Pembahasan Soal

OGN 2016

OLIMPIADE GURU NASIONAL KHUSUS GURU MATEMATIKA SMA

OGN Matematika SMA

(Olimpiade Guru Nasional Tingkat Nasional)

Disusun oleh:

Pak Anang

PEMBAHASAN SOAL
OLIMPIADE GURU MATEMATIKA SMA
TINGKAT NASIONAL
18 Oktober 2016
By Pak Anang (http://pak-anang.blogspot.com)

1. Tentukan semua bilangan bulat b sedemikian sehingga polinomial $P(x) = 3x^3 - bx - (b+2)$ dapat dituliskan sebagai perkalian dari dua polinomial dengan koefisien bilangan bulat !

Pembahasan:
Perhatikan,
$$P(x) = 3x^3 - bx - (b+2) \equiv (px^2 + qx + r)(sx + t)$$
$$P(x) = 3x^3 - bx - (b+2) \equiv psx^3 + (pt + qs)x^2 + (qt + rs)x + rt$$

Sehingga diperoleh:
$$ps = 3$$
$$pt + qs = 0$$
$$qt + rs = -b$$
$$rt = -b - 2$$

Dan selanjutnya akan diperoleh:
$$qt + r(s - t) = 2$$
$$(p - q + r)(s - t) = 5$$

Dari bentuk $(p - q + r)(s - t) = 5$ diperoleh informasi bahwa $(s - t)$ adalah faktor dari 5.

Dari $ps = 3$, maka misal $p = 3$ dan $s = 1$
- Untuk $s - t = 1 \Rightarrow t = 0$, sehingga $q = 0, r = 2$, dan diperoleh $b = -2$.
- Untuk $s - t = 5 \Rightarrow t = -4$, sehingga $q = 12, r = 10$, dan diperoleh $b = 38$.
- Untuk $s - t = -1 \Rightarrow t = 2$, sehingga $q = -6, r = -14$, dan diperoleh $b = 26$.
- Untuk $s - t = -5 \Rightarrow t = 6$, sehingga $q = -8, r = 22$, dan diperoleh $b = 130$.

Dari $ps = 3$, maka misal $p = -3$ dan $s = -1$
- Untuk $s - t = -1 \Rightarrow t = 0$, sehingga $q = 0, r = -2$, dan diperoleh $b = -2$.
- Untuk $s - t = -5 \Rightarrow t = 4$, sehingga $q = -12, r = -10$, dan diperoleh $b = 38$.
- Untuk $s - t = 1 \Rightarrow t = -2$, sehingga $q = 6, r = -= 14$, dan diperoleh $b = 26$.
- Untuk $s - t = 5 \Rightarrow t = -6$, sehingga $q = 8, r = -22$, dan diperoleh $b = 130$.

Dari $ps = 3$, maka misal $p = 1$ dan $s = 3$
- Tidak menememenuhi.

Dari $ps = 3$, maka misal $p = -1$ dan $s = -3$
- Tidak menememenuhi.

Jadi, diperoleh nilai $b = \{-2, 26, 38, 130\}$.

Cara Alternatif:
Perhatikan,
$$P(x) = 3x^3 - bx - (b+2) \equiv (3x^2 + qx + r)(x + t)$$
$$P(x) = 3x^3 - bx - (b+2) \equiv 3x^3 + (3t + q)x^2 + (qt + r)x + rt$$

Sehingga diperoleh:
$$3t + q = 0 \Rightarrow q = -3t$$

$$\begin{aligned} qt + r = -b \Rightarrow\ & -3t^2 + r = -b \\ \Leftrightarrow\ & b = 3t^2 - r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} rt = -b - 2 \Rightarrow\ & rt = -3t^2 + r - 2 \\ \Leftrightarrow\ & rt - r = -3t^2 - 2 \\ \Leftrightarrow\ & r(t-1) = -3t^2 - 2 \\ \Leftrightarrow\ & r = \frac{-3t^2 - 2}{(t-1)} \\ \Leftrightarrow\ & r = \frac{-3t^2 + 3 - 5}{(t-1)} \\ \Leftrightarrow\ & r = \frac{-3(t^2 - 1)}{(t-1)} - \frac{5}{(t-1)} \\ \Leftrightarrow\ & r = -3(t+1) - \frac{5}{(t-1)} \end{aligned}$$

