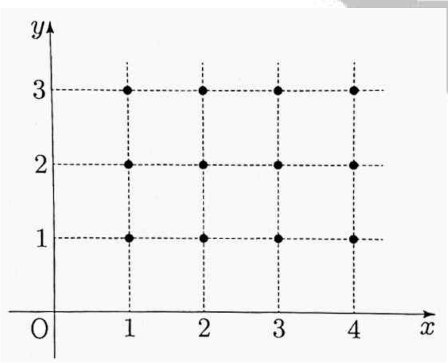


$$\frac{\frac{9}{2}-m}{\frac{m}{3}} = 3$$

$$\therefore m = \frac{9}{4}$$

14. 정답 : ⑤

해설 :



두 점 사이의 거리가 1보다 클 확률은 여사건을 이용하여

두 점 사이의 거리가 1일 확률은

가로줄 $3 \times 3 = 9$

세로줄 $2 \times 4 = 8$

$$\frac{9+8}{{}_{12}C_2} = \frac{17}{66}$$

$$1 - \frac{17}{66} = \frac{49}{66}$$

15. 정답 : ③

해설 : $y=f(x)$와 $y=-f(x-1)-1$로 둘러싸인 부분의 넓이

$f(x)=x^2-2x$와 $y=-f(x-1)-1=-(x-2)^2$을 연립하면 교점은 $x=1,\ 2$

$\int_1^2 \{-(x-2)^2-(x^2-2x)\}dx=\frac{1}{3}$

16. 정답 : ③

해설 : $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}=1$과 $\lim_{x\to -1}\frac{f(x)}{x+1}=2$에서

$f(x)=(x+1)(x^2+ax+b)$

$\lim_{x\to -1}\frac{f(x)}{x+1}=2$에서

$1-a+b=2$ 에서 $b=a+1$

$f(1)=2(1+a+b)\le 12$

$a\le 2$

$f(2)=3(4+2a+b)=3(4+4+3)\le 33$

17. 정답 : ②

해설 : $f'(x)=3x^2-6ax+3(a^2-1)=3(x-(a-1))(x-(a+1))=0$

$x=a-1$에서 극댓값을 갖는다.

$f(a-1)=4$

$a^3-3a-2=(a+1)^2(a-2)=0$ 에서

$a=-1, a=2$

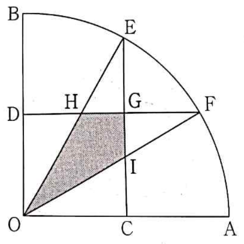
$f(-2)<0$ 이므로 $a=2$

$f(x)=x^3-6x^2+9x$

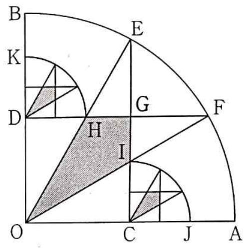
$f(-1)=2$

18. 정답 : ①

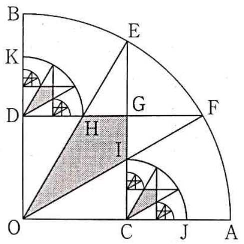
해설 :



R_1



R_2



R_3

⋯

⋯

그림에서 초항의 넓이=사각형 $OIGH == \frac{1}{2}\times 1\times\left(1-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)\times 2=\frac{3-\sqrt{3}}{3}=a_1$

닮음비가 $2:\frac{1}{\sqrt{3}}=1:\frac{1}{2\sqrt{3}}$ 이므로 넓이비는 $1:\frac{1}{12}$

대응되는 그림을 점화식으로 표현하면

$a_2=2\times\frac{1}{12}a_1+a_1$

$a_3=2\times\frac{1}{12}a_2+a_1$

⋯

$a_{n+1}=2\times\frac{1}{12}a_n+a_1$

$\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ 이므로

$\alpha=\frac{1}{6}\alpha+a_1$

$a_1=\frac{5}{6}\alpha$

$\alpha=\frac{2(3-\sqrt{3})}{5}$

19. 정답 : ①

해설 : $f(x)=4x^4+4x^3$ 일 때

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}f\left(\frac{k}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{f(x)}{1+x}dx=\int_0^1 4x^3dx=1$$

20. 정답 : ②

해설 : $(x,y,z)=(6,1,2)$ 일 확률은 빨간공 6번, 파란공1번, 노랑공 2번 나오는 확률이므로

$\frac{6}{12}\times\frac{5}{11}\times\frac{4}{10}\times\frac{3}{9}\times\frac{2}{8}\times\frac{1}{7}\times\frac{3}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{9!}{6!2!}=\frac{9}{220}$ (가)

