



REPÚBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA
MINISTERIO DEL PODER POPULAR PARA LA DEFENSA
UNIVERSIDAD NACIONAL EXPERIMENTAL POLITÉCNICA
DE LA FUERZA ARMADA NACIONAL BOLIVARIANA
VICERRECTORADO ACADÉMICO
DIRECCIÓN DE TECNOLOGÍA EDUCATIVA

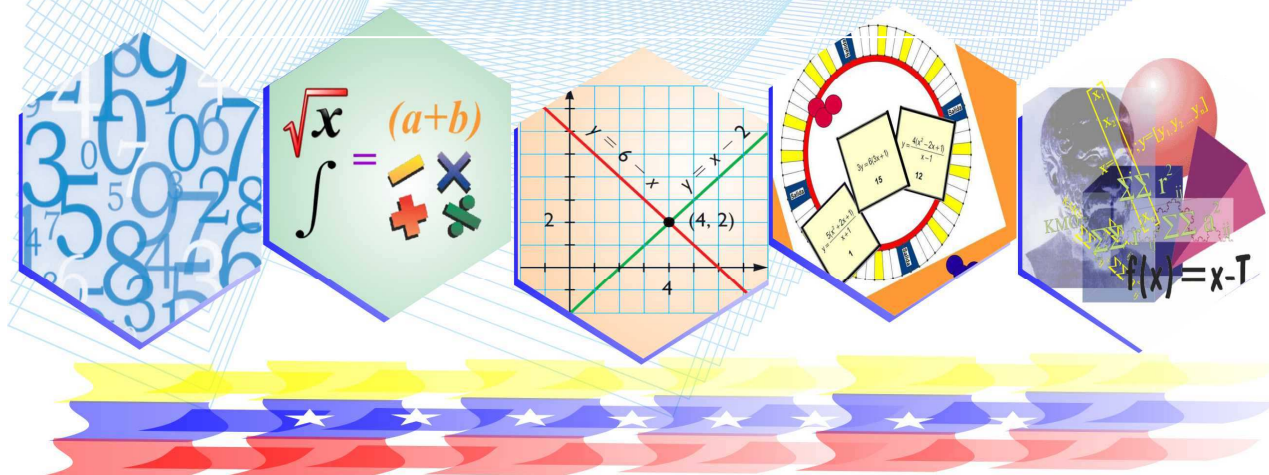
EVAP
Entornos Virtuales
de Apoyo



**Lecturas de apoyo didáctico
de la unidad curricular:**

Matemática

Unidad 3: Ecuaciones



**UNIVERSIDAD NACIONAL EXPERIMENTAL POLITÉCNICA DE LA FUERZA
ARMADA NACIONAL BOLIVARIANA
(UNEFA)**

**VICERRECTORADO ACADÉMICO
DIRECCIÓN DE TECNOLOGÍA EDUCATIVA**



EL PRESENTE MATERIAL SE ENCUENTRA EN PROCESO DE EVALUACIÓN FORMATIVA, AGRADECEMOS
ENVIAR COMENTARIOS U OBSERVACIONES QUE PERMITAN LA OPTIMIZACIÓN DEL MISMO

Av. La Estancia con Av. Caracas y Calle Holanda frente al Edificio Banaven (Cubo Negro), Chuao.
Código Postal 1061 Caracas, Venezuela

unefa.vac.tecnologiaeducativa@gmail.com



3.- ECUACIONES

Resolver problemas donde se determine su solución por medio de ecuaciones en el conjunto de los números reales

- | | |
|--|-----------|
| 3.1- Ecuación: Definiciones preliminares, Clases de Ecuaciones, Solución de una ecuación, Tipos de Ecuaciones, Ecuaciones Lineales, Ecuaciones Racionales y Resolución de problemas. | 6 |
| 3.2- Ecuación de 2do. Grado: Solución y Aplicaciones directas. | 16 |
| 3.3- Ecuación Radical: Definición y Solución. | 23 |
| 3.4- Ecuación con Valor Absoluto: Definición, Propiedades y Solución. | 26 |
| 3.5- Sistema de Ecuaciones. Métodos de resolución de sistemas de ecuaciones. | 31 |

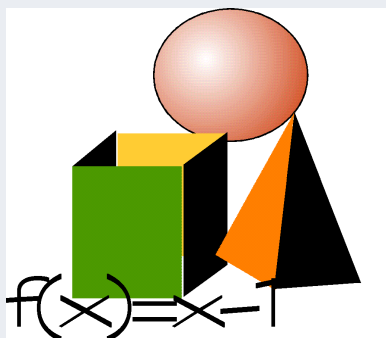
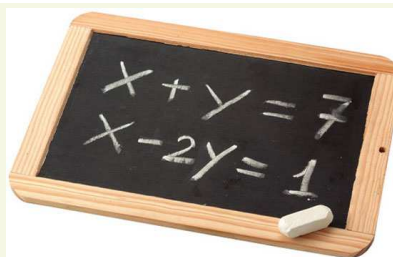
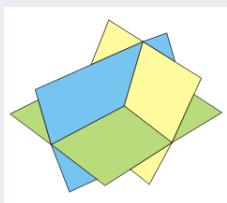


Programa de Apoyo Didáctico

Matemáticas

ECUACIONES

MOTIVACIÓN



Muchas situaciones de nuestro entorno profesional, laboral o cotidiano, presentan relaciones entre diferentes valores, los cuales pueden expresarse por medio de una fórmula, expresión o ecuación. Algunas veces, esta representación permite facilitar la comprensión de la misma y ofrece la posibilidad de darle una respuesta.

En nuestro caso nos ocuparemos de problemas o situaciones simples y necesitaremos manejar eficientemente un conjunto de herramientas fundamentales de las aplicaciones matemáticas, las cuales nos permiten obtener una solución particular de la misma.

Consideremos la siguiente situación (con los números

“**R**” es el resultado que nos dan. Una vez escogido **n** el valor **R** queda determinado por las operaciones especificadas mediante la fórmula; **R** se denomina **variable dependiente** en razón de que su valor depende del valor **n**.

La variable **n** es el número pensado. Como la variable **n** es de libre escogencia, ella se llama **variable independiente**.

que utilizamos para contar): se trata del juego o acertijo

“Piensa un número”:

- 1- Piensa un número
 - 2- Multiplícalo por 2
 - 3- Agrégale a lo obtenido 5
 - 4- Multiplica el resultado anterior por 5
 - 5- Súmale 10 a la cantidad obtenida
 - 6- Multiplica el nuevo resultado por 10
 - 7- Dime el resultado y te daré el número que pensaste
- ¿Cómo funciona el truco?

Para ver qué hay detrás de este acertijo, basta transformar las frases anteriores en su equivalente simbólico; es decir, construir las expresiones matemáticas que las representan.

Lo primero que haremos es simbolizar el número desconocido (el que piensa nuestro adversario) con una letra. Pongamos por caso **n**. A continuación convertimos todas las instrucciones a expresiones matemáticas:

$$R(n)=100n + 350$$

Esta dependencia se indica por **R(n)** y es lo que en matemática se denomina una **función**.

Tomado con fines instruccionales:

Fundación Polar. El Mundo de la Matemática. Fascículo 6. Ecuaciones, pp.5-6. Caracas: Últimas Noticias.

Objetivo

Resolver problemas donde se determine su solución por medio de ecuaciones en el conjunto de los números reales

Para el logro de este objetivo se contemplan los siguientes temas:

Contenido

Terminología: Definición, igualdad, variable, grado de una ecuación.

Solución de una ecuación: Lineal, Cuadrática, Radical, Valor absoluto.

Planteamiento y resolución de problemas.

INSTRUCCIONES:

Queremos facilitarle la mayor comprensión de los contenidos tratados, para ello te recomendamos lo siguiente:

- Familiarízate con toda la información que se te presenta en esta página y no ignore ningún aspecto.
- Tenga claro lo que se aspira lograr con cada tema y los conocimientos previos que el mismo exige.
- Realiza la lectura del tema presentado y analiza cada paso cumplido para solucionar los ejercicios. No continúes al paso siguiente si no has comprendido el previo.
- Resuelve nuevamente cada ejemplo por tu cuenta y compara los resultados.
- A medida que estés resolviendo los ejemplos, analiza el procedimiento aplicado en cada paso.
- Sigue los procedimientos sugeridos en los ejemplos presentados.
- Intercambia ideas, procedimientos y soluciones con otros estudiantes.
- Puedes acceder a uno de los temas, haciendo link en el título.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Pre requisitos

Números Racionales

Operaciones con números fraccionarios:

- Adición y sustracción con igual o diferente denominador,
- Multiplicación y división de un número entero por un número fraccionado.

Expresiones

Algebraicas:

- Términos semejantes
- Agrupación de términos semejantes, para sumar y restar.

Comprobación

Vamos a resolver las siguientes expresiones :

$$i. \quad 3x - 2\left(\frac{5}{4}x - 4\right) + 4\left(\frac{x}{3} - \frac{5}{6}\right),$$

Aplicamos la propiedad distributiva a los términos que están entre paréntesis:

$$3x - \frac{10}{4}x + 8 + \frac{4}{3}x - \frac{20}{6},$$

Simplificamos aquellas fracciones no simples.

$$3x - \frac{5}{2}x + 8 + \frac{4}{3}x - \frac{10}{3},$$

Ahora agrupamos términos semejantes:

$$\left(3x - \frac{5}{2}x + \frac{4}{3}x\right) + \left(8 - \frac{10}{3}\right)$$

$$\frac{18x - 15x + 8x}{6} + \left(\frac{24 - 10}{3}\right) \Rightarrow \frac{11}{6}x + \frac{14}{3}$$

$$ii. \quad 2\left(\frac{4}{5}x - \frac{8}{3}y + \frac{3}{8}\right) + 5\left(\frac{3}{2}x + \frac{8}{5}y - \frac{5}{3}\right),$$

Aplicamos la propiedad distributiva a los términos que están entre paréntesis:

$$\frac{8}{5}x - \frac{16}{3}y + \frac{6}{8} + \frac{15}{2}x + \frac{40}{5}y - \frac{25}{3},$$

Simplificamos aquellas fracciones no simples:

$$\frac{8}{5}x - \frac{16}{3}y + \frac{3}{4} + \frac{15}{2}x + 8y - \frac{25}{3},$$

Ahora agrupamos términos semejantes y resolvemos:

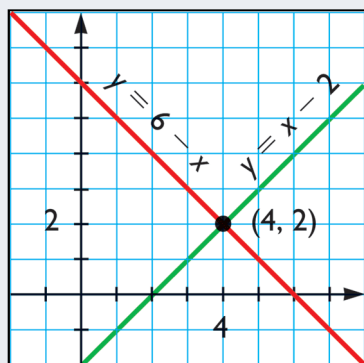
$$\left(\frac{8}{5}x + \frac{15}{2}x\right) + \left(8y - \frac{16}{3}y\right) + \left(\frac{3}{4} - \frac{25}{3}\right)$$

$$\left(\frac{16x + 75x}{10}\right) + \left(\frac{24y - 16y}{3}\right) + \left(\frac{9 - 25}{12}\right)$$

$$\left(\frac{91x}{10}\right) + \left(\frac{8y}{3}\right) + \left(\frac{-16}{12}\right) = \frac{91}{10}x + \frac{8}{3}y - \frac{4}{3}$$

DESARROLLO

ECUACIONES: Definiciones Preliminares



Una de las grandes diferencias entre **Ecuación** e **Identidad**, es que **las identidades se demuestran**, mientras que **las ecuaciones se resuelven**.