Perhatikan, r adalah bilangan bulat apabila $(t-1)$ adalah faktor dari 5.
Sehingga, diperoleh:

Untuk $(t-1) = 1 \Rightarrow t = 2$
$$r = -3(2+1) - \frac{5}{(2-1)} = -9 - 5 = -14$$
$$b = 3(2)^2 - (-14) = 12 + 14 = 26$$

Untuk $(t-1) = 5 \Rightarrow t = 6$
$$r = -3(6+1) - \frac{5}{(6-1)} = -21 - 1 = -22$$
$$b = 3(6)^2 - (-22) = 108 + 22 = 130$$

Untuk $(t-1) = -1 \Rightarrow t = 0$
$$r = -3(0+1) - \frac{5}{(0-1)} = -3 + 5 = 2$$
$$b = 3(0)^2 - (2) = 0 - 2 = -2$$

Untuk $(t-1) = -5 \Rightarrow t = -4$
$$r = -3(-4+1) - \frac{5}{(-4-1)} = 9 + 1 = 10$$
$$b = 3(-4)^2 - (10) = 48 - 10 = 38$$

Jadi, diperoleh nilai $b = \{-2, 26, 38, 130\}$.

2. Tentukan semua triple (x, y, z) berupa bilangan real yang memenuhi
$$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=2|-2x+y+z|-2$$

Pembahasan:
Perhatikan bentuk $(-2x+y+z)$ dapat diperoleh dari $(y-x)+(z-x)$.
Misal,
$a=y-x$
$b=z-x$

Maka, diperoleh:
$$\begin{aligned} & (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=2|-2x+y+z|-2 \\ \Leftrightarrow\quad & a^2+(a-b)^2+b^2=2|a+b|-2 \\ \Leftrightarrow\quad & a^2+(a^2-2ab+b^2)+b^2=2|a+b|-2 \\ \Leftrightarrow\quad & 2a^2-2ab+2b^2=2|a+b|-2 \end{aligned}$$

Perhatikan, bentuk nilai mutlak $|a+b|$:
$$|a+b|=\begin{cases} a+b, \text{ untuk } a+b\geq 0 \\ -a-b, \text{ untuk } a+b<0 \end{cases}$$

Sehingga untuk $a+b\geq 0$, maka:
$$\begin{aligned} & 2a^2-2ab+2b^2=2|a+b|-2 \\ \Rightarrow\quad & 2a^2-2ab+2b^2=2(a+b)-2 \\ \Leftrightarrow\quad & 2a^2-2ab+2b^2-2a-2b+2=0 \\ \Leftrightarrow\quad & (a^2-2a+1)+(b^2-2b+1)+(a^2-2ab+b^2)=0 \\ \Leftrightarrow\quad & (a-1)^2+(b-1)^2+(a-b)^2=0 \end{aligned}$$
Nilai terkecil bilangan kuadrat adalah 0, maka kemungkinannya adalah:
$$\begin{aligned} \Leftrightarrow\quad & (a-1)^2=0 \text{ atau } (b-1)^2=0 \text{ atau } (a-b)^2=0 \\ \Leftrightarrow\quad & a-1=0 \qquad b-1=0 \qquad a-b=0 \\ \Leftrightarrow\quad & a=1 \qquad b=1 \qquad a=b \end{aligned}$$

Sehingga, diperoleh:
$$\begin{aligned} a=1 \Rightarrow\ & y-x=1 \\ \Leftrightarrow\ & y=x+1 \end{aligned} \qquad \text{dan} \qquad \begin{aligned} b=1 \Rightarrow\ & z-x=1 \\ \Leftrightarrow\ & z=x+1 \end{aligned}$$

Maka tripel (x, y, z) yang memenuhi untuk $a+b\geq 0$ adalah $(x, y, z)=(x, x+1, x+1)$