$(x,y,z)=(6,2,2)$ 일 확률은 빨간공 5번, 파란공2번, 노랑공 2번 나오고 10번째6번째 빨간공이 나오는 확률이므로

$\frac{6}{12}\times\frac{5}{11}\times\frac{4}{10}\times\frac{3}{9}\times\frac{2}{8}\times\frac{3}{7}\times\frac{2}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{9!}{5!2!2!}=\frac{9}{110}$ (나)

(가)+(나) $=\frac{9}{220}+\frac{9}{110}=\frac{27}{220}$

21. 정답 : ⑤

해설 : ㄱ. $h(x)=(x-1)f(x)$ 이므로 $h'(x)=f(x)+(x-1)f'(x)=g(x)$ 참

ㄴ. $x=1$에서 극값 0을 가지므로 $f'(-1)=0$, $f(-1)=0$

$f'(x)=3x^2+2x+a$, $f'(-1)=3-2+a=0$, $a=-1$

$f(-1)=-1+1-a+b=0$, $b=-1$

$g(x)=4x^3-4x$

$$\int_0^1 g(x)dx=\int_0^1(4x^3-4x)dx=-1$$

ㄷ. $g(x)=\{(x-1)f(x)\}'$ 이고 $f(0)=0$이므로 $f(x)=x^3+x^2+ax$

$$\int_0^1 g(x)dx=[(x-1)f(x)]^1_0=0$$

$g(x)=4x^3+2(a-1)x-a$

1) $a>0$ $g(0)=-a(-)$, $g(1)=2+a$ (+) 이므로 사이값정리에 의해 존재한다.

2) $a<0$ $g(0)=-a$ (+) 이고 $\int_0^1 g(x)dx=[(x-1)f(x)]^1_0=0$ 이므로 $g(1)=2+a<0(-)$ 사이값정리에 의해 존재한다.

3) $a=0$ $g(x)=4x^3-2x=2x(2x^2-1)=2x(\sqrt{2}x+1)(\sqrt{2}x-1)=0$, $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 존재하므로 0과 1 사이에 적어도 하나의 실근 갖는다.

22. 정답 : 28

해설 :

23. 정답 : 6

해설 : $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$\lim_{x \to 2-} f(x) = \lim_{x \to 2+} f(x) = f(2)$

$a+2=3a-2=f(2)$

$\therefore a=2,\ f(2)=4$

24. 정답 : 8

해설 : $n=1 \rightarrow a_2+a_1=2$

$n=2 \rightarrow a_3+a_2=5$

$a_3=4$ 이므로 $\therefore a_2=1, a_1=1$

$n=3 \rightarrow a_4+a_3=8 \quad \therefore a_4=4$

$n=4 \rightarrow a_5+a_4=11 \quad \therefore a_5=7$

25. 정답 : 10

해설 : X는 정규분포 $N(m, \sigma^2)$을 따르고, 표본의 크기는 64이므로

평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$\overline{X}-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{64}} \le m \le \overline{X}+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{64}}$에서

$b-a=2\times1.96\times\frac{\sigma}{8}=4.9 \quad \therefore \sigma=10$

26. 정답 : 9

해설 : n은 자연수

$x^2-(2n-1)x+n(n-1)=0$을 인수분해하면

$x=n$ 또는 $n-1$ 이므로 $\alpha_n=n,\ \beta_n=n-1$이다.

$=(1-0)+(\sqrt{2}-1)+\cdots+(\sqrt{81}-\sqrt{80})=9$

27. 정답 : 21

해설 : $f(x)=x^3-3x^2+2x-3$ 이라 하자

$f'(x)=3x^2-6x+2$ 이고 $y=2x+k$ 와 서로 다른 두 점에서 만나야하므로 기울기가 2가 되어야한다.

즉, $f'(x)=3x^2-6x+2=2$

=> $3x^2-6x=0$

=> $3x(x-2)=0$ 따라서 $x=0$ 또는 2

이 때, $f(0)=-3, f(2)=-3$ 이므로 직선은 (0,-3) , (2,-3)을 지난다.

따라서 $y=2x+k$ 에 대입하면, $k=-3$ 또는 -7

따라서 k의 곱은 21

(다른풀이,

$k=x^3-3x^2-3$ 라 두면,

$f(x)=x^3-3x^2-3$

$f'(x)=3x^2-6x$ 이때, $3x^2-6x=0$ 이므로 $x=0 \text{ or } 2$

따라서 $f'(x)=0$이되는 점에서 두 점이 만난다.

$f(0)=-3$, $f(2)=-7$ 따라서 k의 곱은 21

28. 정답 : 75

해설 : $3^a=5^b=k^c=h$ 라 하자. $\log_3 h=a$, $\log_5 h=b$, $\log_k h=c$ 이다.