Igualdad: es una relación donde dos cantidades o expresiones algebraicas tienen el mismo valor.

Ejemplos: $5 = 3 + 2$; $a = b - c$; $3x + 7 = 16$.

Ecuación: es una igualdad entre dos expresiones algebraicas que es verificada solamente para valores particulares de las variables contenidas en ellas.

Ejemplos: a) $8x + 9 = 25$ b) $t^2 - 9t + 1 = t + 3$ c) $x + y = 2y - 5$.

Identidad: es una igualdad que se verifica para cualquier valor de las variables. Así tenemos por ejemplo que estas son identidades:

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \longrightarrow \text{Producto notable}$$

$$\text{Sen}^2 \alpha + \text{Cos}^2 \alpha = 1 \longrightarrow \text{Identidad fundamental de la trigonometría}$$

$$-3(2x + 1) = -6x - 3 \longrightarrow \text{Propiedad Distributiva}$$

Incógnitas: son las variables que aparecen en una ecuación algebraica, cuyo valor desconocemos y generalmente se denotan por las últimas letras del alfabeto x, y, z, w , etc.

Miembros de una ecuación: son las dos expresiones algebraicas que forman la ecuación. El primer miembro está al lado izquierdo de la igualdad y el segundo miembro se encuentra al lado derecho. Así la ecuación:

$$\underbrace{8x + 9}_{\text{Lado izquierdo}} = \underbrace{25}_{\text{Lado Derecho}}$$



En esta unidad trataremos estas ecuaciones pero de una variable.

En este caso se dice que $x = 2$ es la solución o raíz de la ecuación. Si le damos a la variable x un valor diferente de 2, la igualdad no se cumple.

Clases de Ecuaciones:

- **Ecuación Numérica:** es una ecuación donde las únicas letras son las variables o incógnitas.

Así tenemos que $8x + 9 = 25$, $y^2 - y - 3 = 1$ son ecuaciones numéricas.

- **Ecuación literal:** Es una ecuación que además de las incógnitas tiene otras letras, llamadas parámetros, que representan cantidades conocidas.

Así las ecuaciones: $ax^2 + bx + c = 0$, $ax + dy = c + b$ son ecuaciones literales donde los parámetros son a, b, c, d y x es la variable.

Solución o Raíz de una Ecuación:

Son los valores que atribuidos o sustituidos en las variables o incógnitas, producen una igualdad entre los dos miembros de la ecuación. Así para:

$8x + 9 = 25$, el valor de $x = 2$ hace la ecuación verdadera, es decir, se cumple la igualdad:

$$8(2) + 9 = 16 + 9 = 25.$$

Resolver una ecuación, consiste en hallar el valor de la incógnita de tal manera que, al sustituirla en la ecuación, se cumpla la igualdad. Para hacer esto, utilizamos el proceso descrito a la derecha de este texto.

Resolución de una Ecuación

Es hallar la o las soluciones o raíces que satisfacen la ecuación. A continuación vamos a enunciar las reglas básicas para resolver una ecuación.

Regla 1: Si a los dos miembros de una ecuación se le suma o resta una misma cantidad (positiva o negativa), la igualdad no se altera.

Regla 2: Si los dos miembros de una ecuación se multiplican o se dividen por una misma cantidad diferente de cero (positiva o negativa), la igualdad no se altera.

Regla 3: Si los dos miembros de una ecuación se elevan a una misma potencia, la igualdad no se altera.

Regla 4: Si los dos miembros de una ecuación se le extrae una misma raíz, la igualdad no se altera.

Regla 5: Cualquier término de una ecuación se puede pasar de un miembro a otro, cambiándole el signo. Esta regla se llama transposición de términos.

Cambio de Signo en una Ecuación:

Los signos de todos los términos de una ecuación se pueden cambiar sin que la ecuación varíe, pues equivale a multiplicar los dos lados o miembros de la ecuación por (-1) . Así la ecuación: $5x - 3 = 8$ es equivalente a: $(-1)(5x - 3) = (-1)8$, es decir, la ecuación $5x - 3 = 8$ es equivalente a la ecuación $-5x + 3 = -8$

Tipos de ecuaciones:

Los tipos de ecuaciones de uso más frecuente son:

a) **Polinomiales:** las cuales pueden ser de una o varias variables.

El grado del polinomio representa el grado de la ecuación, este es el mayor exponente que tiene la incógnita. Por ejemplo:

$$2x - 18 = 0 \quad \text{es de primer grado } (x)$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \quad \text{es de segundo grado } (x^2)$$

$$y^3 + 2y^2 - y - 2 = 0 \quad \text{es de tercer grado } (y^3)$$

$$n^4 - 4 = 0 \quad \text{es de cuarto grado } (n^4)$$

b) **Racionales**: son aquellas que contienen expresiones algebraicas racionales, tales como:

$$\text{b.1.- } \frac{x-2}{x+2} = \frac{x-4}{x+4};$$

$$\text{b.2.- } \frac{3x^2}{5x-3} + 4x = 2x$$

c) **Radicales**: son aquellas ecuaciones que tienen la variable o incógnita dentro de una o más expresiones radicales, también son llamadas ecuaciones radicales. Así, tenemos:

$$\text{c.1.- } \sqrt{x+7} + \sqrt{x-1} = 2\sqrt{x+2}$$

$$\text{c.2.- } \sqrt[3]{5x^2+1} = x+3$$

d) **Ecuaciones con Valor Absoluto**: son aquellas ecuaciones donde las variables o incógnitas están dentro de un valor absoluto, tales como:

$$\text{d.1.- } |3x-1| = 5x+4 \quad \text{d.2.- } |5x^3-3| - \frac{2}{3} = 0$$

El objetivo es despejar la incógnita “**x**”, hasta encontrar el valor de dicha incógnita.

Llevamos la ecuación a la **forma general**. Como es una ecuación racional igualada a cero, **ésta se cumple sólo si el numerador es igual a cero**.

Observa que el denominador 3 en el lado derecho no puede pasar a multiplicar al lado izquierdo porque no es denominador de **todos** los términos. Por eso te sugerimos sacar el m.c.m. de ambos lados de la ecuación y resolver.

Ecuaciones Lineales:

Ejemplo 1. : Resuelva la ecuación $2x + 3 = 0$, y simplifica el resultado si es posible.

$$2x + 3 = 0$$

$$2x = 0 - 3$$

$$2x = -3$$

$$x = \frac{-3}{2}$$

Pasamos el 3 para el otro lado de la ecuación restando y resolvemos el lado derecho

Pasamos el factor 2 que está multiplicando para el otro lado de la ecuación dividiendo

Respuesta: la solución de $2x + 3 = 0$ es $x = -\frac{3}{2}$

Ejemplo 2. Resuelva la ecuación $\frac{7x-2}{4} = 0$,

y simplifica el resultado si es posible.

$$\Rightarrow 7x - 2 = 0 \Rightarrow 7x = 0 + 2 \Rightarrow x = \frac{2}{7}$$

Respuesta: La solución de $\frac{7x-2}{4} = 0$ es $x = \frac{2}{7}$.

Ejemplo 3. : Resuelva la ecuación

$$\frac{8x-3}{2} = 3x - \frac{5}{3}, \text{ y simplifique el resultado si}$$

es posible.

$$\frac{8x-3}{2} = 3x - \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{8x-3}{2} = \frac{3x}{1} - \frac{5}{3}$$

$$\frac{3 \cdot (8x-3)}{6} = \frac{6 \cdot 3x - 2 \cdot 5}{6} \Rightarrow 24x - 9 = 18x - 10$$

Respuesta: La solución de $\frac{8x-3}{2} = 3x - \frac{5}{3}$ es

$$x = -\frac{1}{6}$$

Ambos lados de la igualdad tienen una fracción, por lo tanto, pasamos lo que está dividiendo en un lado a multiplicar en el otro lado

Puedes observar que en este ejemplo se presenta una **ecuación literal de primer grado**. Para resolverla, aplicaremos las mismas reglas que usamos en las ecuaciones numéricas de los ejemplos anteriores.

Para despejar la variable x de la ecuación, debemos tomar en cuenta que el coeficiente del mismo $15a$, pasa para el otro lado de la ecuación dividiendo, por lo tanto, el literal a tiene que ser diferente de cero ($a \neq 0$).

Ecuaciones Racionales:

Ejemplo 4. Resuelve la ecuación $\frac{5}{2x+1} = \frac{7}{2x-1}$, y simplifica el resultado si es posible.

$$\frac{5}{2x+1} = \frac{7}{2x-1}$$

$$\Rightarrow 5(2x-1) = 7(2x+1)$$

$$10x - 5 = 14x + 7 \Rightarrow 10x - 14x = 7 + 5$$

$$10x - 14x = 7 + 5$$

$$\Rightarrow -4x = 12 \Rightarrow x = \frac{12}{-4}$$

Finalmente simplificamos $12/-4 = -3$

Respuesta: La solución de $\frac{5}{2x+1} = \frac{7}{2x-1}$ es

$$x = -3$$

Ejemplo 5. Resuelve la ecuación $\frac{ax}{2} = 3ax - \frac{2}{3}$, y simplifica el resultado si es posible.

$$\left. \begin{aligned} \frac{ax}{2} &= 3ax - \frac{2}{3} \\ \Rightarrow \frac{3 \cdot (ax)}{6} &= \frac{6 \cdot 3ax - 2 \cdot 2}{6} \end{aligned} \right\}$$

Se calcula el m.c.m.

$$\Rightarrow 3ax = 18ax - 4 \Rightarrow 4 = 18ax - 3ax$$

$$\Rightarrow 4 = 15ax \Rightarrow 4 = 15ax \Rightarrow \frac{4}{15a} = x, \text{ es decir } x = \frac{4}{15a}$$

si $a \neq 0$.

Respuesta: La solución de $\frac{ax}{2} = 3ax - \frac{2}{3}$ es

$$x = \frac{4}{15a} \text{ si } a \neq 0$$



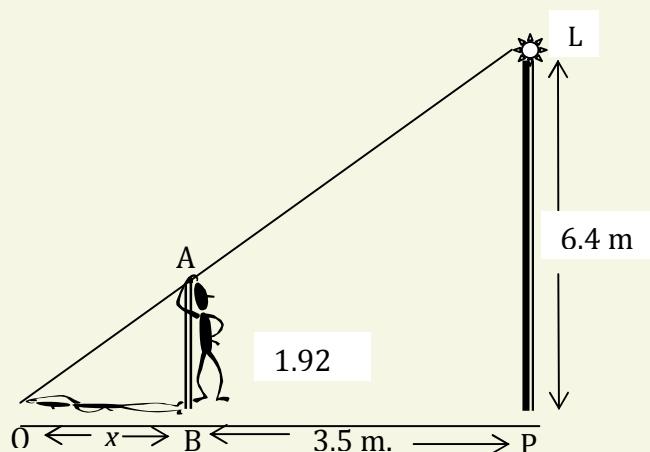
Resolución de Problemas

Como estudiante de nivel superior, sabemos que eres capaz de encontrar la solución a los ejercicios o problemas planteados, utilizando los procedimientos adecuados. No obstante, te brindamos aquí, algunas sugerencias que pueden servirte de guía para que puedas resolver este tipo de problemas o modelos.