Sedangkan untuk $a+b<0$, maka:
$$\begin{aligned} & 2a^2-2ab+2b^2=2|a+b|-2 \\ \Rightarrow\quad & 2a^2-2ab+2b^2=2(-a-b)-2 \\ \Leftrightarrow\quad & 2a^2-2ab+2b^2+2a+2b+2=0 \\ \Leftrightarrow\quad & (a^2+2a+1)+(b^2+2b+1)+(a^2-2ab+b^2)=0 \\ \Leftrightarrow\quad & (a+1)^2+(b+1)^2+(a-b)^2=0 \end{aligned}$$
Nilai terkecil bilangan kuadrat adalah 0, maka kemungkinannya adalah:
$$\begin{aligned} \Leftrightarrow\quad & (a+1)^2=0 \text{ atau } (b+1)^2=0 \text{ atau } (a-b)^2=0 \\ \Leftrightarrow\quad & a+1=0 \qquad b+1=0 \qquad a-b=0 \\ \Leftrightarrow\quad & a=-1 \qquad b=-1 \qquad a=b \end{aligned}$$

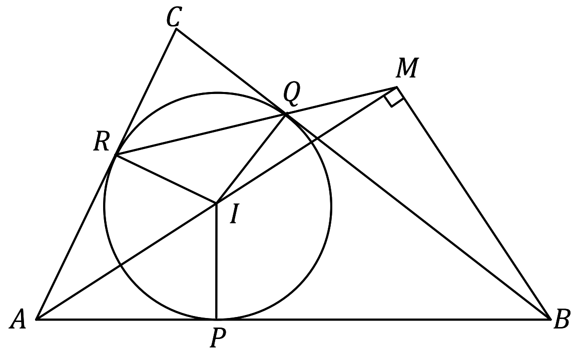
Sehingga, diperoleh:
$$\begin{aligned} a=-1 \Rightarrow\ & y-x=-1 \\ \Leftrightarrow\ & y=x-1 \end{aligned} \qquad \text{dan} \qquad \begin{aligned} b=-1 \Rightarrow\ & z-x=-1 \\ \Leftrightarrow\ & z=x-1 \end{aligned}$$

Maka tripel (x, y, z) yang memenuhi untuk $a+b<0$ adalah $(x, y, z)=(x, x-1, x-1)$

3. Diberikan sebuah segitiga ABC. Lingkaran dalam segitiga ABC menyinggung sisi AB, BC, dan AC berturut-turut di titik P, Q, dan R. Jika garis RQ berpotongan dengan garis bagi sudut BAC di titik M, buktikan $AM \perp BM$.

Pembahasan:
Gambar saja dengan memilih bentuk segitiga ABC adalah segitiga sama sisi, maka dengan mudah akan terbukti bahwa $AM \perp BM$.

Untuk bentuk segitiga ABC yaitu segitiga sembarang seperti berikut ini…. (Eddy Hermanto)



Misalkan $\angle BAC = 2\alpha; \angle ABC = 2\beta; \angle ACB = 2\gamma$,
maka, $\alpha + \beta + \gamma = 90°$

Perhatikan segiempat $CRIQ$, karena jumlah sudutnya 360° maka $\angle RIQ = 2(\alpha + \beta)$
Karena IQ dan IR adalah jari-jari lingkaran,
maka $\angle IRQ = \angle IQR = \gamma$

Perhatikan ΔARM, dan pandang $\alpha + \beta + \gamma = 90°$,
sehingga karena $\angle IRQ = \gamma$, maka $\angle ARM = 90 + \gamma$,
padahal $\angle IAR = \alpha$, maka $\angle IMQ = \angle AMR = 180 - (\alpha + 90 + \gamma) = \beta$

Karena $\angle BPI + \angle BQI = 90° + 90° = 180°$,
maka dapat dibuat sebuah lingkaran yang melalui B, Q, I, P.

Karena $\angle IBQ = \angle IMQ = \beta$ dan titik M dan B berada pada busur yang sama,
maka lingkaran luar ΔBIQ juga melalui M.

