寄り道をせずにまっすぐ進む方が道のりは短いという事実から、我々は思いがけず素数に遭遇する

素数Tシャツ

January 30, 2016

数学なんて役に立たない !?

Fact 1.1

曽野綾子は次のような旨の発言をした：
「二次方程式などは社会へ出て何の役にも立たないので、このようなものは追放すべきだ」

数学なんて役に立たない !?

Fact 1.1

曽野綾子は次のような旨の発言をした：
「二次方程式などは社会へ出て何の役にも立たないので、このようなものは追放すべきだ」

Remark 1.2

「曽野綾子の小説」の方がはるかに役に立たない。

数学なんて役に立たない !?

Fact 1.1

曽野綾子は次のような旨の発言をした：
「二次方程式などは社会へ出て何の役にも立たないので、このようなものは追放すべきだ」

Remark 1.2

「曽野綾子の小説」の方がはるかに役に立たない。

Fact 1.3

菊池寛は次のような旨の発言をした：
「数学なんて役に立たない。三角形の二辺の和が、残りの一辺より長いが、道を歩くときに役に立っただけだ。」

三角不等式

菊池寛が唯一役に立つと言った定理 ＝ 三角不等式

三角不等式

菊池寛が唯一役に立つと言った定理 ＝ 三角不等式

Theorem 1.4 (三角不等式)

三角形の三辺の長さを a, b, c とすると、

$$a < b + c, \ \ b < c + a, \ \ c < a + b$$

が成り立つ。

三角不等式

菊池寛が唯一役に立つと言った定理 ＝ 三角不等式

Theorem 1.4 (三角不等式)

三角形の三辺の長さを a, b, c とすると、

$$a < b + c, \; b < c + a, \; c < a + b$$

が成り立つ。

三角不等式は本当に重要な不等式であり、それを見抜いた（？）菊池寛は偉い。

距離という概念を特徴付けているのは三角不等式である $\xrightarrow{\text{抽象化}}$ 距離空間

距離空間

Definition 1.5

X を集合とし、距離関数 $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ が任意の $x, y, z \in X$ に対して次の条件を満たすと仮定する：

- $d(x, y) \geq 0$
- $d(x, y) = d(y, x)$
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (三角不等式)

このとき、(X, d) のことを距離空間という。

絶対値（付値）

Definition 1.6

K を体とし、絶対値関数 $|\ |: K \to \mathbb{R}$ が任意の $a, b \in K$ に対して次の条件を満たすと仮定する:

- $|a| \geq 0, \ |a| = 0 \iff a = 0$
- $|ab| = |a||b|$
- $|a+b| \leq |a| + |b|$ (三角不等式)

このとき、$|\ |$ を K 上の絶対値 (付値) といい、$(K, |\ |)$ を付値体という。

ノルム

Definition 1.7

$(K, |\ |)$ を付値体とし、V を K 上ベクトル空間とする。ノルム写像 $||\ ||: V \to \mathbb{R}$ が任意の $k \in K, v, w \in V$ に対して次の条件を満たすと仮定する:

- $||v|| \geq 0, \ ||v|| = 0 \iff v = 0$
- $||kv|| = |k| \cdot ||v||$
- $||v + w|| \leq ||v|| + ||w||$ (三角不等式)

このとき、$(V, ||\ ||)$ をノルム空間という。

$\mathbb{Q}$ 上の絶対値

無限素体 $\mathbb{Q}$ 上の絶対値にはどんなものがあるかを考える。

$\mathbb{Q}$ 上の絶対値

無限素体 $\mathbb{Q}$ 上の絶対値にはどんなものがあるかを考える。

Definition 2.1 (自明な絶対値)

$|\ |_{triv}: \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ を

$$|a|_{triv} := \begin{cases} 0 & \text{if } a = 0 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

で定義すれば、$\mathbb{Q}$ 上の絶対値を定める。$|\ |_{triv}$ を自明な絶対値という。

$\mathbb{Q}$ 上の絶対値

無限素体 $\mathbb{Q}$ 上の絶対値にはどんなものがあるかを考える。

Definition 2.1 (自明な絶対値)

$|\ |_{triv}: \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ を

$$|a|_{triv} := \begin{cases} 0 & if\ a = 0 \\ 1 & otherwise \end{cases}$$

で定義すれば、$\mathbb{Q}$ 上の絶対値を定める。$|\ |_{triv}$ を自明な絶対値という。

Definition 2.2 (通常の絶対値)