- 1. Lee “cuidadosamente” el enunciado del problema.*
- 2. Vuelve a leer el enunciado **tantas veces sean necesarias**, hasta comprender perfectamente los datos que ofrece el problema y lo que te piden encontrar.*
- 3. De ser necesario, acostúmbrate a realizar un bosquejo de la situación planteada, en forma gráfica o en un planteamiento inicial*
- 4. Identifica con variables (letras) los datos e incógnitas del problema.*
- 5. Ubica los datos del enunciado y relaciónalos matemáticamente mediante ecuaciones o fórmulas (algunos datos o fórmulas no se dan en forma explícita en los problemas, se supone que debes conocerlas. Ej.: área, volumen, velocidad, aceleración gravitacional, etc.).*
- 6. Resuelve las ecuaciones para obtener un resultado. Utiliza el método correspondiente. en este caso, ecuación de primer grado.*
- 7. Verifica que el resultado obtenido en el paso 6, corresponda a las premisas y soluciones del problema*
- 8. Analiza si la respuesta es razonable.*
- 9. Responde exactamente lo que te han solicitado*

Hacemos una **representación gráfica** de la situación

Ejemplo 6. *Un hombre de 1,92 mts. de altura camina hacia un poste de luz que mide 6,4 m. de altura. ¿Cuál es la longitud de la sombra del hombre en el piso, cuando él está a 3,5 m. de distancia del poste?*



Hemos llamado x a la longitud de la sombra del hombre. Observamos que los triángulos $\triangle LOP$ y $\triangle AOB$ son triángulos semejantes, esto implica que sus lados son proporcionales, es decir:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{LP}}{\overline{OP}}, \text{ entonces } \frac{1,92}{x} = \frac{6,4}{x + 3,5}$$

despejando tenemos:

$$1,92(x + 3,5) = (6,4)x \Rightarrow 1,92x + 6,72 = 6,4x$$

$$6,72 = 6,4x - 1,92x \Rightarrow 6,72 = 4,48x$$

$$4,48x = 6,72$$

$$x = \frac{6,72}{4,48} \Rightarrow x = 1,5$$

Respuesta: La sombra mide 1,5 m. cuando el hombre está a 3,5 m. del poste.

Damos por sentado que el estudiante ha seguido los **pasos 1 y 2**. El **paso 3** no es necesario, pues no se requiere ningún esquema gráfico. Debemos traducir esta "mal intencionada" descripción del problema en símbolos matemáticos.

Ejemplo 7. **José** Luís quiere salir a cenar con su novia Lisbeth, quien estudia en la UNEFA. Para evitar sorpresas, ella le pregunta: "¿cuánto dinero tienes?", y José Luis en vez de dar una respuesta directa, decide probar la habilidad de Lisbeth y responde: "Si tuviera 50 Bs.F. más de lo que tengo y después duplicara esa cantidad, tendría 350 Bs.F. más de lo que tengo". Lisbeth, después de pensarlo, decide demostrarle que sí puede calcular cuánto dinero tiene José Luis, con el siguiente procedimiento:

Paso 4: Identificar el objetivo del problema.

Cantidad de dinero que tiene José Luis: x

Paso 5: Obtener datos y relacionarlos matemáticamente.

Si tuviera 5Bs.F. más de lo que tengo: $x + 50$

y después duplicara esa cantidad: $2(x + 50)$

tendría *35 más de lo que tengo*: $x + 350$

Paso 6: Procesamos los datos matemáticamente y resolviendo:

Comprobamos lo que José Luis dice:

$2(x + 50)$ y $x + 350$ son equivalentes.

Es importante no continuar el ejercicio, si no ha comprendido la relación de estos datos.

Luego, tenemos que: $2(x + 50) = x + 350$

Y resolvemos la ecuación

$$2(x + 50) = x + 350 \Rightarrow 2 \cdot x + (2) \cdot 50 = x + 350$$

$$2x - x = 350 - 100 \Rightarrow x = 250$$

Es decir, la cantidad de dinero que tiene José Luis es de 250 Bs.F.

Paso 7: Verificamos:

Si tuviera 50 Bs.F. más de lo que tengo: 300

y después duplicara esa cantidad : 600

tendría 350 más de lo que tengo: 350+250= 600

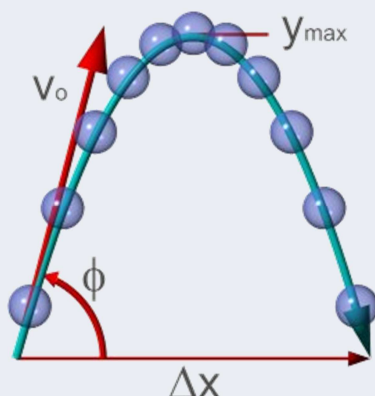
Paso 8: Analizamos el resultado.

Este resultado es lógico y cumple con las condiciones del enunciado.

Paso 9: Aquí tenemos la respuesta.

Respuesta: José Luis tiene Bs.F. 250 (lo cual él cree que es suficiente para una cena con Lisbeth).

ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO



Es una ecuación polinómica cuyo grado es dos (el mayor exponente de la variable es 2). Por ejemplo

a) $x^2 - 2x + 3 = 0$ b) $3y^2 - y = 2$

c) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4} = 2x$

En los ejemplos propuestos, (a) está ordenada e igualada a cero; (b) está ordenada pero no está igualada a cero; y (c) no está ordenada ni igualada a cero.

Solución de una ecuación de segundo grado

Para hallar la solución de una ecuación cuadrática (segundo grado) es recomendable ordenarla en forma descendente e igualarla a cero, así tendremos:

a) $x^2 - 2x + 3 = 0$ b) $3y^2 - y - 2 = 0$

c) $\frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{4} = 0$

Resolver una ecuación cuadrática implica encontrar los valores de la variable que al reemplazarla satisfagan la ecuación. No todas las ecuaciones cuadráticas tienen solución dentro del conjunto de los números reales; para algunas ecuaciones la solución pertenece al conjunto de los números imaginarios (lo cual está fuera del objetivo de esta unidad).

La **ecuación general** de segundo grado con una incógnita, se expresa como:

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ donde:}$$

Tenga presente que el denominador “2a” divide a **toda** la expresión y no sólo a la raíz cuadrada.

“a” es el coeficiente de x^2 , $a \neq 0$

“b” es el coeficiente de x

“c” es el término independiente.

La solución (si existe) de una ecuación de segundo grado, se obtiene mediante la **fórmula cuadrática o resolvente**:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

La expresión “ $b^2 - 4ac$ ” se denomina el discriminante (Δ) de la ecuación cuadrática y **determina la naturaleza de las soluciones** de la ecuación. Se nos pueden presentar tres casos:

- Si $\Delta = b^2 - 4ac$ es **positivo**, la ecuación **tiene dos soluciones reales**.
- Si $\Delta = b^2 - 4ac$ es **cero**, la ecuación **tiene sólo una solución real**.
- Si $\Delta = b^2 - 4ac$ es **negativo**, la ecuación **no tiene solución** en los números reales.

Como el discriminante resultó positivo, la ecuación tiene dos soluciones reales.

Ejemplo 1. Hallar la solución de la ecuación

$$2x^2 + 3x - 2 = 0$$

Determinamos los valores de a, b y c .

$$a = 2 \qquad b = 3 \qquad c = -2$$

Luego calculamos el valor del discriminante:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (3)^2 - 4(2)(-2) \Rightarrow \Delta = 9 + 16 \Rightarrow \Delta = 25$$

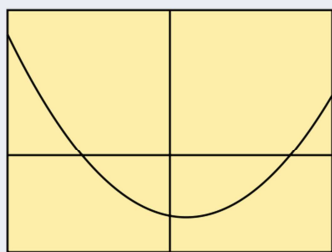
Reemplazando en la “resolvente”, tenemos:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2(2)};$$

Para la 1era. solución tomamos el signo positivo de la raíz cuadrada.

Para la 2da. solución tomamos el signo negativo de la raíz cuadrada.

$$ax^2 + bx + c = 0$$



$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Como el discriminante resultó positivo, la ecuación tiene dos soluciones reales.

Considerando el signo positivo de la raíz cuadrada, obtenemos la primera solución

Primera solución

$$x_1 = \frac{-3+5}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Segunda solución:

$$x_2 = \frac{-3-5}{4} = \frac{-8}{4} = -2$$

Las soluciones de la ecuación son $\frac{1}{2}$ y -2 , pues al reemplazar estos valores en la ecuación original, ésta se cumple.

Respuesta: Las soluciones de $2x^2 + 3x - 2 = 0$ son $x = \frac{1}{2}$ y $x = -2$

Ejemplo 2. : Resuelva $x^2 - \frac{5}{6}x - 1 = 0$

Determinamos los valores de a, b y c .

$$a = 1 \quad b = -\frac{5}{6} \quad c = -1$$

Luego calculamos el valor del discriminante:

$$\Delta = b^2 - 4ac = \left(-\frac{5}{6}\right)^2 - 4(1)(-1) \Rightarrow \Delta = \frac{25}{36} + 4 \Rightarrow \Delta = \frac{169}{36}$$

Reemplazando en la “resolvente”, tenemos

$$x = \frac{-\left(-\frac{5}{6}\right) \pm \sqrt{\frac{169}{36}}}{2(1)} \Rightarrow x = \frac{\frac{5}{6} \pm \frac{13}{6}}{2}$$

$$x_1 = \frac{\frac{5}{6} + \frac{13}{6}}{2} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$$

$$x_2 = \frac{\frac{5}{6} - \frac{13}{6}}{2} = \frac{-8}{12} = -\frac{2}{3}$$

Considerando el signo negativo de la raíz cuadrada, obtenemos la segunda solución.

Respuesta: Las soluciones de $x^2 - \frac{5}{6}x - 1 = 0$ son

$$x = \frac{3}{2} \text{ y } x = -\frac{2}{3}$$

Determinamos los valores de a , b y c .

Luego calculamos el valor del discriminante:

Ejemplo 3. Resuelve $9x^2 + 12x + 4 = 0$

$$a = 9 \qquad b = 12 \qquad c = 4$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (12)^2 - 4(9)(4) \rightarrow \Delta = 144 - 144 \Rightarrow \Delta = 0$$

Como el discriminante es igual a cero, la ecuación tiene **una** solución real.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; \quad x = \frac{-12}{2(9)} = \frac{-12}{18}; \quad x = -\frac{2}{3}$$

La solución de la ecuación es $-\frac{2}{3}$, pues al reemplazar este valor en la ecuación original, ésta se cumple. Compruébalo.

Ejemplo 4. Resuelve la ecuación $2x^2 - 3x + 5 = 0$

Determinamos los valores de a , b y c .

$$a = 2 \qquad b = -3 \qquad c = 5$$

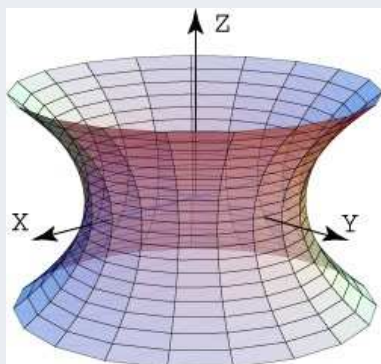
Luego calculamos el valor del discriminante:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(2)(5) \Rightarrow \Delta = 9 - 40 \Rightarrow \Delta = -31$$

Como el discriminante es negativo, la ecuación **no tiene** solución real.

