수학(나형)

1. 정답 : ④
   해설 :
   준식= 4 × 2= 8

2. 정답 : ③
   해설 :
   $\frac{\infty}{\infty}$에서 함수의 극한값은 최고차항의 계수비와 같다.

3. 정답 : ③
   해설 :
   집합 B에는 집합 A의 원소인 1, 7이 포함되어야 한다
   따라서 a의 값은 7이다.

4. 정답 : ⑤
   해설 :
   $(g \circ f)(3)=g(f(3))=g(4)=5$

5. 정답 : ④
   해설 :
   주어진 명제가 참이 되려면
   $x^2-3x-4\le 0$에 a를 대입한 $a^2-3a-4\le 0$ 성립되어야 한다. 따라서 a의 범위는 $-1\le a\le 4$이다.

6. 정답 : ②
   해설 :
   $f(x)$가 $x=1$에서 극소값을 가지려면 $f'(1)=0$ 이 되어야 한다.
   따라서 $f'(1)=3\times 1-a=0$ $a=3$

7. 정답 : ④
   해설 :
   준식 $=2\sum_{k=1}^{10}a_k^2-\sum_{k=1}^{10}a_k=2\times 7-3=11$

8. 정답 : ②
   해설 :
   $y=\sqrt{2(x+3)}$의 그래프를 x축으로 m만큼 평행이동한 그래프는 $y=\sqrt{2(x-m+3)}$이므로 $m=3$이 된다.

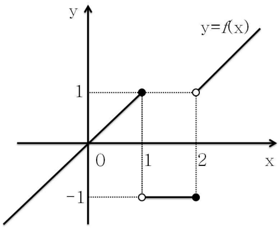
9. 정답 : ④
   해설 :

$y=\dfrac{3x+1}{x-1}$에서의 점근선은

$x=1,\ y=3$

$\therefore\ a+b=4$

10. 정답 : ⑤
   해설 :



$\lim\limits_{x\to1-}f(x)+\lim\limits_{x\to2+}f(x)=1+1=2$

11. 정답 : ⑤
   해설 :

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{x}{5}\right)^n$에서 무한등비급수가 수렴조건 $-1<r<1$이므로

$-1<\dfrac{x}{5}<1$

$\therefore\ -5<x<5$

정수의 개수는 9개

12. 정답 : ②
   해설 :

$P(A)=\dfrac{2}{3},\quad P(A\cap B)=\dfrac{1}{4}$

$\Rightarrow P(A\cap B^c)=P(A)-P(A\cap B)=\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{12}$

13. 정답 : ①
   해설 :

$(1,\ \log_2 5),\quad (2,\ \log_2 10)$에서의

기울기$=\dfrac{\log_2 10-\log_2 5}{2-1}=\log_2 2=1$

14. 정답 : ⑤
   해설 :
   조건부 확률에서 $\frac{32}{36}=\frac{8}{9}$

15. 정답 : ③
   해설 :
   등비수열 이므로
   $a_3=4(a_2-a_1)$에서
   $ar^2=4(ar-a)$
   $ar^2=4a(r-1)$
   $r^2-4r+4=0$
   $\therefore r=2$
   $\sum_{k=1}^{6} a_k=15$에서
   $S_6=\frac{a(2^6-1)}{2-1}=15$
   $63a=15$
   $a_1=\frac{5}{21}$
   따라서 $a_1=\frac{5}{21}, a_3=\frac{20}{21}, a_5=\frac{80}{21}$
   $\therefore a_1+a_3+a_5=5$

16. 정답 : ①
   해설 :
   $x=t^3+at^2+bt$에서 미분하면
   $V(t)=3t^2+2at+b$에서 $V(1)=0$ 이므로
   $2a+b=-3$ 이다

   다시 속도를 미분하면 가속도 이므로
   $a(t)=6t+2a$
   주어진 조건에서
   $a(2)=0$ 이므로 $b=9$ 따라서 $a=-6$
   $\therefore a+b=3$