我々が中学生の頃から慣れ親しんできた通常の絶対値を、他の絶対値と区別するために、$|\ |_{\infty}: \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ と表す。

p 進絶対値 (1)

p を素数とする。

p 進絶対値 (1)

p を素数とする。

Definition 2.3 (p 進絶対値)

p 進絶対値 $|\ |_p$ を次のように定義する:

$$|a|_p := \begin{cases} 0 & \text{if } a = 0 \\ p^{-\mathrm{ord}_p(a)} & \text{if } a \neq 0 \end{cases}$$

と定める。

p 進絶対値 (1)

p を素数とする。

Definition 2.3 (p 進絶対値)

p 進絶対値 $|\ |_p$ を次のように定義する:

$$|a|_p := \begin{cases} 0 & \text{if } a = 0 \\ p^{-\mathrm{ord}_p(a)} & \text{if } a \neq 0 \end{cases}$$

と定める。

Example 2.4

$$\mathrm{ord}_3\left(\frac{63}{5}\right) = 2,\ \mathrm{ord}_5\left(\frac{63}{5}\right) = -1,\ \mathrm{ord}_7\left(\frac{63}{5}\right) = 1$$

p 進絶対値 (2)

p 進絶対値は三角不等式より強い不等式を満たす：

p 進絶対値 (2)

p 進絶対値は三角不等式より強い不等式を満たす：

Theorem 2.5 (ウルトラ三角不等式)

$$|a+b|_p \leq \min\{|a|_p, |b|_p\}$$

p 進絶対値 (2)

p 進絶対値は三角不等式より強い不等式を満たす：

Theorem 2.5 (ウルトラ三角不等式)

$$|a+b|_p \leq \min\{|a|_p, |b|_p\}$$

Definition 2.6

p 進距離 $d_p \colon \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ を $d_p(a, b) := |a-b|_p$ で定義する。距離空間 $(\mathbb{Q}, d_p)$ を完備化したものを $\mathbb{Q}_p$ と記し、p 進数体という。

p 進絶対値 (2)

p 進絶対値は三角不等式より強い不等式を満たす：

Theorem 2.5 (ウルトラ三角不等式)

$$|a+b|_p \leq \min\{|a|_p, |b|_p\}$$

Definition 2.6

p 進距離 $d_p\colon \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ を $d_p(a,b) := |a-b|_p$ で定義する。距離空間 $(\mathbb{Q}, d_p)$ を完備化したものを $\mathbb{Q}_p$ と記し、p 進数体という。

p 進距離の入った世界は物理世界とは全く異なる不思議な世界となっているが、p 進数は整数論において本質的で不可欠な対象となっている (Hensel が 20 世紀前後に発見)。

Ostrowski の定理

$\mathbb{Q}$ 上の絶対値として、「自明な絶対値」、「通常の絶対値」、「p 進絶対値」を見てきたが、他にもあるだろうか？

Ostrowski の定理

$\mathbb{Q}$ 上の絶対値として、「自明な絶対値」、「通常の絶対値」、「p 進絶対値」を見てきたが、他にもあるだろうか？

Definition 2.7

$\mathbb{Q}$ 上の絶対値 $|\ |_1$ および $|\ |_2$ が任意の有理数 a, b に対して

$$|a|_1 < |b|_1 \iff |a|_2 < |b|_2$$

が成り立つとき、$|\ |_1$ と $|\ |_2$ は同値な絶対値であるという。

Ostrowski の定理

$\mathbb{Q}$ 上の絶対値として、「自明な絶対値」、「通常の絶対値」、「p 進絶対値」を見てきたが、他にもあるだろうか？

Definition 2.7

$\mathbb{Q}$ 上の絶対値 $|\ |_1$ および $|\ |_2$ が任意の有理数 a, b に対して

$$|a|_1 < |b|_1 \iff |a|_2 < |b|_2$$

が成り立つとき、$|\ |_1$ と $|\ |_2$ は同値な絶対値であるという。

実は、真に驚くべきことに次の定理が成り立つ：

Ostrowski の定理

$\mathbb{Q}$ 上の絶対値として、「自明な絶対値」、「通常の絶対値」、「p 進絶対値」を見てきたが、他にもあるだろうか？

Definition 2.7

$\mathbb{Q}$ 上の絶対値 $|\ |_1$ および $|\ |_2$ が任意の有理数 a, b に対して

$$|a|_1 < |b|_1 \iff |a|_2 < |b|_2$$

が成り立つとき、$|\ |_1$ と $|\ |_2$ は同値な絶対値であるという。

実は、真に驚くべきことに次の定理が成り立つ：

Theorem 2.8 (Ostrowski)

$\mathbb{Q}$ 上の非自明な絶対値は通常の絶対値 $|\ |_\infty$ か或る素数 p に対する p 進絶対値 $|\ |_p$ のいずれかに同値である。