Respuesta: la ecuación $2x^2 - 3x + 5 = 0$, **no tiene**

solución en los números reales.



Aplicaciones directas de la ecuación de segundo grado

La solución de una ecuación de segundo grado es una de las herramientas más útiles en matemática, pues con mucha frecuencia se presenta en ejercicios de diferente índole. En este apartado estudiaremos algunas aplicaciones directas.

Ejemplo 5. :Factorice la ecuación

$$2x^2 - 5xy - 3y^2 = 0$$

En este tipo de ecuaciones (con dos o más variables) debemos elegir una de las variables como básica y determinar su valor en función de las otras. Digamos que “ x ” es nuestra variable base, entonces reescribimos la ecuación:

$$2x^2 - (5y)x - 3y^2 = 0,$$

donde $a = -2$, $b = -5$ y $c = -3y^2$

Calculamos el valor del discriminante:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5y)^2 - 4(2)(-3y^2) \Rightarrow \Delta = 25y^2 + 24y^2 \\ \Rightarrow \Delta = 49y^2$$

Como el discriminante resultó positivo, para cualquier valor de y , la ecuación tiene dos soluciones reales.

Reemplazando en la “**resolvente**”, tenemos

$$x = \frac{5y \pm \sqrt{49y^2}}{2(2)} \Rightarrow x = \frac{5y \pm 7y}{4}$$

Donde

$$x_1 = \frac{5y + 7y}{4} = \frac{12y}{4} = 3y$$

$$x_2 = \frac{5y - 7y}{4} = \frac{-2y}{4} = -\frac{1}{2}y.$$

Luego las soluciones son $x = 3y$ y $x = -\frac{1}{2}y$. Por lo tanto, la factorización queda de la siguiente forma:

$$2x^2 - 5xy - 3y^2 = 2(x - 3y)\left(x + \frac{1}{2}y\right) =$$

$$(x - 3y)(2x + y)$$

$$\text{Respuesta: } 2x^2 - 5xy - 3y^2 = (x - 3y)(2x + y)$$

De la definición del discriminante, sabemos que cuando $b^2 - 4ac$ es igual a cero (0), la ecuación tiene una sola raíz. Por lo tanto, el primer paso es determinar los valores de a, b y c

Ahora calculamos el valor del discriminante

Ejemplo 6. Encuentra los valores de “ x ”, tal que $x^2 + dx + 3 - d = 0$, tenga sólo una raíz.

Solución:

$$a = 1, \quad b = d \quad y \quad c = 3 - d$$

Luego se sustituyen en el discriminante e iguala éste a cero.

$$\begin{aligned} \Delta = 0 &\Rightarrow b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow (d)^2 - 4(1)(3 - d) = 0 \\ &\Rightarrow d^2 - 4(3 - d) = 0 \Rightarrow d^2 - 12 + 4d = 0 \Rightarrow d^2 + 4d - 12 = 0 \end{aligned}$$

Resolvemos esta ecuación resultante, utilizando la fórmula cuadrática,

$$d^2 + 4d - 12 = 0, \text{ donde } a = 1 \quad b = 4 \quad c = -12$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (4)^2 - 4(1)(-12) \Rightarrow \Delta = 16 + 48 \Rightarrow \Delta = 64$$

Como el discriminante resultó positivo, la ecuación tiene dos soluciones o raíces reales. Reemplazando en la “resolvente”, tenemos

$$d = \frac{-(4) \pm \sqrt{64}}{2(1)} \Rightarrow d = \frac{-4 \pm 8}{2}$$

Considerando el signo positivo de la raíz cuadrada, obtenemos la primera solución:

$$d_1 = \frac{-4+8}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Ahora, considerando el signo negativo de la raíz cuadrada, obtenemos la segunda solución:

$$d_2 = \frac{-4-8}{2} = \frac{-12}{2} = -6$$

Las soluciones de la ecuación son $d = 2$, $d = -6$, es decir, que los valores de “ d ” que hacen que la ecuación en x , $x^2 + dx + 3 - d = 0$ tenga una sola solución, son $d = 2$, $d = -6$ y las ecuaciones resultantes de sustituir los valores de d , son:

$$x^2 + 2x + 1 = 0 \quad \text{y}$$

$$x^2 - 6x + 9 = 0.$$

Ecuaciones Radicales



Para eliminar la raíz cuadrada, elevamos al cuadrado ambos lados de la igualdad.

Despejamos los valores de x , para igualar la ecuación a cero. Entonces nos queda una **ecuación cuadrática**.

Una **ecuación radical** es aquella que tiene una o más incógnitas, bajo el signo radical. Son ejemplos de ecuaciones radicales:

$$\sqrt[4]{4+2\sqrt{x-2}} = 2\sqrt{3}$$

$$\sqrt{2x+1} = 1 - \sqrt{x}$$

$$\sqrt{3x+7} + \sqrt{x+6} = 0$$

Para resolver una ecuación radical se debe tener en cuenta lo siguiente: Si **A** y **B** son dos expresiones algebraicas, entonces **A = B** es una ecuación algebraica, y su conjunto de soluciones es subconjunto de soluciones de la ecuación **Aⁿ = Bⁿ** donde **n** es cualquier entero positivo.

Ejemplo 1. *Resuelva* $\sqrt{3x-6} = x-2$

Aunque la ecuación no es cuadrática, puede transformarse de la siguiente manera:

$$(\sqrt{3x-6})^2 = (x-2)^2$$

Desarrollamos el producto notable $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ del lado derecho

$$3x-6 = x^2 - 4x + 4$$

$$0 = x^2 - 4x + 4 - 3x + 6$$

$$x^2 - 7x + 10 = 0, \text{ donde } a = 1, b = -7 \text{ y } c = 10$$

Ahora calculamos el valor del discriminante:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4(1)(10) \Rightarrow \Delta = 49 - 40 \Rightarrow \Delta = 9$$

Como el discriminante resultó positivo, la ecuación tiene dos soluciones reales. Reemplazando en la “resolvente”, tenemos

Recuerda la **fórmula cuadrática o resolvente:**

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Nuevamente, elevamos al cuadrado ambos miembros de la igualdad

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{9}}{2(1)} \Rightarrow x = \frac{7 \pm 3}{2}$$

Donde

$$x_1 = \frac{7+3}{2} = \frac{10}{2} = 5 \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{7-3}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Como se hicieron operaciones algebraicas para convertirla en una ecuación cuadrática, debemos comprobar ambos valores de x en la ecuación original, por sustitución.

Para $x = 5$ la igualdad se cumple

$$\sqrt{3(5)-6} = 5-2 \Rightarrow \sqrt{15-6} = 3 \Rightarrow \sqrt{9} = 3 \quad (\text{cierto})$$

Para $x = 2$ la igualdad también se cumple

$$\sqrt{3(2)-6} = 2-2 \Rightarrow 0 = 0 \quad (\text{cierto})$$

Respuesta: Las soluciones de la ecuación $\sqrt{3x-6} = x-2$, son $x = 5$ y $x = 2$.

Ejemplo 2. : Resuelva $\sqrt{5x+1} = \sqrt{2x+3} + 1$

Primero elevamos al cuadrado ambos miembros de la igualdad, para no alterar el valor de la expresión.

$$(\sqrt{5x+1})^2 = (\sqrt{2x+3} + 1)^2$$

En el lado izquierdo de la ecuación, tenemos una raíz cuadrada elevada al cuadrado, la cual da como resultado la expresión sub-radical. En el lado derecho de la ecuación tenemos un binomio al cuadrado (producto notable):

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{donde } a = \sqrt{2x+3} \quad \text{y} \quad b = 1.$$

Desarrollando, simultáneamente ambos lados de la ecuación, tenemos

$$5x+1 = (\sqrt{2x+3})^2 + 2(\sqrt{2x+3})(1) + (1)^2$$

Comprueba que ambos valores de x son solución de la ecuación original.
 $\sqrt{5x+1} = \sqrt{2x+3} + 1.$

Multiplica por el m.c.m que es $\sqrt{x}$, resuelve y simplifica

- Eleva al **cuadrado** ambos lados de la igualdad y factoriza.

$$\Rightarrow 5x + 1 = 2x + 3 + 2\sqrt{2x + 3} + 1$$

Despejamos la raíz cuadrada resultante

$$5x + 1 - 2x - 3 - 1 = 2\sqrt{2x + 3} \Rightarrow 3x - 3 = 2\sqrt{2x + 3}$$

$$(3x - 3)^2 = (2\sqrt{2x + 3})^2$$

Desarrollamos el producto notable del lado izquierdo y el cuadrado del lado derecho.

$$(3x)^2 - 2(3x)(3) + (3)^2 = (2)^2 (\sqrt{2x + 3})^2$$

$$9x^2 - 18x + 9 = 8x + 12 \Rightarrow 9x^2 - 18x + 9 - 8x - 12 = 0$$

$$9x^2 - 26x - 3$$

Ahora la ecuación puede resolverse mediante la fórmula cuadrática, donde: $a = 9$, $b = -26$ y $c = -3$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-26) \pm \sqrt{(-26)^2 - 4(9)(-3)}}{2(9)}$$

$$= \frac{26 \pm \sqrt{676 + 108}}{18}$$

$$= \frac{26 \pm \sqrt{784}}{18}$$

$$= \frac{26 \pm 28}{18}$$

$$x_1 = \frac{26+28}{18} = \frac{54}{18} = 3$$

$$x_2 = \frac{26-28}{18} = \frac{-2}{18} = -\frac{1}{9}$$

Ejemplo 3. : Resuelva la ecuación $\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} = 1$

$$\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x} = 1 \cdot \sqrt{x} \quad ; \quad x - 2 = \sqrt{x}$$

$$(x - 2)^2 = (\sqrt{x})^2$$

$$x^2 - 4x + 4 = x \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$(x - 4)(x - 1) = 0$$

Por consiguiente $x = 4$ y $x = 1$. Verifica si cada una de ellas son soluciones de la ecuación.

Ecuaciones con Valor Absoluto

El valor absoluto de f se define:

$$|f| = \begin{cases} f & \text{si } f \geq 0 \\ 0 & \\ -f & \text{si } f < 0 \end{cases}$$

Donde “f” puede ser un número, una variable o una expresión algebraica.

El **Valor Absoluto** de una cantidad es el número que representa la cantidad, sin tomar en cuenta el signo de la cantidad.

El **Valor Relativo** de una cantidad es el signo de la misma, representado por más (+) o menos (-).

Cuando trabajamos con cantidades, éstas se pueden tomar en dos sentidos, cantidades positivas o cantidades negativas.

Así, en contabilidad el haber o crédito se denota con el signo + y el debe o deuda se denota con signo -. Para expresar que una persona tiene 100 Bs.F. en su haber, diremos que tiene + 100Bs.F. mientras que para expresar que tiene una deuda de 100 Bs.F. diremos que tiene - 100 Bs.F.

Otro ejemplo donde se utilizan los sentidos de las cantidades es en los grados de un termómetro, los grados sobre cero se denotan con signo + y los grados bajo cero se denotan con signo -.

Así, para indicar que el termómetro marca 10° sobre cero, escribimos +10° y para indicar que marca 10° bajo cero, escribiremos 10°.