17. 정답 : ①
   해설 :
   $f(x)=ax^2+b,\ f'(x)=2ax$ 이므로 주어진 등식에 대입하면
   $4(ax^2+b)=4a^2x^2+x^2+4$

$4ax^2+4b=(4a+1)x^2+4$

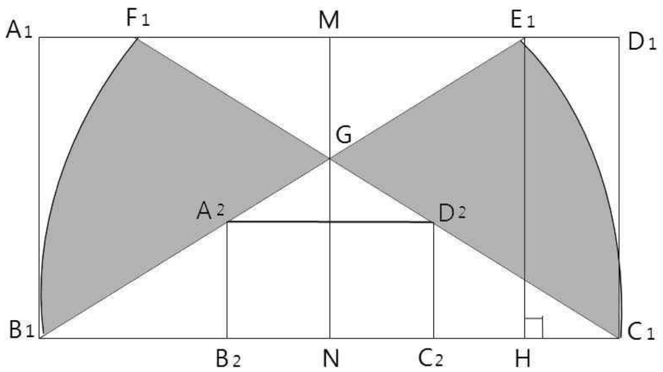
항등식의 성질에 의해

$4a=4a^2+1$ 이므로 $a=\dfrac{1}{2}$이고 $4b=4$, $b=1$ 이다.

$\therefore f(x)=\dfrac{1}{2}x^2+1$ 이므로 $f(2)=3$이다.

18. 정답 : ②

해설 :



$\overline{A_1D_1}$의 중점을 M, $\overline{B_1C_1}$의 중점을 N이라고 하자.

$\overline{MG}=-x, \overline{GN}=x$ 점 E_1에서 $\overline{B_1C_1}$에 내린 수선의 발을 H,

$\overline{B_1E_1}^2=(\overline{B_1N}+\overline{NH})^2+\overline{EH}^2$

$4=(1+\overline{NH^2})+1 \qquad \therefore \overline{NH}=\sqrt{3}-1$

$\triangle MGE_1$과 $\triangle NGB_1$에서

$\sqrt{3}-1:1=1-x:x \qquad \therefore x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\overline{GN}$

$\overline{B_1N}=1, \overline{GB_1}=\dfrac{2}{\sqrt{3}} \qquad \therefore \angle GB_1N=30^\circ$

R_1의 넓이 $S_1=2(4\Pi\times\dfrac{30}{360}-\dfrac{1}{2}\times2\times\dfrac{\sqrt{3}}{3})=\dfrac{2\Pi-2\sqrt{3}}{3}$

R_1과 R_2의 닮음비는 $1:\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$

따라서, 넓이의 비는 $1:\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{2\Pi - 2\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{2-\sqrt{3}}{2}} = \frac{4\sqrt{3}-12}{9}$$

∴ 답 ②번

19. 정답 : ④

해설 :

a<b-2≤c

① b=1~3인 경우 a는 존재하지 않으므로 ‘0’가지

② b=4인 경우 a<2≤c

a=1   c=2~6

∴5가지

③ b=5인 경우 a<3≤c

a=1,2   b=3,4,5,6

∴8가지

④ b=6인 경우 a<4≤c

a=1,2,3   c=4,5,6

∴9가지

∴위의 부등식이 성립할 확률= $\frac{5+8+9}{6\times6\times6} = \frac{11}{108}$

답 ④번

20. 정답 : ③

해설 :