有限素点と無限素点

誰が三角不等式から素数が復元されると予想できるだろうか！

有限素点と無限素点

誰が三角不等式から素数が復元されると予想できるだろうか！$\mathbb{Q}$ 上の非自明な絶対値の同値類を素数だと思おう！（∞ も素数の仲間に入れる !! ）

有限素点と無限素点

誰が三角不等式から素数が復元されると予想できるだろうか！$\mathbb{Q}$ 上の非自明な絶対値の同値類を素数だと思おう！（∞ も素数の仲間に入れる !!）

Definition 2.9

$\mathbb{Q}$ 上の非自明な絶対値の同値類の集合を $\mathcal{V}$ と書くことにする。$\mathcal{V}$ の元のことを素点 (*place*) という。また、p 進絶対値の定める同値類のことを有限素点といい、$|\ |_\infty$ の定める同値類のことを無限素点という。

Riemann ゼータ関数

$\zeta(s)$ を Riemann ゼータ関数とする。 これは、$\mathbb{C}$ 上の有理型関数である。

Riemann ゼータ関数

$\zeta(s)$ を Riemann ゼータ関数とする。 これは、$\mathbb{C}$ 上の有理型関数である。

Proposition 2.10 (Euler 積表示)

$\mathrm{Re}(s) > 1$ ならば

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}.$$

Riemann ゼータ関数

$\zeta(s)$ を Riemann ゼータ関数とする。 これは、$\mathbb{C}$ 上の有理型関数である。

Proposition 2.10 (Euler 積表示)

$\mathrm{Re}(s) > 1$ ならば

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}.$$

Theorem 2.11 (関数等式)

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s)$$

が成立する。ここで、$\Gamma(s)$ はガンマ関数（$\mathbb{C}$ 全体で定義される有理型関数）。

完備 Riemann ゼータ関数

Euler 積表示によって、Riemann ゼータ関数 $\zeta(s)$ は有限素点に関する局所ゼータ $(1-p^{-s})^{-1}$ を掛け合わせて出来る大域的なゼータと思える。

完備 Riemann ゼータ関数

Euler 積表示によって、Riemann ゼータ関数 $\zeta(s)$ は有限素点に関する局所ゼータ $(1-p^{-s})^{-1}$ を掛け合わせて出来る大域的なゼータと思える。
素点の観点からは無限素点に関する局所ゼータも考えるべき！

完備 Riemann ゼータ関数

Euler 積表示によって、Riemann ゼータ関数 $\zeta(s)$ は有限素点に関する局所ゼータ $(1-p^{-s})^{-1}$ を掛け合わせて出来る大域的なゼータと思える。
素点の観点からは無限素点に関する局所ゼータも考えるべき！

Definition 2.12 (無限因子（ガンマファクター）と完備ゼータ)

無限素点に関する局所ゼータ関数を $\zeta_\infty(s) := \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$ と定義する。また、完備 *Riemann* ゼータ関数を $\widehat{\zeta}(s) := \zeta_\infty(s)\zeta(s)$ と定義する。

完備 Riemann ゼータ関数

Euler 積表示によって、Riemann ゼータ関数 $\zeta(s)$ は有限素点に関する局所ゼータ $(1-p^{-s})^{-1}$ を掛け合わせて出来る大域的なゼータと思える。
素点の観点からは無限素点に関する局所ゼータも考えるべき！

Definition 2.12 (無限因子（ガンマファクター）と完備ゼータ)

無限素点に関する局所ゼータ関数を $\zeta_\infty(s) := \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$ と定義する。また、完備 *Riemann* ゼータ関数を $\widehat{\zeta}(s) := \zeta_\infty(s)\zeta(s)$ と定義する。

このとき、関数等式は次のように完全に対称的な形で記述できる：

完備 Riemann ゼータ関数

Euler 積表示によって、Riemann ゼータ関数 $\zeta(s)$ は有限素点に関する局所ゼータ $(1-p^{-s})^{-1}$ を掛け合わせて出来る大域的なゼータと思える。
素点の観点からは無限素点に関する局所ゼータも考えるべき！

Definition 2.12 (無限因子（ガンマファクター）と完備ゼータ)

無限素点に関する局所ゼータ関数を $\zeta_\infty(s) := \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$ と定義する。また、完備 *Riemann* ゼータ関数を $\widehat{\zeta}(s) := \zeta_\infty(s)\zeta(s)$ と定義する。

このとき、関数等式は次のように完全に対称的な形で記述できる：

Theorem 2.13 (関数等式)

$$\widehat{\zeta}(s) = \widehat{\zeta}(1-s).$$

Thank you for your attention!