Entonces en una cantidad cualquiera, tenemos dos elementos intrínsecos, que son: el valor absoluto o magnitud de la cantidad y el valor relativo o signo de la cantidad.

Ejemplo 1. : **Hallar el valor absoluto de las siguientes cantidades.**

Ejemplo 1. Para $f = 8$, tenemos que

$$|+8| = 8$$

NOTA: Observa que el valor absoluto de una expresión denotado por $|f|$, depende del signo de la expresión que se encuentra entre las barras y no de la variable, a menos que la expresión sea igual a la variable.

Propiedades del Valor Absoluto

Observa que las propiedades del 1 al 5 se refieren a igualdades, mientras que las propiedades 6 y 7 se refieren a desigualdades.

b) Para $f = -5$, tenemos que

$$|-5| = -(-5) = 5$$

c) Para $f = x$, tenemos que

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

d) Para $f = x^2 - 2$, tenemos que

$$|x^2 - 2| = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si } x^2 - 2 \geq 0 \\ 0 & \\ -(x^2 - 2) & \text{si } x^2 - 2 < 0 \end{cases}$$

Propiedad 1: $|f| \geq 0$, para cualquier $f \in \mathbb{R}$

Propiedad 2: $|f| = |-f|$

Propiedad 3: $|f| = \sqrt{f^2}$

Propiedad 4: $|f \cdot g| = |f| \cdot |g|$

Propiedad 5: Si $g \neq 0$ entonces $\left| \frac{f}{g} \right| = \frac{|f|}{|g|}$

Propiedad 6: $|f + g| \leq |f| + |g|$ (Desigualdad triangular)

Propiedad 7: $|f - g| \geq |f| - |g|$

Propiedad 8: Sea $a > 0$, $|f| = a$ es equivalente a resolver las siguientes ecuaciones:

$$\text{a) } f = a \quad \text{ó} \quad \text{b) } f = -a$$

Es decir, $|f| = a$ si y sólo si, $f = a$ ó $f = -a$

Propiedad 9: Sea $a > 0$, $|f| \leq a$ es equivalente a:

$$\text{a) } f \leq a \quad \text{y} \quad \text{b) } f \geq -a$$

Es decir, $|f| \leq a$ si y sólo si $-a \leq f \leq a$

Veamos a continuación varios ejemplos de resolución de ecuaciones con valor absoluto, aplicando las propiedades.

Propiedad 10: $|f| \geq a$ es equivalente a:

$$a) f \geq a \quad \text{ó} \quad b) f \leq -a$$

Es decir, $|f| \geq a$ si y sólo si $f \geq a$ ó $f \leq -a$

En muchas ocasiones se nos presentan ecuaciones donde está involucrado el valor absoluto de una expresión algebraica, como por ejemplo:

$$\left(\frac{8x-9}{1-x}\right)^4 = 625 \Rightarrow \sqrt[4]{\left(\frac{8x-9}{1-x}\right)^4} = \sqrt[4]{625}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{8x-9}{1-x}\right| = 5$$

Ejemplo 2. **Resolver la siguiente ecuación:** $|3x| = 5$

Aplicando la propiedad “8” de valor absoluto, tenemos que para $f = 3x$ nos queda:

$$|3x| = 5 \Rightarrow \underbrace{3x = 5}_{Ec.1} \quad \text{ó} \quad \underbrace{3x = -5}_{Ec.2}.$$

Resolvemos cada una de las ecuaciones:

$$Ec.1: 3x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{3} \quad \text{y} \quad Ec.2: 3x = -5 \Rightarrow x = -\frac{5}{3}$$

Entonces la solución de la ecuación $|3x| = 5$ es $x = \frac{5}{3}$

$$\text{ó } x = -\frac{5}{3}$$

$$\textbf{Respuesta: } S = \left\{ \frac{5}{3}, -\frac{5}{3} \right\}$$

Ejemplo 3. **Resolver** $\left|\frac{8x}{x+1}\right| = 9$

Aplicando la propiedad “8” tenemos que:

$$\left|\frac{8x}{x+1}\right| = 9 \Rightarrow \underbrace{\frac{8x}{x+1} = 9}_{Ec.1} \quad \text{ó} \quad \underbrace{\frac{8x}{x+1} = -9}_{Ec.2}$$

Resolvamos cada una de las ecuaciones:

$$Ec.1: \frac{8x}{x+1} = 9 \Rightarrow 8x = 9(x+1) \Rightarrow 8x = 9x + 9$$

$$8x - 9x = 9 \Rightarrow -x = 9$$

Multiplicamos por (-1), la ecuación nos queda

$$-1 \cdot (-x) = -1 \cdot (9) \Rightarrow x = -9$$

$$Ec.2: \frac{8x}{x+1} = -9 \Rightarrow 8x = -9(x+1) \Rightarrow 8x = -9x - 9$$

$$8x + 9x = -9 \Rightarrow 17x = -9 \Rightarrow x = -\frac{9}{17}$$

Respuesta: la solución de la ecuación $\left| \frac{8x}{x+1} \right| = 9$ es

$$S = \left\{ -9, -\frac{9}{17} \right\}.$$

Nota:

No siempre una ecuación tiene solución en los números reales. En el siguiente ejemplo analizamos este caso

La propiedad 8 de valor absoluto nos dice que el valor de a , tiene que ser estrictamente mayor que cero.

Ejemplo 4. Resolver $\left| \frac{4x}{1+x} \right| = -8$

Si observamos el lado derecho de la ecuación, notamos que el valor es **negativo**, y por la **propiedad 1** del valor absoluto, $|f| \geq 0$, es decir el valor absoluto de una expresión algebraica o aritmética siempre es positivo o igual a cero. Por lo tanto, la ecuación

$$\left| \frac{4x}{1+x} \right| = -8 \text{ no tiene solución en los números reales,}$$

así la **solución es vacía**, es decir $S = \emptyset$.

Respuesta: la solución de la ecuación $\left| \frac{4x}{1+x} \right| = -8$ es

$$S = \emptyset$$

Ejemplo 5. Resolver $|3x - 2| = 2|x - 4|$

Para darle forma al ejemplo 19, pasamos el término $|x - 4|$ a dividir; sin embargo,

observa que $\frac{|3x - 2|}{|x - 4|} = 2$ no admite el valor de $x = 4$, pues el denominador se anularía, por lo tanto si en la ecuación original $x = 4$, tendremos que $10 = 0$ (lo cual es falso), esto quiere decir que $x \neq 4$, entonces $|x - 4|$ puede pasar a dividir y

resolvemos: $\frac{|3x - 2|}{|x - 4|} = 2$, utilizando la propiedad 5 del valor absoluto

$$\frac{|3x - 2|}{|x - 4|} = \left| \frac{3x - 2}{x - 4} \right|, \text{ así la ecuación queda: } \left| \frac{3x - 2}{x - 4} \right| = 2$$

Usando la propiedad “8” de valor absoluto tenemos entonces que

$$\underbrace{\frac{3x - 2}{x - 4} = 2}_{Ec.1} \quad \text{ó} \quad \underbrace{\frac{3x - 2}{x - 4} = -2}_{Ec.2}$$

Resolvamos cada una de las ecuaciones

$$Ec.1: \frac{3x - 2}{x - 4} = 2 \Rightarrow 3x - 2 = 2(x - 4)$$

$$3x - 2 = 2x - 8 \Rightarrow 3x - 2x = -8 + 2 \Rightarrow x = -6$$

$$Ec.2: \frac{3x - 2}{x - 4} = -2 \Rightarrow 3x - 2 = -2(x - 4),$$

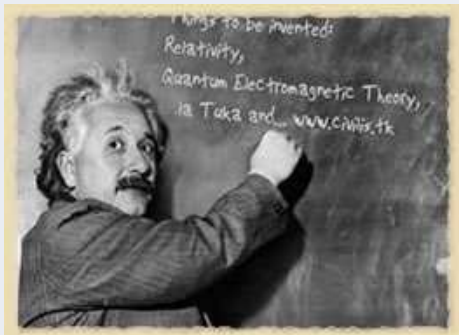
$$\Rightarrow 3x + 2 = -2x + 8$$

Agrupamos términos semejantes

$$\Rightarrow 3x + 2x = 8 + 2 \Rightarrow 5x = 10 \Rightarrow x = \frac{10}{5} \Rightarrow x = 2$$

Respuesta: Entonces la solución de la ecuación $|3x - 2| = 2|x - 4|$ es $S = \{-6, 2\}$

LOS SISTEMAS DE ECUACIONES



En un sistema de ecuaciones no siempre el número de ecuaciones es igual al número de incógnitas.

Trataremos ahora los sistemas de ecuaciones, lo cual no es más que un conjunto de ecuaciones con más de una (1) incógnita, que al resolverlas tienen la misma solución. Comenzaremos con sistemas básicos de 2 ecuaciones con 2 incógnitas y, al final se ampliará el estudio a sistemas de 3 ecuaciones con 3 incógnitas.

TÉRMINOS EMPLEADOS EN SISTEMA DE ECUACIONES

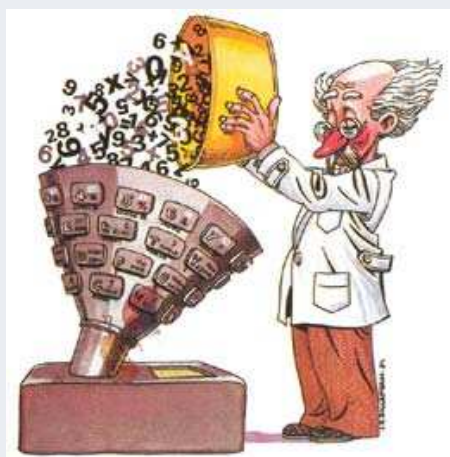
- **Las dimensiones de un sistema de ecuaciones** depende: primero, del número de ecuaciones (al cual llamaremos m), y segundo, del número de incógnitas (al que llamaremos n). Entonces la dimensión de un sistema la definiremos m x n.

Sistema 2x2	Sistema 3x3	Sistema 3x2
$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3x - 2y = 3 \end{cases}$	$\begin{cases} x - 4y + z = 2 \\ 2x - 3y + 3z = -3 \\ 4y - 2z = 1 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 3x + 6y = -2 \\ 4x - 2y = 3 \end{cases}$

- **La solución de un sistema** corresponde a los valores de las incógnitas encontradas y que, al sustituirlos en todas las ecuaciones, satisface el sistema original, es decir son los valores de las incógnitas que hacen que las igualdades se verifiquen.

- Los sistemas de ecuaciones se pueden considerar homogéneos o no homogéneos.

LOS SISTEMAS HOMOGÉNEOS, son aquellos que tienen todos los términos independientes iguales a cero y una de



sus soluciones es aquella en la que todas las incógnitas tienen como valor cero (0). A este tipo de solución se le llama solución trivial, pero debemos tener presente que no todos los sistemas homogéneos tienen una única solución.

LOS SISTEMAS NO HOMOGÉNEOS, son aquellos en los que por lo menos uno de los términos independientes es distinto de cero (0).

- Los sistemas de ecuaciones denominados **COMPATIBLES**, son aquellos que tienen solución y pueden categorizarse como compatibles **determinados e indeterminados**.

- Un sistema es **COMPATIBLE DETERMINADO**, cuando tiene un número finito de soluciones.
- Un sistema es **COMPATIBLE INDETERMINADO**, cuando tiene un número infinito de soluciones.