Jadi, ada sebuah lingkaran yang melalui B, M, Q, I, P.
Maka, $\angle BPI + \angle BMI = 180°$, sehingga $\angle BMI = \angle BMA = 90°$.

Sehingga terbukti bahwa $AM \perp BM$

4. Diberikan himpunan $A = \{1, 2, 3, \dots, 20\}$. Untuk setiap permutasi $(a_1, a_2, \dots, a_{20})$ dari himpunan A, dibentuk bilangan s sebagai berikut:
$$s = |a_1 - a_{20}| + |a_2 - a_{19}| + |a_3 - a_{18}| + \cdots + |a_{10} - a_{11}|$$
Tentukan nilai rata-rata dari semua nilai s yang mungkin.

Pembahasan

Perhatikan, mari kita lihat bentuk soal ini dalam bentuk yang lebih sederhana. Misal himpunan A kita potong sehingga hanya tersisa $A = \{1, 2, 3, 4\}$, maka banyak permutasi (a_1, a_2, a_3, a_4) dari himpunan $A = \{1, 2, 3, 4\}$ adalah $4! = 24$.

Sehingga, ada sebanyak 24 bilangan s yang dapat dibentuk, antara lain:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{1,2,3,4\} \Rightarrow & s_1 &= |1-4| + |2-3| \\
A_2 &= \{1,2,4,3\} \Rightarrow & s_2 &= |1-3| + |2-4| \\
A_3 &= \{1,3,2,4\} \Rightarrow & s_3 &= |1-4| + |3-2| \\
A_4 &= \{1,3,4,2\} \Rightarrow & s_4 &= |1-2| + |3-4| \\
A_5 &= \{1,4,2,3\} \Rightarrow & s_5 &= |1-3| + |4-2| \\
A_6 &= \{1,4,3,2\} \Rightarrow & s_6 &= |1-2| + |4-3| \\
A_7 &= \{2,1,3,4\} \Rightarrow & s_7 &= |2-4| + |1-3| \\
A_8 &= \{2,1,4,3\} \Rightarrow & s_8 &= |2-3| + |1-4| \\
A_9 &= \{2,3,1,4\} \Rightarrow & s_9 &= |2-4| + |3-1| \\
A_{10} &= \{2,3,4,1\} \Rightarrow & s_{10} &= |2-1| + |3-4| \\
A_{11} &= \{2,4,1,3\} \Rightarrow & s_{11} &= |2-3| + |4-1| \\
A_{12} &= \{2,4,3,1\} \Rightarrow & s_{12} &= |2-1| + |4-3| \\
A_{13} &= \{3,1,2,4\} \Rightarrow & s_{13} &= |3-4| + |1-2| \\
A_{14} &= \{3,1,4,2\} \Rightarrow & s_{14} &= |3-2| + |1-4| \\
A_{15} &= \{3,2,1,4\} \Rightarrow & s_{15} &= |3-4| + |2-1| \\
A_{16} &= \{3,2,4,1\} \Rightarrow & s_{16} &= |3-1| + |2-4| \\
A_{17} &= \{3,4,1,2\} \Rightarrow & s_{17} &= |3-2| + |4-1| \\
A_{18} &= \{3,4,2,1\} \Rightarrow & s_{18} &= |3-1| + |4-2| \\
A_{19} &= \{4,1,2,3\} \Rightarrow & s_{19} &= |4-3| + |1-2| \\
A_{20} &= \{4,1,3,2\} \Rightarrow & s_{20} &= |4-2| + |1-3| \\
A_{21} &= \{4,2,1,3\} \Rightarrow & s_{21} &= |4-3| + |2-1| \\
A_{22} &= \{4,2,3,1\} \Rightarrow & s_{22} &= |4-1| + |2-3| \\
A_{23} &= \{4,3,1,2\} \Rightarrow & s_{23} &= |4-2| + |3-1| \\
A_{24} &= \{4,3,2,1\} \Rightarrow & s_{24} &= |4-1| + |3-2|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum s &= 4(|1-2| + |1-3| + |1-4| + |2-1| + |2-3| + |2-4| \\
&\quad + |3-1| + |3-2| + |3-4| + |4-1| + |4-2| + |4-3|) \\
&= 4\left(\underbrace{1+2+3+1+1+2+2+1+1+3+2+1}_{dapat\ dirapikan}\right) \\
&= 4\left(2\left((1) + (1+2) + (1+2+3)\right)\right)
\end{aligned}$$