$\log c=\log(2ab)-\log(2a+b)=\log(\frac{2ab}{2a+b})$ 이므로, $c=\frac{2ab}{2a+b}$

$$\log_k h=\frac{2\log_3 h\log_5 h}{2\log_3 h+\log_5 h} \Rightarrow \frac{1}{\log_k h}=\frac{\frac{1}{\log_h 3\log_h 5}}{\frac{2}{\log_h 3}+\frac{1}{\log_h 5}}=\frac{2}{2\log_h 5+\log_h 3}=\frac{2}{\log_h 75}$$

따라서 $k=\sqrt{75}$ => $k^2=75$

29. 정답 : 49

해설 : I) 여학생은 연필 한 자루씩, 남학생은 볼펜 한 자루씩 받는 경우

여학생이 볼펜 두 자루를 나누어 받는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{H}_2={}_4\mathrm{C}_2=6$

남학생이 연필 네 자루를 나누어 받는 경우의 수는 ${}_2\mathrm{H}_4={}_5\mathrm{C}_4=5$

$\therefore 6\times5=30$

II) 여학생은 연필 한 자루씩, 남학생은 볼펜 두 자루씩 받는 경우

여학생이 볼펜을 못 받는다.

남학생이 연필 네 자루를 나누어 받는 경우의 수는 ${}_2\mathrm{H}_4={}_5\mathrm{C}_4=5$

III) 여학생은 연필 두 자루씩, 남학생은 볼펜 한 자루씩 받는 경우

여학생이 볼펜 두 자루를 나누어 받는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{H}_2={}_4\mathrm{C}_2=6$

남학생이 연필 한 자루를 나누어 받는 경우의 수는 ${}_2H_1={}_2C_1=2$

$\therefore 6\times2=12$

IV) 여학생은 연필 두 자루씩, 남학생은 볼펜 두 자루씩 받는 경우

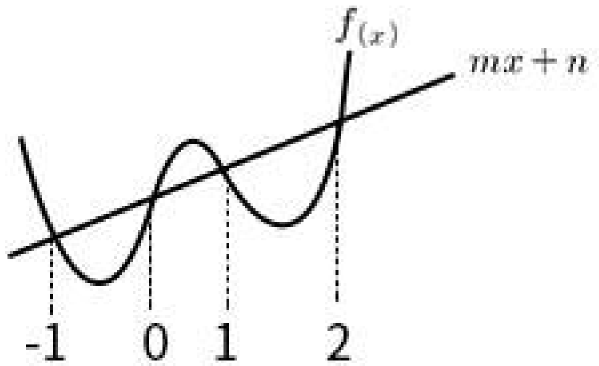
여학생이 볼펜을 못 받는다.

남학생이 연필 한 자루를 나누어 받는 경우의 수는 ${}_2H_1={}_2C_1=2$

I) II) III) IV)를 합하면 30+ 5+ 12+ 2= 49

30. 정답 : 42

해설 : 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대해
함숫값 $f(-1), f(0), f(1), f(2)$가 이 순서대로 등차수열을 이루고 x값의 변화량이 같기 때문에
x좌표가 $-1, 0, 1, 2$ 인 점은 한 직선을 지난다. (그림참조)



따라서 $f(x) = mx - n$의 해는 $-1, 0, 1, 2$이므로
$f(x) = x(x-1)(x-2)(x+1) + mx + n$ 두면
$f'(x) = (x-1)(x-2)(x+1) + x(x-2)(x+1) + x(x-1)(x+1) + x(x-1)(x-2) + m$ 이다.
$f(-1) = m+n$, $f(2) = 2m+n$, $f'(-1) = m-6$, $f'(2) = m+6$ 이 된다.
여기서 $(-1, f(-1))$에서의 접선과 $(2, f(2))$에서의 접선이 점 $(k, 0)$에서 만나므로
$0 = f'(-1)(k+1) + f(-1)$ 이고
$0 = f'(2)(k-2) + f(2)$
따라서 위의 값들을 대입하면 k에 대해 정리하면
$k = \dfrac{6-n}{m-6} = \dfrac{12-n}{m+6}$이 성립한다.
따라서 위의 식을 연립하면 $m+2n = 18$, $k = \dfrac{6-n}{12-2n}$이므로
$2k = 1$이 된다. 한편 $f(2k) = 20$이므로 $f(x)$식에 대입하면
$m+n = 20$이 되고 $m+2n = 18$ 이므로 $\therefore m = 22$, $n = -2$이 된다.
$\therefore f(4k) = f(2) = 2m - 2 = 44 - 2 = 42$