- Por otro lado podemos señalar que un **SISTEMA INCOMPATIBLE**, es aquel que **no tiene solución**.

- Una **ecuación lineal en una variable** se define también como una ecuación de primer grado en la variable y es de la forma

$$ax + b = c \quad \text{con } a \neq 0.$$

- Una **ecuación lineal en dos variables** (x, y) , se define como una ecuación de 1er grado en cada una de las variables y es de la forma $ax + by + c = 0$, donde $a \neq 0$ y $b \neq 0$.

- En general, una **ecuación lineal en "n" variables** $x_1, x_2, \dots, x_n$ es una ecuación de 1er grado en cada una de las variables y es de la forma $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$, donde no todos los a_i sean iguales a cero.

- Un **sistema de ecuaciones lineales** es el conjunto de dos

o más ecuaciones lineales con dos o más incógnitas. En los ejemplos de la definición, al inicio de esta unidad, el (a) y (b) son sistemas de ecuaciones lineales.



Sistema de ecuaciones lineales 2x2

Es el conjunto de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. En el ejemplo “a” de la definición es sistemas de ecuación lineales 2×2 .

Criterios para determinar la existencia de soluciones de sistemas 2x2

Antes de intentar resolver un sistema de ecuaciones, es conveniente determinar si el sistema tiene solución y conocer la naturaleza de ésta. En este apartado indicamos algunos criterios que nos pueden orientar en la búsqueda de la solución.

Para el siguiente el sistema 2×2 :

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Se presentan dos (2) casos:

Caso 1: Si el sistema de ecuaciones es homogéneo, es decir, $c_1 = c_2 = 0$, tendremos dos opciones:

i) $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \longrightarrow$ el sistema tiene solución trivial, $x = 0$, $y = 0$

ii) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \longrightarrow$ el sistema tiene infinitas soluciones.

Caso 2: Si el sistema de ecuaciones es no homogéneo y suponiendo $c_2 \neq 0$, tendremos tres opciones:

i) $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ el sistema tiene sólo una solución no trivial y es la

siguiente:

$$x = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \quad y = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

ii) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \longrightarrow$ el sistema tiene infinitas

soluciones

iii) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2} \longrightarrow$ el sistema no tiene solución.

CASO 1.i

$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \Rightarrow$ el sistema tiene solución trivial, $x = 0, y = 0$

Ejemplo 1. : Para el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 4x - 2y = 0 \end{cases} \text{ determina la solución, en caso de que}$$

exista.

Observamos que el sistema es homogéneo, pues $c_1 = c_2 = 0$, y además que

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad y \quad \frac{b_1}{b_2} = -\frac{3}{2}, \text{ entonces } \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2},$$

por lo tanto, corresponde al caso 1.i), en consecuencia el sistema tiene solución trivial, $x = 0, y = 0$.

Ejemplo 2. : Para el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + 3y = 1 \\ 4x - 2y = -10 \end{cases} \text{ determina la solución.}$$

El sistema es no homogéneo, ya que $c_1 = 1, c_2 = -10$, por otro lado observa que:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{4} \quad y \quad \frac{b_1}{b_2} = -\frac{3}{2}, \text{ entonces } \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

CASO 2.i

$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ el sistema tiene sólo una solución no trivial y es la siguiente:

$$x = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \quad y = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

CASO 2.iii

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ el sistema no tiene solución.

por lo tanto, corresponde al caso 2.i) y resolvemos como sigue:

$$x = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = \frac{(1)(-2) - (-10)(3)}{(1)(-2) - (4)(3)} = -2$$

$$y = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = \frac{(1)(-10) - (4)(1)}{(1)(-2) - (4)(3)} = \frac{-10 - 4}{-2 - 12} = 1$$

Respuesta: La solución es **x = - 2, y = 1**

Ejemplo 3. : **Resolver el siguiente sistema de**

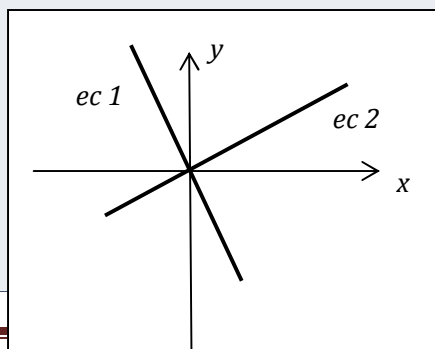
ecuaciones
$$\begin{cases} 2x - y = 2 \\ 4x - 2y = 3 \end{cases}$$

El sistema es no homogéneo, ya que $c_1 = 2$, $c_2 = 3$, además observamos que:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad \frac{b_1}{b_2} = \frac{1}{2} \quad y \quad \frac{c_1}{c_2} = \frac{2}{3}, \text{ entonces}$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

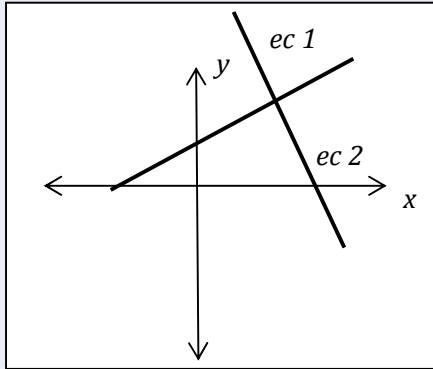
por lo tanto, corresponde al caso 2.iii), en consecuencia **el sistema no tiene solución.**



Interpretación Geométrica de los sistemas de ecuaciones lineales 2x2

Todas las ecuaciones lineales de dos variables (incógnitas) tienen líneas rectas por gráficas en el plano cartesiano. En el caso de un sistema de dos ecuaciones lineales y dos variables (incógnitas), la representación gráfica del mismo viene dada por dos rectas en el mismo plano las cuales se pueden comportar de la siguiente forma:

Caso A: El sistema es homogéneo (compatible determinado) y tiene solución trivial ($x = 0$, $y = 0$).



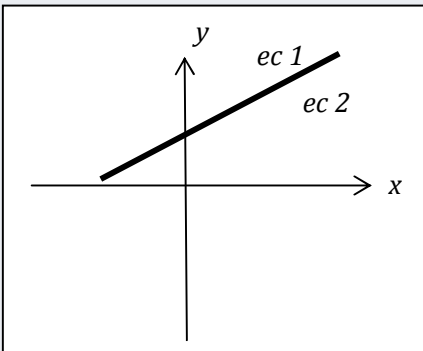
$$\begin{cases} a_1x + b_1y = 0 & \text{ec 1} \\ a_2x + b_2y = 0 & \text{ec 2} \end{cases}$$

Las dos rectas tienen en común el punto $(0, 0)$

Caso B: El sistema es no homogéneo (compatible determinado) y tiene una única solución no trivial.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 & \text{ec 1} \\ a_2x + b_2y = c_2 & \text{ec 2} \end{cases}$$

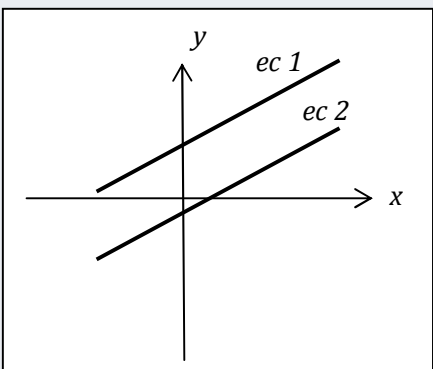
Las dos rectas tienen en común el punto que no es el origen



Caso C: El sistema homogéneo o no homogéneo (compatible indeterminado) tiene infinitas soluciones.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 & \text{ec 1} \\ a_2x + b_2y = c_2 & \text{ec 2} \end{cases}$$

Las rectas son coincidentes (una sobre la otra)



Caso D: El sistema es no homogéneo (incompatible) y no tiene solución.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 & \text{ec 1} \\ a_2x + b_2y = c_2 & \text{ec 2} \end{cases}$$

Las rectas no tienen punto en común, es decir, son rectas paralelas

**Métodos Analíticos de
Sustitución e Igualación
para resolver Sistemas de
Ecuaciones Lineales de
2x2**

**Método para resolver sistema de ecuaciones
lineales 2 x 2**

De los criterios estudiados en esta guía, el numerador como “2.i” es el que nos ocupa en este caso; es decir, sistemas no homogéneos con una solución. Se indicó que teniendo el sistema:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Su solución es:

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \quad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

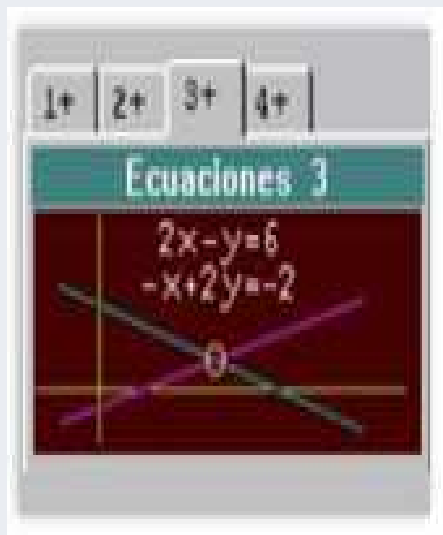
Sin embargo, existen diferentes métodos que nos permiten obtener esta solución con procedimientos muy específicos. Es muy importante conocer dichos procedimientos para análisis posteriores.

Para resolver sistemas de ecuaciones lineales podemos utilizar los siguientes métodos:

- **Métodos Analíticos:**

**Sustitución
Igualación
Reducción**

Existen otros métodos para resolver sistemas de ecuaciones, tales como los matriciales y el método gráfico, pero en esta guía sólo desarrollaremos los métodos analíticos y mostraremos su interpretación gráfica.



El $-7 \cdot y$ pasa sumando a 25 y el 4 que está multiplicando pasa dividiendo a toda la expresión. Finalmente llamamos (ec. 3) a la nueva ecuación.

Reemplazamos la x por el valor

Método de Sustitución

Este método, como su nombre lo dice, consiste básicamente en sustituir expresiones y valores en las ecuaciones para encontrar la solución del sistema. Estudiemos este método con los siguientes ejemplos:

Ejemplo 4.: *Resuelva el sistema de ecuaciones*

$$\text{utilizando el método de sustitución} \quad \begin{cases} 3x + 2y = -32 \\ 4x - 7y = 25 \end{cases}$$

Solución:

Paso 1: Verificamos la naturaleza de la solución.

El sistema es no homogéneo, porque $c_1 \neq 0$ y $c_2 \neq 0$, entonces:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{3}{4} \quad \frac{b_1}{b_2} = -\frac{2}{7} \quad \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

El sistema **tiene una solución única**.