Sehingga kita akan mendapatkan rumus umum

$$\sum s = \frac{n}{2} \cdot (n-2)! \left(2\left(\frac{1}{6}(n-1)(n)(n+1)\right)\right)$$

Catatan:

Warna kuning, artinya bentuk $|a_1 - a_n|$ akan muncul sebanyak $(n-2)!$, dan kemungkinan munculnya adalah di $\frac{n}{2}$ tempat. Perhatikan s memuat $\frac{n}{2}$ nilai mutlak, ya kan?

Warna biru, artinya bentuk $|1-4|$ dan $|4-1|$ menghasilkan nilai yang sama.

Warna hijau, adalah rumus umum untuk deret $1 + 3 + 6 + 10 + \cdots$

Sehingga, rumus umum untuk nilai rata-rata dari semua nilai s yang mungkin adalah:

$$\bar{s} = \frac{\sum s}{n!} \Rightarrow \bar{s} = \frac{\frac{n}{\cancel{2}} \cdot (n-2)! \left(\cancel{2}\left(\frac{1}{6}(n-1)(n)(n+1)\right)\right)}{n!}$$

$$\Leftrightarrow \bar{s} = \frac{\frac{1}{6}n \cdot (n+1)(n)(n-1)(n-2)!}{n!}$$

$$\Leftrightarrow \bar{s} = \frac{\frac{1}{6}n \cdot (n+1)\cancel{n!}}{\cancel{n!}}$$

$$\Leftrightarrow \bar{s} = \frac{1}{6}n(n+1)$$

Jadi, untuk $n = 20$, maka nilai rata-rata dari semua s yang mungkin adalah:

$$\bar{s} = \frac{1}{6} \cdot 20 \cdot 21 = 70$$

5. Hitung integral berikut:

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{2 + 2\cos x - 2\sqrt{3}\sin x}$$

Pembahasan:
Perhatikan, kita gunakan substitusi:
$z = \tan\left(\frac{1}{2}x\right)$, $\sin x = \frac{2z}{1+z^2}$, $\cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}$, serta $dx = \frac{2dz}{1+z^2}$

Sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{2 + 2\cos x - 2\sqrt{3}\sin x} &= \int_0^{\frac{1}{3}\sqrt{3}} \frac{\left(\frac{2}{1+z^2}\right) dz}{2 + 2\left(\frac{1-z^2}{1+z^2}\right) - 2\sqrt{3}\left(\frac{2z}{1+z^2}\right)} \\
&= \int_0^{\frac{1}{3}\sqrt{3}} \frac{2\,dz}{2(1+z^2) + 2(1-z^2) - 2\left(2\sqrt{3}z\right)} \\
&= \int_0^{\frac{1}{3}\sqrt{3}} \frac{dz}{(1+z^2) + (1-z^2) - \left(2\sqrt{3}z\right)} \\
&= \int_0^{\frac{1}{3}\sqrt{3}} \frac{dz}{2 - 2\sqrt{3}z} \\
&= \left[-\frac{1}{2\sqrt{3}} \ln\left|1 - \sqrt{3}z\right|\right]_0^{\frac{1}{3}\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

Pembahasan soal OGN Matematika SMA 2016 Tingkat Nasional ini mungkin sangat jauh dari sempurna mengingat keterbatasan penulis. Saran, koreksi dan tanggapan sangat diharapkan demi perbaikan pembahasan soal OSN ini.

Untuk download pembahasan soal SBMPTN, UNAS, Olimpiade, dan rangkuman materi pelajaran serta soal-soal ujian yang lainnya, silahkan kunjungi http://pak-anang.blogspot.com.

Terima kasih.
Pak Anang