① $c = 2k_1\ d = 2k_2$ 인경우

$2a + 2d + 2k_1 + 2k_2 = 2n$ 에서

$a+d+k_1+k_2 = n$

$\therefore 4Hn = n+3C_n = n+3C_3$

$(가) = n+C_3 = f(n)$

② $c = 2k_3+1, d = 2k_4+1$ 인경우

$2a + 2b + 2k_3 + 1 + 2k_4 + 1 = 2n$ 에서

$a+b+k_3+k_4 = n-1$

$\therefore 4H_{n-1} = n+2C_{n-1} = n+2C_3$

$(나) = n+2C_3 = g(n)$

$$\sum_{n=1}^{8} \alpha n = \sum_{n=1}^{8} (n+3C_3 + n+2C_3) = 824$$

$(다) = 824$

$\therefore f(6) + g(5) + r = 84+35+824 = 943$

21. 정답 : ③
해설 :
(가) 조건과 (나) 조건에 의해
$a > b > 3$을 찾을 수 있다
ㄱ. $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$에서 판별식 $\frac{D}{4} = a^2 - 3b > 0$이므로 $f'(x)$는 서로 다른 두 실근을 가진다. (참)

ㄴ. $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$의 근과 계수와의 관계를 따져보면
$\alpha + \beta = -\frac{2a}{3} < -2$, $\alpha \times \beta = \frac{b}{3} > 1$ 이므로, $f'(x)$는 음의 두 실근을 가지며 대칭축은 -1보다 작다. 따라서 $-1 < x < 1$일 때, $f'(x) \geq 0$는 거짓이다.(거짓)

ㄷ. $f(x) = f'(k)x$를 만족하는 서로다른 실근의 개수가 2가 되는 모든 실수 k의 개수는
원점을 지나며 $f(x)$함수와 만나는 점의 개수가 2개가 되는 기울기의 개수를 와 같으므로 원점에서의 접선과 같은 기울기인점 1개와 원점, 그리고 원점을 지나며 접하는 기울기 인점 2개, 총 4개의 서로다른 k를 가진다.(참)
따라서 정답은 ㄱ,ㄴ 이다.

22. 정답 : 56
해설 :
${}_8P_2 = 8 \times 7 = 56$

23. 정답 : 15
해설 :
$f(x) = x^3 - 2x^2 + 4$이고 $f'(x) = 3x^2 - 4x$ 이므로
$f'(3) = 15$이다

24. 정답 : 35
해설 :
$a_5 = 5, a_{15} = 25$이므로 $a_1 = -3$ 공차 $d = 2$이다.
따라서 a_{20}=35이다

25. 정답 : 3
해설 :
11=3+3+5
=3+3+1+1+1+1+1
=3+3+3+1+1 ∴3

26. 정답 : 25
해설 :

$(1+2x)(1+x)^5$의 전개식에서 x^4의 계수는

$(1+x)^5$ 일반항이 $_5C_rx^2$이므로

$1\times {_5C_4}x^4+2x\times {_5C_3}x^3$

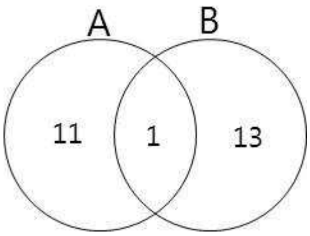
$5+20=25 \qquad \therefore 25$

27. 정답 : 13
해설 :

가) $_n(\cup)=25$

나) $A\cap(A^c\cup B)=(A\cap A^c)\cup(A\cup B)=(A\cup B)\neq\varnothing$

다) $_n(A-B)=11$



$_n(B-1)$가 최대일 때는

$_n(A\cap B)=1$이므로

$\therefore {_n(B-A)}=13$

$\therefore 13$

28. 정답 : 24
해설 :

가) $\dfrac{x}{f_{(x)}}$는 $x=1, x=2$에서 불연속일 때

$f_{(x)}=a(x-1)(x-2)$이다.

나) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{a(x-1)(x-2)}{x-2}=4 \quad a=4$

$\therefore f_{(x)}=4(x-1)(x-2)$

$f_{(4)}=24 \qquad \therefore 24$

29. 정답 : 20

해설 :

함수 $f(x)$와 $f^{-1}(x)$의 교점이 $(-1,-1),(1,1),(2,2)$라면

$x \geq 1$에서 $f(x)=cx^2+\frac{5}{2}x$는 일직선 위의 세 점 $(0,0),(1,1),(2,2)$를 지나야 하고 이것은 불가능하다. 즉, $(1,1)$ 또는 $(2,2)$ 둘 중의 하나만 지나야 한다.