Paso 2: Denotamos cada ecuación con un número, para diferenciarla.

$$3x + 2y = -32 \leftarrow \text{ec}(1)$$

$$4x - 7y = 25 \leftarrow \text{ec}(2)$$

Paso 3: Elegimos una de las ecuaciones para despejar una de las incógnitas, en este caso tomamos la (2) para despejar " x ". Es indistinto la ecuación que se elija y la incógnita que se despeje.

que tiene según la ecuación 3.

$$4x - 7y = 25 \Rightarrow x = \frac{25 + 7y}{4} \leftarrow \text{ec (3)}$$

Suma de fracciones, considerando que $2y = \frac{2y}{1}$ y el mínimo entre 4 y 1 es 4

Paso 4: Sustituimos la expresión correspondiente a “x”, en la ecuación del sistema que no fue tomada, en este caso es la ec (1).

$$3x + 2y = -32 \leftarrow (1)$$

$$3\left(\frac{25 + 7y}{4}\right) + 2y = -32$$

Paso 5: Obtenemos una ecuación de primer grado con una incógnita y la resolvemos.

$$\frac{75 + 21y}{4} + 2y = -32$$

El 4 pasa multiplicando a -32

$$\frac{75 + 21y + 8y}{4} = -32$$

Agrupamos términos semejantes.

$$75 + 21y + 8y = -128$$

$$21y + 8y = -128 - 75$$

$$29y = -203 \Rightarrow y = -\frac{203}{29} = -7$$

Paso 6: Sustituimos el valor de la incógnita encontrada en cualquiera de las ecuaciones (1); (2) ó (3), generalmente se elige la que considere más sencilla.

$$x = \frac{25 + 7y}{4} \Rightarrow x = \frac{25 + 7(-7)}{4} \Rightarrow x = -\frac{24}{4} = -6$$

En nuestro ejemplo elegimos la ecuación (3), pues “x” ya

Sustituimos $x = -6$ y $y = -7$ en ambas ecuaciones del sistema original.

aparece despejada y sustituimos $y = -7$.

$$x = \frac{25 + 7y}{4} \Rightarrow x = \frac{25 + 7(-7)}{4} \Rightarrow x = -\frac{24}{4} = -6$$

Paso 7: Comprobación.

$$3x + 2y = 32$$

$$3(-6) + 2(-7) = -32$$

$$-18 - 14 = -32$$

$$-32 = -32$$

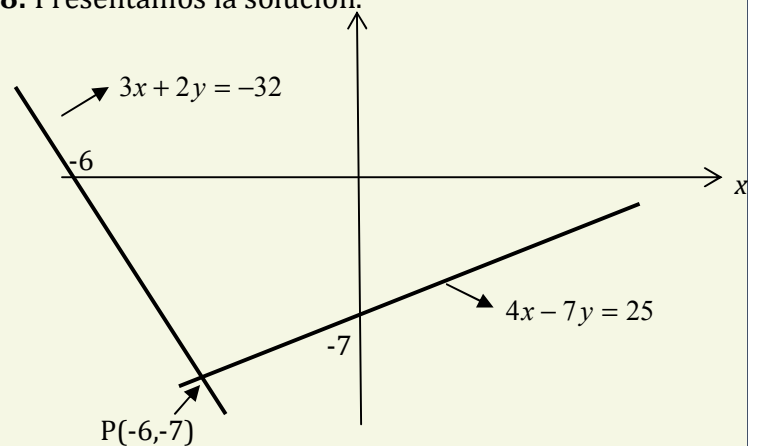
$$4x - 7y = 25$$

$$4(-6) - 7(-7) = 25$$

$$-24 + 49 = 25$$

$$25 = 25$$

Paso 8: Presentamos la solución.



Método de Igualación

Este método consiste en despejar la misma incógnita en ambas ecuaciones y luego **igualar** ambos resultados. Estudiemos este método con los siguientes ejemplos:

Ejemplo 5. : Resuelve el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 3x + 2y = 3 \\ 4x - y = -7 \end{cases} \text{ utilizando el método de igualación.}$$

Paso 1: Verificamos la naturaleza de la solución.

El sistema es no homogéneo, porque $c_1 \neq 0$ y $c_2 \neq 0$, entonces:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{3}{4} \quad \frac{b_1}{b_2} = \frac{2}{-1} = -2 \quad \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

El sistema tiene solución única.

Paso 2: Denotamos cada ecuación con un número, para diferenciarla.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 3 & \rightarrow \text{ec (1)} \\ 4x - y = -7 & \rightarrow \text{ec (2)} \end{cases}$$

PASO 3: DE AMBAS ECUACIONES DESPEJAMOS LA MISMA INCÓGNITA.

$$3x + 2y = 3 \quad (\text{ec 1})$$

$$2y = 3 - 3x$$

$$y = \frac{3 - 3x}{2} \quad (\text{ec 3})$$

$$\text{-----} 4x - y = -7 \quad (\text{ec 2}) \text{-----}$$

$$-y = -7 - 4x$$

$$y = 7 + 4x \quad (\text{ec 4})$$

Paso 4: Ahora igualamos las dos expresiones encontradas. Es decir, ec 3 y ec 4

$$\frac{3 - 3x}{2} = 7 + 4x$$

Paso 5: Resolvemos la ecuación de primer grado obtenida en la igualación.

$$3 - 3x = 2(7 + 4x); \quad 3 - 3x = 14 + 8x; \quad 3 - 14 = 8x + 3x$$

$$-11 = 11x; \quad x = -\frac{11}{11}; \quad x = -1$$

Despejamos “y” de la ecuación (1)

Despejamos “y” de la ecuación (2)

Paso 6: Sustituimos el valor encontrado en la ecuación que consideres más sencilla. Sustituiremos $x = -1$ en la ec 4

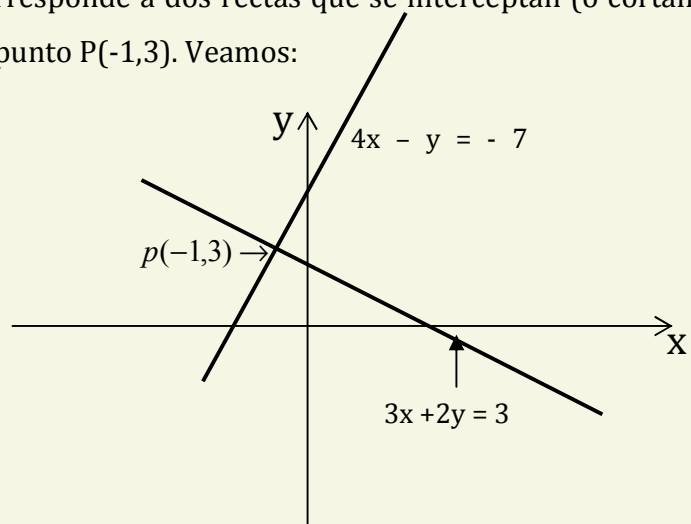
$$y = 7 + 4x \quad (\text{Ec 4})$$

$$y = 7 + 4(-1) ; y = 7 - 4 ; y = 3$$

Paso 7: Se comprueban los resultados, sustituyéndolos en el sistema original. (comprueba la solución)

Paso 8: Se presenta la solución del sistema: $x = -1, y = 3$.

Como ya mencionamos, la interpretación gráfica corresponde a dos rectas que se interceptan (o cortan) en el punto $P(-1,3)$. Veamos:



Método de Reducción

Este método consiste en “eliminar” una de las incógnitas igualando sus coeficientes y sumar o restar las ecuaciones del sistema. Para ello se suman cuando por lo menos una de las incógnitas que tenga signos contrarios en sus coeficientes y se restan las ecuaciones cuando los signos de los coeficientes respectivos de las incógnitas sean iguales. Luego se resuelve la ecuación de primer grado obtenida en el proceso. Veamos un ejemplo ya conocido:

Ejemplo 21: Resuelve el sistema $\begin{cases} 2x - 3y = -14 \\ x - 2y = -9 \end{cases}$. Utiliza el método de reducción.

Paso 1: Verificamos la naturaleza de la solución.

El sistema es no homogéneo, entonces:

$$\frac{a_1}{a_2} = 2 \quad \frac{b_1}{b_2} = \frac{3}{2} \quad \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

El sistema tiene una solución única.

Paso 2: Le asignamos números a las ecuaciones para diferenciarlas

$$2x - 3y = -14 \quad \leftarrow \text{ec.1}$$

$$x - 2y = -9 \quad \leftarrow \text{ec.2}$$

Paso 3: Como ninguna incógnita tiene coeficientes de signos contrarios, elegimos cualquiera de las dos, digamos “x”. Calculamos el mínimo común múltiplo (m.c.m) entre sus coeficientes.

$$\text{El m.c.m}(1,2)=2$$

Paso 4: Dividimos los coeficientes de “x” entre m.c.m. en cada ecuación, y ese cociente lo multiplicamos por cada uno de los términos en las ecuaciones, respectivamente.

$$\begin{cases} 2x - 3y = -14 \\ x - 2y = -9 \end{cases}$$

Si multiplicamos la primera ecuación por 1 y la segunda por 2, igualamos los coeficientes de la incógnita x, pero al sumar las dos ecuaciones no se eliminan, por lo que una de las ecuaciones se multiplica por el número indicado, pero con signo contrario ejemplo:

$$\begin{array}{r} -1 \\ 2 \end{array} \begin{cases} 2x - 3y = -14 \\ x - 2y = -9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x + 3y = 14 \\ 2x - 4y = -18 \end{cases}$$

Paso 5: Recuerda que la suma (o resta) de los lados izquierdos, debe ser igual a la suma (o resta) de los lados derechos.

$$\begin{array}{r} \cancel{2x} - 3y = -14 \\ -\cancel{2x} + 4y = 18 \\ \hline y = 4 \end{array}$$

Paso 6: Nos falta encontrar el valor de “x”. Para ello sólo debemos sustituir $y = 4$ en una de las ecuaciones (1 ó 2) en este caso lo haremos en la (2).

$$x - 2y = -9 \quad (\text{ec 2})$$

$$x - 2(4) = -9$$

$$x - 8 = -9$$

$$x = -9 + 8$$

$$x = -1$$

Paso 7: Se comprueba el resultado obtenido. (Verificarlo)

Paso 8: Se presenta la solución del sistema.

La solución es $x = -1$ **e** $y = 4$.

Sistemas de Ecuaciones no Lineales 2x 2

Estos son sistemas que contienen por lo menos una ecuación no lineal, por ejemplo: una ecuación cuadrática, cúbica, racional, entre otras. Podemos resolverlos utilizando los conceptos estudiados en esta guía. Veamos algunos de ellos.

Ejemplo 6. : *Resuelve el sistema*
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ -2x + 3y = 7 \end{cases}$$

Este sistema no es lineal, sin embargo, podemos resolverlo por sustitución.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 & \rightarrow \text{ec.1} \\ -2x + 3y = 7 & \rightarrow \text{ec.2} \end{cases}$$

Despejamos una de las variables de la ec. 2, en este caso “y”

$$y = \frac{7+2x}{3} \quad (\text{Ec3})$$

Sustituimos en la ec. 1

$$x^2 + \left(\frac{7+2x}{3}\right)^2 = 10$$

Desarrollamos la suma del binomio elevado al cuadrado

$$x^2 + \frac{(7+2x)^2}{3^2} = 10$$

$$x^2 + \frac{49+28x+4x^2}{9} = 10$$

Multiplicamos toda la ecuación por m.c.m(1,9) = 9

$$9x^2 + 49 + 28x + 4x^2 = 90$$

$$13x^2 + 28x - 41 = 0$$

Resolvemos la ecuación de 2do. grado y obtenemos:

$$x = \frac{-28 \pm \sqrt{(28)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-41)}}{2 \cdot 13}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

donde $a=13$, $b=28$ y $c=-41$

Si queremos comprobar, sustituimos los valores de $x = 1$, $y = 3$ en las ecuaciones originales, también sustituimos $x = -\frac{41}{13}$, $y = \frac{3}{13}$ en tales ecuaciones y verificamos que se cumplan las igualdades.

$$x = \frac{-28 \pm \sqrt{784 + 164}}{26} \quad x = \frac{-28 \pm 54}{26} \quad \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -\frac{41}{13} \end{cases}$$

Como obtuvimos dos resultados para “ x ”, sustituimos cada resultado en la ec. 3, para obtener los valores de “ y ”

$$y = \frac{7+2x}{3} \quad (\text{ec. 3})$$

Para $x = 1$

$$y = \frac{7+2(1)}{3} \Rightarrow y = 3$$

Para $x = -\frac{41}{13}$

$$y = \frac{7+2\left(-\frac{41}{13}\right)}{3} \Rightarrow y = \frac{3}{13}$$

Finalmente, presentamos los resultados:

Las soluciones son:

$$x = 1, \longrightarrow y = 3$$

$$x = -\frac{41}{13}, \longrightarrow y = \frac{3}{13}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1- Resuelva las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{1}{2}(x-1)-(x-3)=\frac{1}{3}(x+3)+\frac{1}{6}$	b) $\frac{3}{5}+\frac{3}{2x-1}=0$	c) $2x-\frac{5x-6}{4}+\frac{1}{3}(x-5)=-5x$
d) $x-(5x-1)-\frac{7-5x}{10}=1$	e) $\frac{2}{4x-1}=\frac{3}{4x+1}$	f) $\frac{2x-9}{10}+\frac{2x-3}{2x-1}=\frac{x}{5}$
g) $\frac{(5x-2)(7x+3)}{7x(5x-1)}-1=0$	h) $\frac{x-4}{3}-5=0$	i) $2x+\frac{17-x}{2}=\frac{8-3x}{3}+\frac{25}{3}$
j) $a(x+1)=1$	k) $(x+b)^2-(x-a)^2-(a+b)^2=0$	
l) $(x+a)(x-b)-(x+b)(x-2a)=b(a-2)+3a$	m) $a(x+b)+x(b-a)=2b(2a-x)$	
n) $\frac{1}{n}-\frac{m}{x}=\frac{1}{mn}-\frac{1}{x}$	o) $ax-a(a+b)=-x-(1+ab)$	
p) $ax+b^2=a^2-bx$	q) $\frac{a-1}{a}+\frac{1}{2}=\frac{3a-2}{x}$	
r) $\frac{x-3a}{a^2}-\frac{2a-x}{ab}=-\frac{1}{a}$		

2- Encuentra las soluciones de cada ecuación de segundo grado planteada:

a) $x^2-3x-10=0$	b) $2x^2+3x-2=0$	c) $-x^2+6x-14=0$
d) $3x+1=2x^2$	e) $6x^2+2x=3$	f) $2-4x-x^2=0$
g) $y^2+4y-21=0$	h) $4m^2+4m+1=0$	i) $9y^2-6y+1=0$
j) $8m-m^2=14$	k) $t^2-2t=24$	l) $36p^2+12p+1=0$

m) $x^4 - 5x^2 - 14 = 0$	n) $y^4 + 12 = 7y^2$	o) $t^2 = \frac{1}{2}t - \frac{1}{16}$
p) $\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} = 3$	q) $1 - \frac{1}{x} = \frac{6}{x^2}$	r) $m + 1 = \frac{3}{4}m^2$
s) $\frac{1}{3}x^2 + \frac{5}{12}x = \frac{3}{4}$	t) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{5}x = \frac{3}{10}$	

3- Encuentra los valores reales de “k” para que la ecuación tenga sólo una solución.

a) $2x^2 + kx - 1 = 0$	b) $x^2 - kx - 7 = -11$	c) $kx^2 + 2kx + k = 0$
d) $2x^2 + kx + k = 0$	e) $x^2 + (k - 3)x + k^2 = 0$	

4- Determina las soluciones de las siguientes ecuaciones.

a) $\frac{3x+4}{4x+1} = \frac{6x-5}{2x+7}$	b) $\frac{3x+5}{3x-1} = \frac{5x+3}{x+1}$
---	--

5- Aplicaciones Directas.

a) Para la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$

a) Demuestra que las sumas de sus raíces es igual a $-\frac{b}{a}$

b) Demuestra que el producto de sus raíces es igual a $\frac{c}{a}$

b) Si la ganancia mensual de una empresa puede expresarse como

$G(x) = -0,0025x^2 + 27x - 66.000$, donde “x” es el número de unidades producidas. Determina el número de unidades “x” que producirá una ganancia de BsF 6900.

c) Cierta deuda se pagará en n meses, donde

$$416 = \frac{n}{2} [22 + 2(n - 1)] \quad \text{¿En cuántos meses se pagará la deuda?}$$

d) ¿Para qué valor o valores de x el costo iguala a la ganancia, si el costo es:

$$C(x) = -x^2 + 15x + 16 \text{ y la ganancia es } G(x) = 7x - 4?$$

6- Encuentra las soluciones de cada ecuación radical:

a) $\sqrt{5x+9} = 2x+3$	b) $\sqrt{x+2} = 3x-4$
c) $\sqrt{3x+12} - 1 = \sqrt{5x+9}$	d) $\sqrt{4x^2 - 15} + 1 = 2x$
e) $\sqrt{x+4} + \sqrt{x-1} = 5$	f) $\sqrt{x} + \sqrt{x+5} = \frac{10}{\sqrt{x}}$
g) $\sqrt{x^2 - \sqrt{2x+1}} = 2-x$	h) $2 - \sqrt[3]{x^2 + 2x} = 0$
i) $\sqrt{6-x} + \sqrt{x+7} - \sqrt{12x+1} = 0$	j) $\sqrt{t} + t = 6$
k) $\sqrt{3x+5} + 10 = 0$	l) $\sqrt{2x+1} = 1 - \sqrt{x}$
m) Se ha determinado que el número de materias x , solicitadas por los estudiantes en cierto semestre de una universidad, viene dado por $x = 3\sqrt{x-3} + 1$. Determina la menor y mayor cantidad de materias solicitadas.	

7- Resolver las siguientes ecuaciones con valor absoluto:

a) $ 7x-2 = x+4$	b) $ 7x+3 = 17$
c) $ x-10 = 6$	d) $ 3x+5 = 8$
e) $ 3x+2 = x+4$	f) $ 6x-2 = 4x+7$
g) $ 8x-1 = 3x+2$	h) $ 7x-12 = 4x+3$
i) $\left \frac{x}{x+1} \right = 5$	j) $\left \frac{3x-1}{2x+1} \right = 3$

8- Resuelve cada uno de los siguientes sistemas por los dos métodos.

a) $\begin{cases} \frac{3x}{2} + y = 11 \\ x + \frac{y}{2} = 7 \end{cases}$	b) $\begin{cases} 2x - 3y = -6 \\ x + y = 7 \end{cases}$
c) $\begin{cases} \frac{x}{7} + \frac{y}{3} = 5 \\ 3y - \frac{x}{14} = 26 \end{cases}$	d) $\begin{cases} \frac{x}{5} = \frac{y}{4} \\ \frac{y}{3} = \frac{x}{3} - 1 \end{cases}$
e) $\begin{cases} 30 - (8 - x) = 2y + 30 \\ 5x - 29 = x - (5 - 4y) \end{cases}$	f) $\begin{cases} 12x - 14y = 20 \\ 12y - 14x = -19 \end{cases}$
g) $\begin{cases} 9x + 7y = -4 \\ 11x - 13y = -48 \end{cases}$	h) $\begin{cases} 6x - 5y = -9 \\ 4x + 3y = 13 \end{cases}$
i) $\begin{cases} 15x - y = 40 \\ 19x + 8y = 236 \end{cases}$	j) $\begin{cases} 8x - 5 = 7y - 9 \\ 6x = 3y + 6 \end{cases}$

9- Resuelve los siguientes sistemas por el método que prefieras.

a) $\begin{cases} \frac{x+2}{2} - \frac{y+4}{3} = \\ \frac{x+y}{2} = \frac{7}{12} + \frac{x-y}{3} \end{cases}$	b) $\begin{cases} \frac{5x}{2} + 3y = \frac{3}{2} + y \\ \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}y = 6x + \frac{19}{4} \end{cases}$
c) $\begin{cases} 4ax + 3y = 19 \\ -ax + y = 4 \end{cases}$	d) $\begin{cases} ax = 2 - by \\ -ax + 2by - 1 = 0 \end{cases}$
e) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ -2x + 3y = 5 \end{cases}$	f) $\begin{cases} 2x^2 - y^2 = 7 \\ -x + 2y = -4 \end{cases}$
g) $\begin{cases} \frac{4}{x} - \frac{5}{y} = \frac{13}{4} \\ \frac{3}{x} + \frac{7}{y} = -\frac{1}{4} \end{cases}$	h) $\begin{cases} \frac{2}{x} - \frac{4}{y} = -6 \\ \frac{3}{x} + \frac{5}{y} = -\frac{7}{2} \end{cases}$

i) $\begin{cases} 2x + 3y - z = 14 \\ x - 2y + 2z = -11 \\ 3x - y - 2z = 6 \end{cases}$	j) $\begin{cases} x - 3y + z = -2 \\ 2x - y - z = -\frac{13}{6} \\ 3x + y + 2z = \frac{1}{6} \end{cases}$
---	---

10. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones

- a) La suma del triple de un primer número con el doble del segundo es 7.
- b) El doble del primero aumentado en 4 unidades es igual al triple del segundo.

11. ¿Cuál es la medida de los lados de un triángulo isosceles si?

- a) El perímetro es igual a 30 cm.
- b) El lado diferente mide 2 cm. menos que uno de los lados iguales.

12. En la familia Morales trabajan tres personas, el señor, la señora y el hijo mayor. Cuánto ganarán cada uno de los tres, sabiendo que:

- a. Entre los tres ganan Bs.F. 2.600.
- b. El hijo gana Bs.F. 15 menos que la señora.
- c. El señor gana Bs.F. 60 más el doble de lo que gana la señora.

13. Tomando en cuenta las siguientes premisas:

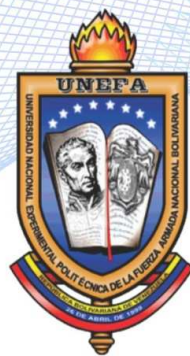
- a. El total de alumnos es 99.700.
- b. En ingeniería hay 15.243 alumnos más que en educación.
- c. En medicina hay 8.462 alumnos menos que en educación.

¿Cuántos alumnos hay en cada una de las tres especialidades de una universidad ?



Los elementos del arte de la guerra son: primero, la medida del espacio; segundo, la estimación de las cantidades; tercero, los cálculos; cuarto, las comparaciones; y quinto, las posibilidades de victoria. La medida del espacio deriva del terreno. Las comparaciones se hacen a partir de las cantidades y los cálculos, y se determina la victoria según estas comparaciones. Así pues, un ejército victorioso equivale a un saco en equilibrio contra un grano de arroz, y un ejército derrotado es como un grano de arroz en equilibrio contra un saco.

Sun Tzu, "El arte de la guerra"



Excelencia Educativa Abierta al Pueblo

Av. La Estancia con Av. Caracas y Calle Holanda frente al Edificio Banaven(Cubo Negro)
Chuao - Municipio Chacao - Edo. Miranda - Venezuela - Código Postal 1061
<http://www.unefa.edu.ve>