(i) $(1,1)$을 지날 때,

$f(1)=c+\frac{5}{2}=1$, $c=-\frac{3}{2}$ 이고 따라서

$x \geq 1$에서 $f(x)=-\frac{3}{2}x^2+\frac{5}{2}x$, $f(2)=-1$, 즉, $(2,-1)$을 지난다. 이 때 함수 $f(x)$와 $f^{-1}(x)$가 만나기 위해서는 $f(x)$는 $(-1,2)$를 지나야 한다.

$x<1$에서 $f(x)=ax+b$, $f(1)=a+b=1$, $f(-1)=-a+b=2$

따라서 $b=\frac{3}{2}$, $a=-\frac{1}{2}$.

(ii) $(2,2)$를 지날 때

$f(2)=4c+\frac{5}{2}=2$, $c=-\frac{3}{4}$이고 따라서

$x \geq 1$에서 $f(x)=-\frac{3}{4}x^2+\frac{5}{2}x$. 이 때 축의 방정식이 $x=\frac{5}{3}(>1)$이므로 역함수가 존재하지 않는다. 즉 문제가 성립하지 않는다.

그러므로 (i), (ii)에서 $b=\frac{3}{2}$, $a=-\frac{1}{2}$, $c=-\frac{3}{2}$이고 함수 $f(x)$와 $f^{-1}(x)$의 교점은

$(-1,2),(1,1),(2,-1)$이다.

$\therefore 2a+4b-10c=20$

30. 정답 : 65

해설 :

문제의 주어진 조건을 이용해서 평균값정리와 함숫값을 추론 해야한다.

$n=1 \quad f(1) = f(1) \cdot f(2)$

$n=2 \quad f(1)+f(2) = f(2) \cdot f(3)$

$n=3 \quad f(1)+f(2)+f(3) = f(3) \cdot f(4)$

$n=4 \quad f(1)+f(2)+f(3)+f(4) = f(4) \cdot f(5)$

$n=5 \quad f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5) = f(5) \cdot f(6)$

여기서 f(1)의 값부터 케이스 분로 하여 시작하는데 문제에 주어진 조건이 n=3,4일 때 평균값 정리를 만족해야하므로 $f(3) \geq f(5), f(4) \geq f(6)$ 만족하여 한다.

먼저 Case분류를 $f(1)=0$ or $f(2)=1$ 로 나누어서 하는데 $f(1)=0$ 일 때는

위의 $f(3) \geq f(5), f(4) \geq f(6)$ 을 만족시켜주지 못한다.
따라서 $f(2)=1$ 이고 여기서부터 대입하여 함숫값을 찾아 나간다.
$f(1)+1 = f(3)$ 이 되고, $n=3$ $2f(3) = f(3) \cdot f(4)$ 이므로

여기서 또 한번 Case분류를 나누는데 $f(3)=0$ or $f(4)=1$ 여기서 $f(4)=1$은 조건을 만족시키지 않는다.
따라서 $f(3)=0$ 이고 $f(1)+1 = f(3)$ 에 의해 $f(1)=-1$ 이다.
$n=4$ $f(4) = f(4) \cdot f(5)$ 이고 $f(3) \geq f(5)$ 이므로 $f(4)=0$ 이다.

$n=5$ $f(5) = f(5) \cdot f(6)$ 이고 $f(4) \geq f(6)$ 이므로 $f(5)=0$ 이다.
위의 모든 결과를 종합해 보면
$f(1)=-1, f(2)=1, f(3)=0, f(4)=0, f(5)=0$ 이 되고
사차함수 $f(x)=(x-3)(x-4)(x-5)(ax+b)$ 로 두고 연립해보면
$f(x)=(x-3)(x-4)(x-5)(-\frac{5}{24}x+\frac{1}{4})$

따라서, $\therefore 128 \times f(\frac{5}{2}) = 128 \times \frac{65}{2^7} = 65$